C. BOURLET

Remarque sur la surface dont tous les points sont des ombilics

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 10-13

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__10_1>

REMARQUE SUR LA SURFACE DONT TOUS LES POINTS SONT DES OMBILICS;

PAR M. C. BOURLET,
Docteur ès Sciences mathématiques.

En désignant, comme de coutume, par p, q, r, s, t les dérivées partielles de la fonction z de x et y, on sait que la surface dont tous les points sont des ombilics satisfait le système d'équations simultanées

$$(1) \qquad \frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}.$$

On démontre, ordinairement, que la sphère est la seule surface vérifiant ce système par un procédé très simple mais peu naturel (*voir*, par exemple, le *Cours* de Serret). Il est facile de voir que cette proposition importante s'établit *directement* sans difficulté en s'appuyant sur une propriété générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles simultanées que j'ai établie ailleurs. J'ai montré en effet (voir *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure,* 1891, Supp.) que lorsque, d'un système d'équations aux dérivées partielles, on peut tirer, par dérivations, toutes les dérivées d'un certain ordre de la fonction inconnue en fonction des dérivées d'ordre inférieur, l'intégrale générale de ce système ne contient qu'un nombre *fini* de constantes arbitraires dont on peut déterminer le nombre à l'avance et que, de plus, on peut ramener l'intégration de ce système à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires. Or, si l'on écrit le système (1) sous la forme équivalente

$$(2) \qquad \begin{cases} r = \dfrac{1+p^2}{1+q^2}\,t, \\[2mm] s = \dfrac{pq}{1+q^2}\,t, \end{cases}$$

on en tire, facilement, par dérivations, et en tenant compte de la condition

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x},$$

toutes les dérivées du troisième ordre de z en fonction de p, q et t :

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{3p(1+p^2)}{(1+q^2)^2} t^2,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{q+3qp^2}{(1+q^2)^2} t^2,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{p+3pq^2}{(1+q^2)^2} t^2,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{3q}{1+q^2} t^2.$$

Cela nous prouve, d'après les propositions que j'ai rappelées, que l'intégrale générale du système (1) ou (2) ne dépend que d'un nombre *fini* de constantes arbitraires et le nombre de ces constantes est *quatre,* car on peut prendre, arbitrairement, les valeurs initiales de z, p, q et t. Or la sphère

$$z = c + \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}$$

est, manifestement, une surface répondant à la question, qui contient *quatre* constantes arbitraires a, b, c et R; donc c'est *la seule.*

Remarque. — En suivant la marche que j'ai indiquée (*loc. cit.*), on voit qu'on est ramené à intégrer le système *complètement intégrable* suivant :

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial z}{\partial x} = p & \dfrac{\partial z}{\partial y} = q, \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{1+p^2}{1+q^2} t, & \dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{pq}{1+q^2} t, \\[2ex] \dfrac{\partial q}{\partial x} = \dfrac{pq}{1+q^2} t, & \dfrac{\partial q}{\partial y} = t, \\[2ex] \dfrac{\partial t}{\partial x} = \dfrac{p+3pq^2}{(1+q^2)^2} t^2, & \dfrac{\partial t}{\partial y} = \dfrac{3qt^2}{1+q^2}, \end{array}\right.$$

qui donne z, p, q et t. r et s sont fournis, ensuite, par les relations (2). En faisant le changement de variables de Du Bois-Reymond

$$x = u, \quad y = uv,$$

on est ramené à intégrer le système d'équations différentielles ordinaires

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = p + qv, \\ \dfrac{\partial p}{\partial u} = \dfrac{1 + p^2 + pqv}{1 + q^2} t, \\ \dfrac{\partial q}{\partial u} = \dfrac{pq + (1 + q^2)v}{1 + q^2} t, \\ \dfrac{\partial t}{\partial u} = \dfrac{p + 3pq^2 + 3(1 + q^2)qv}{(1 + q^2)^2} t^2, \end{cases}$$

où u est la variable et v un paramètre arbitraire. L'intégrale générale de ce système (4) est, alors.

$$(5) \quad \begin{cases} z = c + \sqrt{R^2 - (u - a)^2 - (uv - b)^2}, \\ p = \dfrac{-(u - a)}{\sqrt{R^2 - (u - a)^2 - (uv - b)^2}}, \\ q = \dfrac{-(uv - b)}{\sqrt{R^2 - (u - a)^2 - (uv - b)^2}}, \\ t = \dfrac{(u - a)^2 - R^2}{[R^2 - (u - a)^2 - (uv - b)^2]^{\frac{3}{2}}}, \end{cases}$$

où a, b, c, R sont *quatre* constantes d'intégration.

En remontant aux anciennes variables x et y, on trouve bien pour z

$$z = c + \sqrt{R^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2};$$

ce qui donne la sphère.