Exercices. Questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. S1-S60 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__S1_0>

EXERCICES.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1658. On donne un triangle abc.

Du sommet a, on abaisse sur bc la perpendiculaire aa'. De même, de b on abaisse la perpendiculaire bb'.

Du point i, centre du cercle inscrit au triangle $a'cb'$, on mène des parallèles à ac et bc. Ces droites rencontrent ces côtés aux points α, β.

Démontrer que la circonférence, qui touche en α et β les côtés cb, ca, est tangente au cercle des neuf points du triangle donné. (MANNHEIM.)

1659. Étant donnée une conique (C), on considère le triangle formé par les tangentes menées d'un point P à la conique et la polaire de ce point P par rapport à (C). Montrer que l'orthocentre de ce triangle est sur la polaire du point P par rapport au cercle orthoptique de la conique (C).

(E.-N. BARISIEN.)

1660. Les deux tangentes au point double d'une cubique étant réelles, si d'un point de la courbe A_1 on peut mener deux tangentes réelles, il n'y a qu'un des points de contact, A_2 par exemple, d'où l'on puisse mener de nouveau des tangentes réelles; alors de A_2 on mène la tangente dont le point de contact A_3 jouit de la même propriété, etc. : montrer que le point limite vers lequel on tend ainsi est le point d'inflexion réel de la courbe. (A. ASTOR.)

1661. Démontrer que, si le rapport d'un terme au terme précédent dans la succession a_1, a_2, a_3, ... tend vers une limite finie et déterminée k, on a, pour n croissant à l'infini,

$$\lim \sqrt[n]{a_1^{u_n} a_2^{u_{n-1}} a_3^{u_{n-2}} \ldots a_n^{u_1}} = k^s,$$

u_1, u_2, u_3, ... étant les termes d'une série convergente quelconque, dont la somme est s. (CESARO.)

1662. Démontrer que la *clothoïde* (1) est la seule courbe jouissant de la propriété suivante : *le barycentre d'un arc quelconque est en ligne droite avec les centres de courbure aux points extrêmes.* (CESARO.)

1663. Si deux variables imaginaires, z et z', sont liées par la relation homographique

$$z = \frac{az' + b}{cz' + d},$$

dans laquelle a, b, c, d sont des quantités imaginaires, et si l'une des variables z' décrit une courbe C', la variable z décrit une courbe C qui est superposable à l'une des transformées par rayons vecteurs réciproques de la courbe C'.

Si la courbe C' n'est autre que l'axe des x, la courbe C est, par suite, un cercle, théorème déjà proposé par Laguerre dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques.* (E. AMIGUES.)

1664. Une courbe du quatrième ordre, qui a trois points doubles, admet généralement quatre tangentes doubles, qui forment quatre triangles homologiques du triangle déterminé par les points doubles. (ERNEST DUPORCQ.)

1665. Si trois cercles sont inscrits à un triangle, les quatrièmes tangentes communes qu'ils admettent, pris deux à deux, forment un triangle homologique du premier.

(ERNEST DUPORCQ.)

1666. Par un point fixe P du plan d'un cercle donné (C), on mène une corde quelconque dont les extrémités sont A et B. Le cercle (Σ) de diamètre PA rencontre le cercle (C) en un second point A'; le cercle (Σ') de diamètre PB rencontre le cercle (C) en un second point B'. Montrer que le point de concours des droites AA' et BB', ainsi que le point de concours des tangentes communes aux cercles (Σ) et (Σ') sont tous deux sur une même droite fixe.

En donner une solution analytique et une solution géométrique. (E.-N. BARISIEN.)

1667. Un point M parcourt une ellipse de foyers F et F'.

---

(1) Ligne dont la courbure varie proportionnellement à l'arc. Voyez *Nouvelles Annales*, 1886 : p. 512.

Le lieu du point de rencontre des tangentes communes aux cercles de diamètres FF′ et FM est une conique ayant un foyer au centre de l'ellipse. (E.-N. BARISIEN.)

1668. Étant donnée une parabole de sommet O et de foyer F, on trace une corde focale AC. Le cercle circonscrit au triangle OAB rencontre l'axe de la parabole en un point P tel que FP = AB. (E.-N. BARISIEN.)

1669. Par le foyer F d'une parabole, on mène une corde AB et on décrit sur AB comme diamètre une circonférence Σ qui rencontre la parabole en deux autres points C et D. On porte sur FC, du côté opposé à C, une longueur FD′ = FD, et sur FD, du côté opposé à D, une longueur FC′ = FC. Montrer que les points C′ et D′ sont situés sur la circonférence Σ.

(E.-N. BARISIEN.)

1670. Etant donnés trois points A, B, C sur une courbe quelconque, soient A′ le pôle de BC, B′ le pôle de AC, et C′ le pôle de AB. Lorsque les points A, B, C se réunissent en un seul A, on a

$$\lim\left(\frac{\mathrm{A'B'.A'C'.B'C'}}{\text{surface }\overline{\mathrm{A'B'C'}}}\right) = \mathrm{R},$$

R étant le rayon du cercle osculateur en A.

(E.-N. BARISIEN.)

1671. On considère une courbe quelconque, son centre de courbure C en un point M quelconque de la courbe, puis le centre de courbure C_1 correspondant au point C de la première développée, puis encore le centre de courbure C_2 correspondant au point C_1 de la seconde développée, et ainsi de suite jusqu'au centre C_m. On sait que, si les coordonnées x et y de C sont des fonctions d'un paramètre t, il en est de même des coordonnées x_n et y_n d'un quelconque des centres de courbure C_n. Montrer que l'expression

$$\frac{dx_n^2 + dy_n^2}{dx_n\, d^2y_n - dy_n\, d^2x_n}$$

conserve la même valeur pour les coordonnées de l'un quelconque des centres de courbure successifs.

(E.-N. BARISIEN.)

1672. La podaire du centre de la courbe

$$4(x^2 - y^2 - a^2)^3 + 27a^2x^4 = 0$$

a pour équation

$$4(x^2 + y^2)^3 - a^2(2x^2 + y^2)^2 = 0.$$

Le rapport de l'aire de la première courbe à celle de la seconde est $\frac{15}{19}$. (E.-N. BARISIEN.)

1673. Par un point fixe situé sur une circonférence de cercle, on mène deux cordes rectangulaires. Sur chacune de ces cordes, comme diamètre, on décrit respectivement les cercles (c), (c'). Le lieu des points de rencontre des tangentes communes aux deux cercles (c), (c') est une strophoïde droite. (E.-N. BARISIEN.)

1674. On considère tous les cercles tangents en un même point à une conique donnée. Lieu du pôle de la seconde corde d'intersection du cercle et de la conique par rapport à la conique. (ANDRÉ CAZAMIAN.)

1675. On considère tous les cercles de rayon constant tangents à une conique. Lieu du pôle de la seconde corde d'intersection du cercle et de la conique par rapport à la conique. Cas particulier d'un cercle de rayon nul. Montrer que, dans ce cas, le pôle de la seconde corde d'intersection du cercle et de la conique n'est autre que le point fixe du théorème de Frégier relatif aux angles droits ayant leur sommet au point considéré de la conique. (ANDRÉ CAZAMIAN.)

1676. Trouver, sur une conique, le point le plus éloigné et le point le plus rapproché d'un point donné situé hors de son plan (ANDRÉ CAZAMIAN.)

1677. On considère les coniques inscrites dans un quadrilatère. Le lieu du second point de rencontre de chaque conique avec la droite joignant un sommet au point de contact avec un des côtés ne passant pas par ce sommet est une conique. (ANDRÉ CAZAMIAN.)

1678. Lieu des sommets et enveloppe des axes des paraboles conjuguées par rapport à un triangle donné. (ANDRÉ CAZAMIAN.)

1679. On considère les coniques passant par deux points fixes et tangentes à une droite donnée en un point donné. Lieu du point de rencontre des tangentes à la conique menées par deux points fixes pris sur la droite. (André Cazamian.)

1680. On considère un faisceau de coniques passant par quatre points fixes :

1° Lieu des points de contact des tangentes menées à chacune d'elles par un point pris sur l'un des côtés du quadrilatère.

2° Lieu des points de rencontre des tangentes menées à chacune des coniques du faisceau par deux points pris sur l'une d'entre elles. (André Cazamian.)

1681. On considère les coniques inscrites dans un triangle et passant par un point fixe. Le lieu du second point de rencontre avec chaque conique de la droite joignant un sommet A au point de contact avec le côté opposé est une quartique unicursale. (André Cazamian.)

1682. On considère les coniques touchant quatre droites données. Deux points quelconques étant pris sur l'une de ces droites, le lieu des points de rencontre des tangentes menées de ces deux points à l'une quelconque des coniques du faisceau est une conique. Si les deux points fixes sont pris sur l'une des coniques du faisceau, le lieu est une cubique.

(André Cazamian.)

1683. On donne une ellipse de foyers F et F'. Par l'un des foyers on mène une sécante quelconque rencontrant l'ellipse aux points M et M' :

1° Enveloppe des cercles de diamètres MM', FM, F'M.

2° Soit N le point de concours des normales en M et M'. Lieu du point de rencontre de la sécante MFM' avec la parallèle au grand axe menée par le point N.

3° Soit P le point de rencontre des tangentes à l'ellipse en M et M'. Lieu du centre de gravité du quadrilatère MNM'P.

(André Cazamian.)

1684. Le lieu des points de rencontre des tangentes menées par deux sommets d'un triangle à toute conique conjuguée par rapport à ce triangle et passant, en outre, par un point fixe est une quartique trinodale. (André Cazamian.)

QUESTIONS RÉSOLUES.

Question 1547.

Soient AA′, BB′ *deux diamètres conjugués d'une ellipse ;* MM′ *un diamètre quelconque : les pôles des quatre droites* MA, MA′, M′B, M′B′ *sont situés sur une hyperbole qui passe par le centre de l'ellipse et est tangente, en ce point, au diamètre* MM′ ; *le centre de cette courbe est situé sur l'ellipse, et ses asymptotes sont parallèles aux droites* AA′, BB′, *respectivement.* (GENTY.)

SOLUTION

Par M. E.-N. BARISIEN.

Désignons par O le centre de l'ellipse, et soient P le pôle de MA, P′ le pôle de MA′, Q le pôle de M′B et Q′ le pôle de M′B′. Prenons pour axe des x le diamètre AA′, pour axe des y le diamètre BB′ et soient OA $= a$, OB $= b$. Si x_1 et y_1 sont les coordonnées du point M, on a

$$(1) \qquad b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2.$$

L'équation générale des coniques passant par P, P′, O est de la forme

$$(2) \qquad (b^2 x x_1 + a^2 y y_1 - a^2 b^2)(u x + v y - 1) + b^2(x^2 - a^2) = 0,$$

u et v étant deux paramètres arbitraires.

L'équation générale des coniques passant par Q, Q′, O est aussi de la forme

$$(3) \qquad (b^2 x x_1 + a^2 y y_1 + a^2 b^2)((\mathrm{U} x - \mathrm{V} y - 1) - a^2(y^2 - b^2) = 0.$$

En identifiant les équations (2) et (3), nous aurons les valeurs de u, v, U et V, et nous obtiendrons ainsi l'équation de la conique passant par les cinq points P, P′, Q, Q′ et O.

Les équations d'identification sont

$$\frac{ux_1+1}{Ux_1}=\frac{vy_1}{Vy_1-1}=\frac{ua^2y_1+vb^2x_1}{Ua^2y_1+Vb^2x_1}$$
$$=\frac{a^2u+x_1}{x_1-a^2U}=\frac{b^2v+y_1}{y_1-b^2V}.$$

Si l'on désigne par λ la valeur commune de ces rapports, on a

$$(4)\qquad ux_1+1=U\lambda x_1,$$
$$(5)\qquad vy_1=V\lambda y_1-\lambda,$$
$$(6)\qquad ua^2y_1+vb^2x_1=U\lambda a^2y_1+V\lambda b^2x_1.$$
$$(7)\qquad a^2u+x_1=\lambda x_1-a^2U\lambda,$$
$$(8)\qquad b^2v+y_1=\lambda y_1-b^2V\lambda.$$

Ces cinq relations doivent donner λ, u, v, U et V.

De (4) et (5) on tire

$$(9)\qquad u=\frac{\lambda Ux_1-1}{x_1},\qquad v=\frac{\lambda Vy_1-\lambda}{y_1}.$$

En portant ces valeurs dans (6), les quantités U et V disparaissent, et l'on trouve

$$(10)\qquad \lambda=-\frac{a^2y_1^2}{b^2x_1^2}.$$

Si l'on porte les valeurs (9) dans (7) et (8), en tenant compte de (10) et de (1), on trouve

$$U=0,\qquad V=\frac{1}{y_1}.$$

Donc

$$u=-\frac{1}{x_1},\qquad v=0.$$

En portant ces valeurs, soit dans (2), soit dans (3), l'équation de la conique passant par les cinq points P, P', Q, Q' et O se réduit à

$$(11)\qquad xy-xy_1+yx_1=0.$$

C'est bien une hyperbole tangente à l'origine à MM', dont le centre a pour coordonnées

$$x = -x_1, \qquad y = y_1.$$

C'est le second point de rencontre avec l'ellipse de la parallèle à AA' menée par le point M.

Les asymptotes de l'hyperbole (11) sont parallèles à AA' et BB'.

Remarques. — On voit aisément que l'enveloppe de l'hyperbole (11), lorsque le point M se déplace sur l'ellipse, est la quartique

$$x^2y^2 - a^2y^2 - b^2x^2 = 0,$$

connue sous le nom de *Kreuzcurve*.

Question 1555.

D'un point P *pris sur une strophoïde droite, on mène deux tangentes à la courbe; soient* T *et* T' *les points de contact. L'enveloppe de la corde* TT' *est une parabole ayant même sommet que la strophoïde, et dont le foyer est le symétrique du point double par rapport à ce sommet commun.* (FAUQUEMBERGUE.)

SOLUTION

Par M. E.-N. BARISIEN.

Si l'on prend pour axes de coordonnées l'axe de symétrie de la courbe, et sa perpendiculaire menée par le point double, l'équation de la strophoïde droite est

$$y = x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

En posant $y = tx$, on aura

$$x = \frac{a(t^2-1)}{t^2+1}, \qquad y = \frac{at(t^2-1)}{t^2+1}.$$

C'est l'équation de la strophoïde sous la forme de courbe unicursale.

L'équation de la tangente à la strophoïde au point de paramètre t est

$$\frac{X - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y - y}{\frac{dy}{dt}}.$$

Or

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4at}{(t^2+1)^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{a(t^4+4t^2-1)}{(t^2+1)^2}.$$

Par suite, l'équation de la tangente devient, après avoir supprimé le facteur (t^2+1),

$$(1) \qquad X(t^4+4t^2-1) - 4tY - a(t^2-1)^2 = 0.$$

D'autre part, cette équation représente aussi les quatre valeurs t des tangentes issues d'un point (X, Y). Si ce point est sur la courbe, on a

$$X = \frac{a(m^2-1)}{m^2+1}, \qquad Y = \frac{am(m^2-1)}{m^2+1}.$$

En portant ces valeurs de X et Y dans (1), on obtient l'équation suivante en t,

$$t^4 - t^2(3m^2-1) + 2tm(m^2-1) + m^2 = 0.$$

Or, cette équation doit admettre deux fois la racine $t = m$. Le premier membre de cette équation est donc divisible par $(t^2 - 2tm + m^2)$. En effectuant la division, on trouve pour quotient

$$t^2 + 2tm + 1 = 0.$$

Si donc t_1 et t_2 sont les valeurs de t relatives aux points T et T', on a

$$(2) \qquad t_1 + t_2 = -2m, \qquad t_1 t_2 = 1.$$

L'équation de la droite TT' est donc

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \dfrac{a(t_1^2-1)}{t_1^2+1} & \dfrac{at_1(t_1^2-1)}{t_1^2+1} & 1 \\ \dfrac{a(t_2^2-1)}{t_2^2+1} & \dfrac{at_2(t_2^2-1)}{t_2^2+1} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant cette équation et supprimant le facteur

$(t_1 - t_2)$, il vient

$$x(t_1^2 t_2^2 + 2t_1 t_2 + t_1^2 + t_2^2 - 1)$$
$$- 2y(t_1 + t_2) - a(t_1^2 t_2^2 - t_1^2 - t_2^2 + 1) = 0,$$

et, en tenant compte des relations (2),

$$(3) \qquad m^2 x + my - a(1 - m^2) = 0.$$

Cette droite a m pour paramètre variable : elle peut s'écrire

$$m^2(x + a) + my - a = 0.$$

L'équation de l'enveloppe TT' est, par suite,

$$y^2 + 4a(x + a) = 0.$$

C'est la parabole définie par l'énoncé.

Remarques. — 1° D'après (3), on voit que la droite TT' et la droite joignant le point double au point P sont également inclinées sur l'axe de la strophoïde.

2° Il est facile de voir que les abscisses de T et T' sont égales et de signes contraires : par conséquent le milieu de TT' parcourt la perpendiculaire à l'axe élevée au point de rebroussement.

Question 1573.

D'un point M *du plan d'une ellipse, on mène à cette courbe les quatre normales* MN_1, MN_2, MN_3, MN_4 *et les deux tangentes* MT_1 *et* MT_2; *trouver le lieu du point tel que l'expression*

$$\frac{MN_1 . MN_2 . MN_3 . MN_4}{MT_1 . MT_2}$$

ait une valeur constante donnée l^2. (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. L. Bosi,

Professeur à Teramo (Italie).

Soit

$$(1) \qquad F(x, y) = b^2 x^2 + a^2 y_2 - a^2 b^2 = 0$$

l'équation de l'ellipse et désignons par ξ, η les coordonnées de M, par x_1, y_1; x_2, y_2: x_3, y_3; x_4, y_4 celles de N_1, N_2, N_3, N_4 et par X_1, Y_1; X_2, Y_2 celles de T_1, T_2.

Le système des équations (1) et

$$(2) \qquad (\xi - x)a^2 y - (\eta - y)b^2 x = 0$$

donne les coordonnées de N_1, N_2, N_3, N_4, et en éliminant y entre ces équations on obtient

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) = x^4 - \frac{2a^2\xi}{c^2}x^3 \\ + \frac{a^2}{c^4}(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - c^4)x^3 + \frac{2a^4\xi}{c^2}x - \frac{a^6\xi^2}{c^4} = 0, \end{aligned} \right.$$

où

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Or on a

$$\overline{MN}_i^2 = (\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

et en substituant $\eta - y_i$ au moyen de (2), puis y_i^2 au moyen de (1),

$$\overline{MN}_i^2 = \frac{c^2(\xi - x_i)^2\left(\dfrac{a^2}{c} - x_i\right)\left(\dfrac{a^2}{c} + x_i\right)}{b^2 x_i^2}.$$

Donc

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &(MN_1.MN_2.MN_3.MN_4)^2 \\ &= \frac{\left\{ \begin{aligned} &c^8(\xi - x_1)^2(\xi - x_2)^2(\xi - x_3)^2(\xi - x_4)^2\left(\frac{a^2}{c} - x_1\right)\left(\frac{a^2}{c} - x_2\right) \\ &\times\left(\frac{a^2}{c} - x_3\right)\left(\frac{a^2}{c} - x_4\right)\left(\frac{a^2}{c} + x_1\right)\left(\frac{a^2}{c} + x_2\right)\left(\frac{a^2}{c} + x_3\right)\left(\frac{a^2}{c} + x_4\right) \end{aligned} \right\}}{b^8 x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2} \\ &= \frac{c^8\,\overline{f(\xi)}^2 f\left(\dfrac{a^2}{c}\right) f\left(-\dfrac{a^2}{c}\right)}{b^8 x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2}. \end{aligned} \right.$$

Mais de (3) on tire

$$f(\xi) = \frac{b^2\xi^2}{c^4}F(\xi, \eta),$$

$$f\left(\frac{a^2}{c}\right) = \frac{a^6 b^2}{c^6}(\xi^2 + \eta^2 + c^2 - 2c\xi),$$

$$f\left(-\frac{a^2}{c}\right) = \frac{a^6 b^2}{c^6}(\xi^2 + \eta^2 + c^2 + 2c\xi),$$

$$x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 = \frac{a^{12}\xi^4}{c^8},$$

et en substituant dans (4) on obtient

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}&(\mathrm{MN}_1.\mathrm{MN}_2.\mathrm{MN}_3.\mathrm{MN}_4)^2\\&\quad=\frac{\overline{\mathrm{F}(\xi,\eta)}^2(\xi^2+\eta^2+c^2-2c\xi)(\xi^2+\eta^2+c^2+2c\xi)}{c^4}.\end{aligned}\right.$$

Les coordonnées de T_1, T_2 sont données par le système des équations (1) et

$$(6)\qquad b^2\xi x+a^2\eta y-a^2b^2=0;$$

en retranchant membre à membre (1) de (6), on a

$$(7)\qquad (\xi-x)b^2x+(\eta-y)a^2y=0,$$

et en éliminant y entre (1) et (6)

$$(8)\qquad \varphi(x)=x^2-\frac{2a^2b^2\xi}{b^2\xi^2+a^2\eta^2}x+\frac{a^4(b^2-\eta^2)}{b^2\xi^2+a^2\eta^2}=0.$$

Or on a

$$\overline{\mathrm{MT}}_i^2=(\xi-\mathrm{X}_i)^2+(\eta-\mathrm{Y}_i)^2\qquad(i=1,2),$$

et en substituant $\eta-\mathrm{Y}_i$ au moyen de (7), puis Y_i^2 au moyen de (1),

$$\overline{\mathrm{MT}}_i^2=\frac{c^2(\xi-\mathrm{X}_i)^2\left(\frac{a^2}{c}-\mathrm{X}_i\right)\left(\frac{a^2}{c}+\mathrm{X}_i\right)}{a^2(a-\mathrm{X}_i)(a+\mathrm{X}_i)}.$$

Donc

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}&(\mathrm{MT}_1.\mathrm{MT}_2)^2\\&\quad=\frac{c^4(\xi-\mathrm{X}_1)^2(\xi-\mathrm{X}_2)^2\left(\frac{a^2}{c}-\mathrm{X}_1\right)\left(\frac{a^2}{c}-\mathrm{X}_2\right)\left(\frac{a^2}{c}+\mathrm{X}_1\right)\left(\frac{a^2}{c}+\mathrm{X}_2\right)}{a^4(a-\mathrm{X}_1)(a-\mathrm{X}_2)(a+\mathrm{X}_1)(a+\mathrm{X}_2)}\\&\quad=\frac{c^4\,\overline{\varphi(\xi)}^2\,\varphi\left(\frac{a^2}{c}\right)\varphi\left(-\frac{a^2}{c}\right)}{a^4\varphi(a)\varphi(-a)}.\end{aligned}\right.$$

Mais de (8) on tire

$$\varphi(\xi)=\frac{(\xi^2-a^2)\,\mathrm{F}(\xi,\eta)}{a^2\eta^2+b^2\xi^2},$$

$$\varphi\left(\frac{a^2}{c}\right)=\frac{a^4b^2(\xi^2+\eta^2+c^2-2c\xi)}{c^2(a^2\eta^2+b^2\xi^2)},$$

$$\varphi\left(-\frac{a^2}{c}\right)=\frac{a^4b^2(\xi^2+\eta^2+c^2+2c\xi)}{c^2(a^2\eta^2+b^2\xi^2)},$$

$$\varphi(a) = \frac{a^2 b^2 (\xi - a)^2}{a^2 \eta^2 + b^2 \xi^2},$$

$$\varphi(-a) = \frac{a^2 b^2 (\xi + a)^2}{a^2 \eta^2 + b^2 \xi^2},$$

et en substituant dans (9) on obtient

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &(\mathrm{MT}_1.\mathrm{MT}_2)^2 \\ &\quad = \frac{\mathrm{F}(\xi, \eta)(\xi^2 + \eta^2 + c^2 - 2c\xi)(\xi^2 + \eta^2 + c^2 + 2c\xi)}{(a^2\eta^2 + b^2\xi^2)^2}. \end{aligned} \right.$$

Enfin de (5) et (10) on déduit

$$\left(\frac{\mathrm{MN}_1.\mathrm{MN}_2.\mathrm{MN}_3.\mathrm{MN}_4}{\mathrm{MT}_1.\mathrm{MT}_2}\right)^2 = \frac{(a^2\eta^2 + b^2\xi^2)^2}{c^4},$$

d'où il résulte que le lieu demandé a pour équation

$$b^2\xi^2 + a^2\eta^2 = \pm c^2 l^2.$$

Ce lieu se compose d'une ellipse imaginaire et d'une réelle qui sont concentriques, semblables et semblablement situées par rapport à l'ellipse donnée : il ne change pas si, au lieu de (1), on considère une ellipse concentrique, semblable et semblablement située.

Si la conique donnée est une hyperbole

$$(11)\qquad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

le lieu de M a pour équation

$$b^2\xi^2 - a^2\eta^2 = \pm c^2 l^2,$$

où

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Ce lieu se compose de deux hyperboles qui ont mêmes asymptotes que l'hyperbole donnée : il ne change pas si, au lieu de (11), on considère une hyperbole ayant mêmes asymptotes.

Question 1597.

Pierre tire quatre cartes d'un jeu de piquet; il donne les trois premières à Paul et garde la quatrième pour lui. Pierre a gagné si sa carte n'est de la couleur d'aucune des cartes de Paul, ou si, étant de la couleur de l'une ou de *plusieurs d'entre elles, elle a une valeur supérieure. La mise de Paul étant de* 1fr, *quelle doit être celle de Pierre pour que le jeu soit équitable?* (E. Rouché.)

SOLUTION

Par M. Audibert.

Soient m, n, p, q les probabilités pour que Paul ait reçu 0, 1, 2, 3 cartes de même couleur que celle que Pierre a gardée. Dans le premier cas ce dernier est sûr de gagner, dans le second il a pour lui une chance sur deux, une sur trois dans le troisième, et une sur quatre dans le dernier. Sa probabilité totale de gain

$$\mathrm{P} = \frac{m}{1} + \frac{n}{2} + \frac{p}{3} + \frac{q}{3}.$$

Au lieu de supposer que Pierre donne à Paul trois cartes sur les quatre qu'il a prélevées dans le jeu de piquet, nous n'altérerons en rien les chances respectives des deux joueurs, si nous modifions ainsi le jeu : Pierre prélèvera d'abord une carte dans le jeu complet; Paul, après lui, en prendra trois sur les trente et une qui restent.

Le nombre total de jeux différents de trois cartes qu'il pourra former est $\frac{31.30.29}{1.2.3} = \mathrm{R}$: c'est le dénominateur commun aux quatre fractions m, n, p et q. Pour calculer les numérateurs, divisons les 31 cartes en deux groupes, le premier de 24 de couleurs différentes, l'autre de 7 de même couleur que celle de Pierre.

Tous les jeux de Paul qui ne contiennent pas de cartes de la couleur de celle de Pierre se formeront avec le premier groupe, et de $\frac{24.23.22}{1.2.3}$ manières différentes.

Ceux qui n'en ont qu'une seule résulteront de l'association de chaque combinaison de deux objets du premier groupe avec un du second; on en pourra constituer $\frac{24.23}{1.2}7$.

Pour avoir tous ceux qui en renferment deux, on joindra à chacun des 24 objets du premier groupe une combinaison de deux du second; il y en aura $24\frac{7.6}{1.2}$.

Enfin ceux qui en auront trois proviendront exclusivement des combinaisons trois à trois des objets du second groupe qui sont au nombre de $\frac{7.6.5}{1.2.3}$. On conclut de là que

$$m = \frac{24.23.22}{1.2.3.R}, \quad n = \frac{24.23.7}{1.2.R}, \quad p = \frac{24.7.6}{1.2.R}, \quad q = \frac{7.6.5}{1.2.3.R}$$

et l'on vérifie que $m + n + p + q = 1$.

Le calcul numérique donne $P = 0.7045$. A ce compte la mise de Pierre devrait être de $2^{\text{fr}}, 38$.

Question 1636.

Étant données deux cubiques C *et* C′ *dont les équations en coordonnées polaires sont*

$$(C) \qquad r = \frac{a\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}{\cos\theta},$$

$$(C') \qquad r = \frac{a'\cos^2\theta + b'^2\sin^2\theta}{\cos\theta},$$

et dont le pôle est en O, *montrer que si une droite quelconque rencontre la cubique* (C) *en* A, B, C, *et la cubique* C′ *en* A′, B′, C′, *on a la relation*

$$\frac{OA.OB.OC}{OA'.OB'.OC'} = \frac{a-b}{a'-b'}.$$ (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. J. Destoux.

Mettons l'équation de la droite sous la forme

$$r(A\cos\theta + \sin\theta) + C = 0;$$

ce qui donne, en élevant au carré et remplaçant $\sin^2\theta$ par $1 - \cos^2\theta$,

$$(1) \qquad (A^2+1)r^2\cos^2\theta + 2ACr\cos\theta + C^2 - r^2 = 0.$$

L'équation de la cubique (C) peut s'écrire

$$(2) \qquad (a-b)\cos^2\theta - r\cos\theta + b = 0.$$

Éliminons maintenant $\cos\theta$ entre ces deux équations, ce qui peut se faire en égalant les deux valeurs de $\cos^2\theta$ qu'on peut tirer des équations précédentes; on obtient une équation du troisième degré en r^2; le coefficient de r^6 est

$$(A^2+1),$$

et le terme indépendant de r^2 est

$$-2(a-b)^2(1-C^2)^2,$$

d'où

$$\overline{OA}^2.\overline{OB}^2.\overline{OC}^2 = \frac{2(a-b)^2(1-C^2)^2}{A^2+1}.$$

On trouve de même

$$\overline{OA'}^2.\overline{OB'}^2.\overline{OC'}^2 = \frac{2(a'-b')^2(1-C^2)^2}{A^2+1}.$$

On a donc

$$\frac{\overline{OA}^2.\overline{OB}^2.\overline{OC}^2}{\overline{OA'}^2.\overline{OB'}^2.\overline{OC'}^2} = \frac{(a-b)^2}{(a'-b')^2}.$$

N. B. — M. A. Droz Farny, de Porrentruy, a résolu cette question et la question 1637.

Question 1651 (1).

SOLUTION

Par M. Audibert.

Considérons le groupe-type des deux permutations à la fois symétriques et inverses l'une de l'autre

$$\begin{array}{ll|ll} 1\ldots\ldots\ldots & n & n+1\ldots & 2n \\ 2n\ldots\ldots & n+1 & n\ldots\ldots\ldots & 1 \end{array}$$

Ce groupe est divisé en deux Tableaux par une droite.

Supposons invariables les colonnes formées de deux nombres superposés; en les permutant entre elles dans le Tableau de droite, par exemple, nous obtiendrons les permutations spéciales dont il s'agit, si, en même temps, nous déplaçons les colonnes de gauche primitivement symétriques des premières, par rapport à la droite, de telle sorte qu'après ce changement méthodique la symétrie subsiste encore.

(1) *Voir* p. 1* du présent Volume.

Nous obtiendrons ainsi $n\,!$ permutations spéciales.

Faisons ensuite passer dans le groupe-type *une* des colonnes de droite dans le Tableau de gauche à la place de sa symétrique qui viendra la remplacer à droite. Nous constituerons ainsi un nouveau groupe secondaire qui ne différera du groupe-type que par l'interchange d'une colonne dans chaque Tableau.

En le permutant méthodiquement, il donnera $n\,!$ permutations spéciales. Or il est clair que nous pouvons constituer n groupes secondaires de ce genre, dont l'ensemble nous fournira $n.n\,!$ permutations spéciales.

Prenons ensuite dans le groupe-type, et de toutes les manières possibles, à la fois deux colonnes à droite venant remplacer leurs symétriques dans le Tableau de gauche, nous obtiendrons $\frac{n(n-1)}{1.2}$ groupes secondaires dérivés chacun du groupe-type, dont l'ensemble nous donnera

$$\frac{n(n-1)}{1.2}\,n\,!$$

permutations spéciales.

En transposant de la même manière trois colonnes à la fois de droite à gauche et permutant méthodiquement les $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ groupes secondaires résultant, nous formerons encore

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,n\,!$$

permutations spéciales, et ainsi de suite.

Finalement, le nombre de ces permutations formées sera

$$n\,!\left[1+\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-1)}{1.2.3}+\ldots+\frac{n}{1}+1\right]$$
$$= n\,!.2^n = 2.4.6\ldots 2n.$$

Toutes ces permutations seront distinctes, car elles proviennent de groupes différents ou de permutations d'un même groupe. Une permutation spéciale étant donnée, la nature des n nombres de droite, par exemple, fera reconnaître à quel groupe elle appartient et la permutation méthodique de ce groupe la reproduira.

La probabilité cherchée sera donc

$$\frac{2.4.6\ldots 2n}{2n!} = \frac{1}{1.3.5\ldots(2n-1)}.$$

Dans le cas d'un nombre impair, $2n+1$, dans le groupe-type

$$\begin{array}{cccccc} 1\ldots\ldots\ldots & n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n+1 \\ 2n+1\ldots & n+2 & n+1 & n & \ldots & 1 \end{array}$$

la colonne médiane $\begin{matrix} n+1 \\ n+1 \end{matrix}$ n'ayant pas de symétrique demeure inamovible. Le nombre des permutations spéciales sera le même que pour le nombre pair $2n$ et la probabilité s'exprimera par la formule $\frac{1}{1.3.5\ldots(2n+1)}$.

N. B. — M. J. Destoux a aussi résolu la question.

Question 1550.

Étant donnés un cercle fixe (A) *et une droite tournant autour d'un point fixe* O, *on considère un cercle* (B) *de rayon constant tangent au cercle et à la droite; on demande le lieu du point de contact de ce cercle et de la droite.* (D'Ocagne.)

SOLUTION.

Par M. Brocard.

La question revient à chercher les intersections d'un cercle mobile par la polaire de l'origine, le centre du cercle étant supposé se mouvoir sur une circonférence donnée.

Soient donc O l'origine, A le centre de la circonférence (A), OAx l'axe des x, a la distance OA, b le rayon du cercle mobile (B), c celui du cercle fixe.

Le cercle mobile aura pour équation

$$(1)\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=b^2,$$

avec la condition

$$(2)\qquad (\alpha-a)^2+\beta^2=c^2.$$

La polaire de l'origine par rapport au cercle (B) a pour équation

$$(3) \qquad -\alpha x - \beta y + \alpha^2 + \beta^2 - b^2 = 0$$

ou

$$(4) \qquad \alpha x + \beta y + a^2 + b^2 - c^2 - 2a\alpha = 0,$$

et il reste à éliminer α et β entre les équations (1), (2) et (4). Mais les équations (1) et (3) donnent

$$x^2 + y^2 = \alpha x + \beta y.$$

On a donc, pour équation du lieu,

$$4a^2c^2y^2 = [(2a - x)(x^2+y^2) - x(a^2+b^2-c^2)]^2 \\ + (x^2+y^2-a^2+b^2-c^2)^2y^2.$$

Le lieu est une courbe du sixième degré.

Nous avons supposé le cercle (B) tangent extérieurement au cercle (C). Il resterait à le supposer tangent intérieurement au cercle (C), ce qui est toujours possible. On en conclut une autre courbe du sixième degré, correspondant à cette seconde série de circonférences.

Par suite de l'indépendance des paramètres a, b, c, les deux courbes peuvent affecter une très grande variété de tracés.

Question 1654.

On considère un triangle équilatéral ABC *et une droite* (D) *passant par le centre* O *du triangle. Par le point* A *on mène une droite* (Δ) *symétrique par rapport à la direction* (D) *de la droite perpendiculaire en* A *à* AO; *de même en* B, *on mène la droite* (Δ)' *symétrique, par rapport à la même direction* (D), *de la perpendiculaire en* B *à* BO; *on agit de même en* C *pour construire la droite* (Δ)''.

Montrer que ces trois droites (Δ), (Δ)', (Δ)'' *se rencontrent en un même point situé sur le cercle circonscrit au triangle* ABC. (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Brocard.

En d'autres termes, l'énoncé proposé revient au suivant :

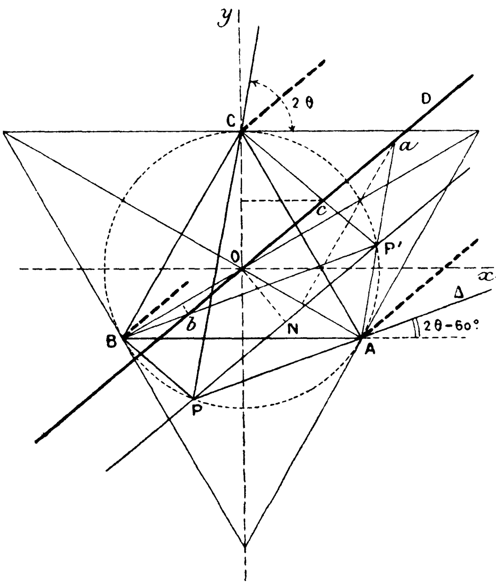
Étant donnée une droite (D) quelconque, on la prend pour base de trois triangles isoscèles ayant pour sommets A, B, C et pour un de leurs côtés la tangente AT_1 en A, BT_2 en B et CT_3 en C. Les troisièmes côtés concourent en un point M de la circonférence ABC.

En effet, soient α, β, γ les projections de A, B, C sur (D). En prenant $\alpha T'_1 = \alpha T_1$, $\beta T'_2 = \beta T_2$, $\gamma T'_3 = \gamma T_3$, les droites T'AM, BT'_2M font avec (D) des angles égaux à ceux des tangentes en A et B avec la même droite (D). Donc les droites précitées font entre elles le même angle que les tangentes, ou son supplément, c'est-à-dire 120° ou 60°. L'angle AMB est donc de 60° et, par suite, M est sur la circonférence ABC.

SOLUTION

Par M. H. Lez.

Soit O le point de rencontre des hauteurs du triangle ABC;



si l'on prend pour axe des y une des hauteurs OC et pour axe des x une parallèle au côté correspondant AB, les coordonnées des sommets seront

$$\begin{array}{lll} \text{A}, & x = h\sqrt{3}, & y = -h, \\ \text{B}, & x = -h\sqrt{3}, & y = -h, \\ \text{C}, & x = 0, & y = 2h. \end{array}$$

Soit θ l'angle que fait la droite OD avec l'axe des x, la droite Δ symétrique de la perpendiculaire en A à OA, par rapport à la direction D, fera un angle de $2\theta - 60°$ avec le même axe; elle aura pour équation

$$y + h = \operatorname{tang}(2\theta - 60°)(x - h\sqrt{3}).$$

De même, la droite de symétrie, passant par le sommet B, sera représentée par

$$y + h = \operatorname{tang}(2\theta + 60°)(x + h\sqrt{3}).$$

Quant à la droite de symétrie, passant par le sommet C, il est facile de voir qu'elle fait un angle égal à 2θ; son équation est donc

$$y - 2h = x \operatorname{tang} 2\theta.$$

Ces équations peuvent s'écrire sous la forme

$$(y + h)(1 + \sqrt{3}\operatorname{tang} 2\theta) - (x - h\sqrt{3})(\operatorname{tang} 2\theta - \sqrt{3}) = 0,$$
$$(y + h)(1 - \sqrt{3}\operatorname{tang} 2\theta) - (x + h\sqrt{3})(\operatorname{tang} 2\theta + \sqrt{3}) = 0,$$
$$y - 2h - x \operatorname{tang} 2\theta = 0.$$

Leur somme algébrique est nulle; les droites qu'elles représentent concourent donc en un point P ayant pour coordonnées

$$x = -\frac{4h \operatorname{tang} 2\theta}{1 + \operatorname{tang}^2 2\theta} = -\frac{8h\mu(1 - \mu^2)}{(1 + \mu^2)^2},$$
$$y = \frac{2h(1 - \operatorname{tang}^2 2\theta)}{(1 + \operatorname{tang}^2 2\theta)} = \frac{2h(1 + \mu^4 - 6\mu^2)}{(1 + \mu^2)^2},$$

si l'on met $\operatorname{tang} 2\theta$ en fonction de $\operatorname{tang}\theta$ et si l'on écrit $\operatorname{tang}\theta = \mu$.

Ce point P se trouve sur le cercle circonscrit

$$x^2 + y^2 = 4h^2.$$

De même, si par un sommet A, par exemple, on mène une droite symétrique de la direction D, par rapport à la perpendiculaire en A à OA, et qu'on agisse ainsi aux deux autres sommets, on trouvera trois droites concourant en un point P' symétrique de P par rapport à la droite ON menée perpendiculairement à la direction D.

En effet, si, au milieu des trois segments OA, OB, OC, on élève des perpendiculaires qui rencontrent OD en a, b, c, et si l'on joint deux à deux les points Aa, Bb, Cc, on aura les trois droites en question.

Or, les coordonnées des points de rencontre de ces perpendiculaires avec $y = \mu x$ sont

$$a, \quad x = \frac{2h}{\sqrt{3}-\mu}, \quad y = \frac{2h\mu}{\sqrt{3}-\mu},$$
$$b, \quad x = -\frac{2h}{\sqrt{3}+\mu}, \quad y = -\frac{2h\mu}{\sqrt{3}+\mu},$$
$$c, \quad x = \frac{h}{\mu}, \quad y = h.$$

Par suite, les droites Aa, Bb, Cc sont représentées par

$$x(\sqrt{3}+\mu) + y(1-\mu\sqrt{3}) - 2h(1+\mu\sqrt{3}) = 0,$$
$$x(\sqrt{3}-\mu) - y(1+\mu\sqrt{3}) + 2h(1-\mu\sqrt{3}) = 0,$$
$$x\mu + y - 2h = 0.$$

Mais la somme algébrique de ces trois équations étant nulle, les droites qu'elles représentent concourent en un point P' dont les coordonnées sont

$$x = \frac{4h\mu}{1+\mu^2}, \qquad y = \frac{2h(1-\mu^2)}{1+\mu^2}.$$

Ce point est aussi sur le cercle circonscrit $x^2 + y^2 = 4h^2$, ainsi qu'il est facile de le vérifier.

Maintenant si l'on joint les points P, P', on trouve, après réduction, pour l'équation de la droite PP',

$$(y - \mu x)(1+\mu^2) + 2h(3\mu^2 - 1) = 0;$$

cette droite est donc parallèle à OD.

Elle coupe la perpendiculaire ON, ou $\mu y + x = 0$, en un point N ayant pour coordonnées

$$x = \frac{2h\mu(3\mu^2 - 1)}{(1+\mu^2)^2}, \qquad y = \frac{-2h(3\mu^2 - 1)}{(1+\mu^2)^2};$$

ce point est le milieu de PP'.

Les points P et P' sont donc symétriques par rapport à la perpendiculaire ON.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE,

Par M. A. Droz-Farny.

On sait que les trois symétriques relativement aux côtés d'un triangle d'une droite quelconque (D)' menée par l'orthocentre de ce triangle concourent en un même point P de la circonférence circonscrite au triangle. La droite de Simson de ce point P' relativement au triangle est parallèle à (D)'.

Cela posé, la perpendiculaire sur OA en son point milieu coupe (D) au point α; $A\alpha$ sera la droite (Δ). Supposons que $A\alpha$ rencontre la circonférence pour la deuxième fois en P et soit A' le point diamétralement opposé de A. PA' coupe BC en α' et soit tiré $O\alpha'$.

On a

$$\text{angle } \alpha AO = AO\alpha,$$
$$\text{angle } OA'\alpha' = A'O\alpha',$$

donc

$$\alpha AO + OA'\alpha' = AO\alpha + A'O\alpha' = 90^\circ,$$

donc

$$\text{angle } \alpha O\alpha' = 90^\circ.$$

La droite $O\alpha' = $ (D)' étant perpendiculaire sur (D) est donc fixe et PA' est la symétrique de (D)' par rapport au côté BC. On a donc le théorème plus complet :

Les trois droites (Δ), $(\Delta)'$, $(\Delta)''$, *ainsi que les trois symétriques relativement aux côtés de la droite* (D)' *concourent en un même point* P *de la circonférence circonscrite au triangle. Ce point* P *est tel que sa droite de Simson, relativement au triangle, est parallèle à* (D)' *ou perpendiculaire à* (D).

N. B. — M. J. Destoux a résolu la question analytiquement et géométriquement.

MM. J. Destoux, E. Grossetête, E. Barisien, A. Droz-Farny, Audibert, Cl. Servais, W.-J. Greenstreet, ont aussi résolu la question 1453.

Question 353.

Soit ABCD *un quadrilatère coupé par une transversale en* α *sur le côté* AB *et en* β *sur le côté opposé* CD; *soient* α' *le conjugué harmonique de* α *par rapport aux points* A, B *et* β' *le conjugué harmonique de* β *par rapport aux points* C, D; *menons la droite* $\alpha'\beta'$, *faisons une construction analogue sur les côtés opposés* AC, BD *et sur les diagonales* AD, BC; *les trois droites passent par le même point.*

(De Laffitte.)

SOLUTION

Par M. Moret-Blanc.

Faisons une perspective de la figure sur un plan parallèle à celui déterminé par le point de vue et la transversale, qui sera ainsi transportée à l'infini. Au quadrilatère ABCD correspondra un quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$, et aux trois droites du théorème les droites qui joignent les milieux des côtés opposés et les milieux des diagonales du quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$; or on sait que celles-ci concourent en un même point, centre de gravité de quatre masses égales placées aux quatre sommets du quadrilatère; donc les droites $\alpha'\beta'$, etc., dont elles sont la perspective, concourent en un même point.

Question 372.

Un triangle ayant pour sommets les deux foyers d'une conique et le troisième sommet sur la circonférence de la conique, trouver les lieux géométriques des trois points suivants : le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité, le point de rencontre des trois hauteurs, et déterminer le degré de l'enveloppe de la droite qui renferme ces trois points.

SOLUTION

Par M. H. Brocard.

Supposons que la conique soit une ellipse rapportée à son centre et à ses axes.

1° Le lieu du centre du cercle circonscrit est évidemment l'axe des y,

$$x = 0.$$

2° Le centre de gravité est au tiers de la médiane formée par chaque rayon de l'ellipse. Le lieu de ce point a donc pour équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = \frac{a^2b^2}{9}.$$

3° Soient (α, β) les coordonnées d'un point de l'ellipse. L'une des hauteurs a pour équation

$$x = \alpha;$$

l'autre a pour équation

$$y = \frac{c-\alpha}{\beta}(x+c),$$

avec la condition

$$a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 = a^2b^2.$$

L'élimination de α et de β donne

$$a^2(c^2 - x^2)^2 + b^2x^2y^2 = a^2b^2y^2.$$

4° L'enveloppe de la droite qui joint ces trois points admet l'origine pour centre, les deux axes Ox et Oy pour axes de symétrie; elle a deux points de rebroussement sur Oy, et, sur Ox, deux sommets et deux points doubles. La courbe en question est donc au moins du sixième degré.

Question 14.

Quel est le minimum du rapport du rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre au rayon de la sphère inscrite?

SOLUTION

Par M. Moret-Blanc.

Lemme I. — *Le tétraèdre maximum inscrit dans une sphère est le tétraèdre régulier.*

Car l'une quelconque de ses faces, prise comme base, doit être le triangle maximum inscrit dans un cercle et, par conséquent, un triangle équilatéral.

Corollaire. — Le rapport du volume de la sphère circonscrite à un tétraèdre au volume du tétraèdre est minimum quand le tétraèdre est régulier.

LEMME II. — *De tous les tétraèdres de base équivalente et de même hauteur, celui dont la surface est minimum est le tétraèdre dont le pied de la hauteur est le centre du cercle inscrit dans la base.*

Soient a, b, c les trois côtés de la base, B sa surface, h la hauteur du tétraèdre; α, β, γ les distances du pied de la hauteur aux côtés a, b, c et S la surface latérale du tétraèdre.

On a

$$(1)\qquad a\alpha + b\beta + c\gamma = 2\mathrm{B},$$

$$(2)\qquad a\sqrt{h^2+\alpha^2} + b\sqrt{h^2+\beta^2} + c\sqrt{h^2+\gamma^2} = 2\mathrm{S}.$$

S n'a évidemment pas de maximum; pour que cette surface soit minimum, il faut que la dérivée par rapport à chacune des variables indépendantes α et β, dont γ est fonction en vertu de l'équation (1), soit nulle.

Il vient, en remarquant que $\gamma'_\alpha = -\frac{a}{c}$, $\gamma'_\beta = -\frac{b}{c}$,

$$\frac{\alpha}{\sqrt{h^2+\alpha^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{h^2+\beta^2}} = \frac{\gamma}{\sqrt{h^2+\gamma^2}},$$

ce qui exige que l'on ait $\alpha = \beta = \gamma$.

Corollaire. — De tous les tétraèdres de même volume celui dont la surface est minimum est tel que chaque hauteur tombe au centre du cercle inscrit dans la face opposée, d'où résulte l'égalité des angles dièdres et, par suite, celle des angles trièdres : c'est donc le tétraèdre régulier.

V étant le volume d'un tétraèdre, S sa surface, r le rayon de la sphère inscrite, on a $3\mathrm{V} = r\mathrm{S}$; donc, le volume restant constant, le rayon de la sphère inscrite sera maximum quand la surface sera minimum, et par conséquent :

Le rapport du volume d'un tétraèdre à celui de la sphère inscrite est minimum quand le tétraèdre est régulier.

En rapprochant ce théorème du corollaire du lemme I, on en conclut que :

Le minimum du rapport du volume de la sphère circon-

scrite à un tétraèdre au volume de la sphère inscrite, ou le rapport de leurs rayons, est minimum quand le tétraèdre est régulier. Ce dernier rapport est alors égal à 3.

Question 22.

Les polynomes $V_1, V_2, \ldots, V_m$ *de Sturm s'expriment en fonction des racines* $a, b, c, \ldots, h$ *de* $V = 0$ *d'après la règle suivante :*

La dérivée V_1 *est la somme des produits* $m-1$ *à* $m-1$ *des facteurs* $(x-a), (x-b), \ldots$

$$V_1 = \Sigma(x-b)(x-c)\ldots(x-h).$$

Pour obtenir V_2, *on multipliera chacun des produits* $m-2$ *à* $m-2$ *des facteurs simples par le carré de la différence des racines qui n'entrent pas dans le produit considéré; la somme de ces derniers produits multipliée elle-même par un facteur positif indépendant de* x *donnera* V_2, *c'est-à-dire que*

$$V_2 = \alpha\Sigma(a-b)^2(x-c)(x-d)\ldots(x-h), \qquad \alpha > 0.$$

On a de même

$$V_3 = \beta\Sigma(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2(x-d)\ldots(x-h) \qquad \beta > 0,$$
$$V_4 = \gamma\Sigma(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2 \times (b-d)^2(c-d)^2(x-e)\ldots(x-h) \qquad \gamma > 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots,$$
$$V_m = \lambda\Sigma(a-b)^2(a-c)^2\ldots(a-h)^2\ldots(g-h)^2 \qquad \lambda > 0.$$

(SYLVESTER.)

SOLUTION

Par M. MORET-BLANC.

V et V_1 sont des fonctions symétriques des racines et des facteurs simples qui leur correspondent, qui s'annulent pour la valeur d'une racine donnée à x, chaque fois que cette racine est égale à une autre; il doit en être de même de toutes les fonctions suivantes, en vertu de la relation qui lie trois fonctions consécutives.

Or V_2 est un polynome de degré $m-2$, où les racines et les facteurs simples $(x-a), \ldots$ doivent entrer symétriquement et qui doit s'annuler lorsque deux quelconques des racines de l'équation sont égales et que l'on donne à x la valeur de l'une de ces racines; il doit donc être la somme des produits $m-2$ à $m-2$ des facteurs simples multipliés chacun par une fonction symétrique des deux racines dont les facteurs simples correspondants n'y entrent pas et qui s'annule lorsque ces racines sont égales : c'est donc le carré de leur différence (la simple différence ne serait pas symétrique). La somme de ces produits peut d'ailleurs être multipliée par un facteur constant et indépendant des racines. On voit même, en faisant la division, que ce facteur est égal à 1, si, pour éviter les coefficients fractionnaires, on a multiplié V par m^2.

V_3, de degré $m-3$, renferme tous les produits $m-3$ à $m-3$ des facteurs simples multipliés chacun par une fonction symétrique des racines dont les facteurs simples n'y entrent pas et qui doit être nulle lorsque deux quelconques de ces racines sont égales : c'est donc le produit des carrés de leurs différences deux à deux, la somme de ces produits étant multipliée par un facteur constant β, indépendant des racines.

On trouve de même la forme des autres fonctions.

Enfin, V_m est un nombre indépendant de x, fonction symétrique des racines, qui doit être nul lorsque deux quelconques des racines sont égales : c'est donc à un facteur indépendant près le produit des carrés des différences de l'équation $V=0$.

Les facteurs constants α, β, ... ne dépendent pas de la nature des racines: or, lorsque toutes les racines sont réelles, la suite des fonctions doit être complète, et les coefficients de leurs premiers termes ne doivent présenter que des permanences; ils sont donc alors tous positifs, ce qui exige que les facteurs α, β, ..., λ soient tous plus grands que zéro.

Question 51.

Soit un carré divisé par des lignes horizontales et verticales en n^2 petits carrés ayant chacun deux unités pour côté. Prenons deux côtés adjacents du grand carré pour axes coordonnés. Les coordonnées du centre d'un petit carré sont exprimées par des nombres entiers impairs et les coordonnées des sommets par des nombres entiers pairs. Désignons par (h, v) le centre d'un petit carré ayant h pour abscisse horizontale et v pour ordonnée verticale. Faisant passer une droite par (h, v) et (h', v'), quels sont les carrés *que cette droite traversera, et quels sont les centres et les sommets des carrés situés sur cette droite ? Étant données les équations de deux droites passant chacune par deux centres, quelles relations doivent exister entre les coordonnées des quatre centres : 1° pour que les deux droites soient parallèles; 2° pour qu'elles se coupent à angle droit; 3° pour que le point d'intersection soit le sommet d'un cinquième carré ?*

SOLUTION

par M. Moret-Blanc.

L'équation de la droite passant par (h, v) et (h', v') est

$$(1)\qquad (v'-v)(x-h)=(h'-h)(y-v).$$

$v'-v$ et $h'-h$ sont divisibles par 2; ils peuvent avoir d'autres facteurs communs : soient V et H les quotients de ces nombres divisés par leur plus grand commun diviseur; l'équation se réduit à

$$(1)\qquad \mathrm{V}(x-h)=\mathrm{H}(y-v).$$

Pour trouver les carrés traversés par la droite, on cherchera les points où elle coupe les horizontales : en donnant à y les valeurs 0, 2, 4, ..., $2n$, on déterminera les valeurs correspondantes de x. Si pour $y=2b$, x est compris entre $2a$ et $2a+2$, la droite traverse les carrés dont les centres sont

$$(2a+1,\ 2b-1)\quad \text{et}\quad (2a+1,\ 2b+1).$$

Pour avoir les centres et les sommets situés sur la droite, on cherchera les solutions entières de l'équation (1). Elle est vérifiée par $x=h$, $y=v$; les autres solutions sont, comme on sait,

$$x=h+\mathrm{H}t,\qquad y=v+\mathrm{V}t.$$

On donnera à t les valeurs entières positives et négatives pour lesquelles x et y sont positifs et moindres que $2n+1$. Les valeurs impaires des x et y donneront les centres et les couples de valeurs paires, les sommets.

1° Soit

$$(2)\qquad (v'_1-v_1)(x-h_1)=(h'_1-h_1)(y-v_1)$$

l'équation d'une autre droite passant par les centres (h_1, v_1) et (h'_1, v'_1). La condition pour que les deux droites soient parallèles est

$$\frac{v'-v}{h'-h}=\frac{v'_1-v_1}{h'_1-h_1}$$

ou

$$(v'-v)(h'_1-h_1)=(h'-h)(v'_1-v_1).$$

Si le centre (h_1, v_1) est seul donné, on déterminera (h'_1, v'_1) en cherchant, comme pour l'équation (1), les solutions entières impaires de cette équation

$$h'_1=h_1+\mathrm{H}t, \qquad v'_1=v_1+\mathrm{V}t;$$

il suffira d'une solution en nombres entiers impairs.

2° La condition pour que les droites (1) et (2) soient rectangulaires est

$$(v'-v)(v'_1-v_1)+(h'-h)(h'_1-h_1)=0,$$

ou

$$\mathrm{V}(v'_1-v_1)+\mathrm{H}(h'_1-h_1)=0.$$

Si (h_1, v_1) est seul donné,

$$h'_1=h_1+\mathrm{V}t, \qquad v'_1=v_1-\mathrm{H} .$$

3° Des équations (1) et (2), on tire

$$x=\frac{(h'_1-h_1)(hv'-vh')-(h'-h)(h_1v'_1-v_1h'_1)}{(v'-v)(h'_1-h_1)-(h'-h)(v'_1-v_1)},$$

$$y=\frac{(v'_1-v)(hv'-vh')-(v'-v)(h_1v'_1-v_1h'_1)}{(v'-v)(h'_1-h_1)-(h'-h)(v'_1-v_1)}.$$

Pour que le point d'intersection des deux droites soit le sommet d'un cinquième carré, il faut que chacune de ces expressions soit un nombre entier pair.

Pour que ce soit le centre d'un cinquième carré, chacune devra être un nombre entier impair.

Question 54.

Trouver l'équation d'une surface algébrique sur laquelle on ne puisse tracer qu'une seule et unique circonférence.

SOLUTION

par M. Moret-Blanc.

On trouvera des surfaces susceptibles de remplir cette condition dans les deux équations générales suivantes :

$$a^n(x^2+y^2)+z^n x^2 = a^n b^2,$$
$$a^n(x^2+y^2)+z^n xy = a^n b^2.$$

En faisant $z=0$, on a le cercle

$$x^2+y^2=b^2.$$

Les cas les plus simples sont ceux où $n=1$: on a deux surfaces du troisième ordre

$$(1)\quad a(x^2+y^2)+zx^2=ab^2, \qquad a(x^2+y^2)+zxy=ab^2.$$

Pour démontrer qu'elles ne peuvent être coupées suivant un cercle que par le plan des xy, on y substituera pour z une expression de la forme $mx+ny+z$; le résultat de la substitution donnera l'équation de la projection horizontale (1) faite dans la surface par le plan

$$z=mx+ny+r.$$

On aura pour la première équation

$$(2)\qquad ay^2+nx^2y+mx^3+(r+a)x^2-ab^2=0.$$

Pour que cette équation donne celle d'une courbe du second degré, il faut qu'elle représente le système d'une droite et d'une conique, ou qu'elle se réduise au second degré par l'évanouissement des coefficients des termes du troisième degré.

Pour reconnaître le premier cas, représentons par $y=px+q$ l'équation de la droite. Divisant le premier membre par $y-px-q$, on a pour quotient

$$ay+nx^2+apx+aq,$$

et pour reste

$$(m+np)x^3+[a(1+p^2)+nq+r]x^2+2apq\,x+a(q^2-b^2).$$

---

(1) Je suppose le plan des xy horizontal.

Cette expression devant s'évanouir quel que soit x, on a

$$m+np=0,\quad a(1+p^2)+nq+r=0,\quad pq=0,\quad q^2-b^2=0,$$

d'où

$$q=\pm b,\quad p=0,\quad m=0,\quad r=-a\mp nb.$$

On voit que le plan $z=ny-a\mp nb$ coupera la surface suivant une droite dont les équations sont

$$z=ny-a\mp b,\qquad y=\pm b,$$

et une courbe du second ordre dont les équations sont celles du plan, et

$$nx^2+a(y\pm b)=0.$$

Cette équation est celle d'une parabole qui ne peut être la projection d'un cercle.

Pour que l'équation (2) représente une courbe du second degré, il faut qu'on ait

$$n=0,\qquad m=0;$$

l'équation de la projection horizontale se réduit à

$$ay^2+(r+a)x^2=ab^2,$$

et, comme le plan sécant $z=r$ est parallèle au plan de projection, il faut, pour que la courbe soit un cercle, que l'on ait

$$r=0.$$

Le plan des xy est donc le seul qui coupe la surface suivant un cercle.

On verrait qu'il en est de même pour la seconde équation.

Question 59.

Entre tous les prismes de même base et de même hauteur, c'est le prisme droit qui a la plus petite aire.

SOLUTION

Par M. Moret-Blanc.

Car c'est celui dont les parallélogrammes qui forment la surface latérale ont leur hauteur minimum, en conservant la même base.

Questions 473 et 482.

1re SOLUTION

Par M. H. Brocard.

473. *Quatre génératrices d'un hyperboloïde étant données, construire le tétraèdre qui ait ces quatre droites pour hauteurs.*

Un tétraèdre peut se projeter verticalement suivant un trapèze. Il suffit pour cela de prendre pour plan vertical de projection un plan parallèle à une arête $C'D'$ (1) du tétraèdre et d'amener l'arête opposée $A'B'$, par une rotation autour de $C'D'$, à se projeter suivant une parallèle à $C'D'$. Si maintenant l'on prend pour plan horizontal de projection un plan parallèle aux deux droites CD, AB, la projection horizontale du tétraèdre sur un quadrilatère dont la diagonale CD sera parallèle à la ligne de terre.

Or, dans cette situation, les hauteurs du tétraèdre se projettent horizontalement suivant les perpendiculaires menées par les sommets A, B, C, D du quadrilatère sur les diagonales, et, verticalement. suivant deux perpendiculaires à la ligne de terre menées par A' et B', et suivant deux autres droites issues des points C' et D'.

On est donc amené à considérer la figure inverse pour trouver la solution de la question proposée. C'est ce que nous allons développer davantage.

Supposons que l'on ait choisi pour plan horizontal de projection le plan perpendiculaire à chacun des plans parallèles à deux couples de droites opposées. Cela est toujours possible; et, de la sorte, les quatre droites données A, B, C, D se projettent suivant les côtés $a(mn)$, $b(np)$, $c(pq)$, $d(qm)$ d'un parallélogramme $mnpq$. Prenons ensuite pour plan vertical de projection un plan perpendiculaire à l'une des directions des côtés du parallélogramme. Deux des droites se projetteront suivant deux parallèles $m'n'$, $q'p'$, prolongements de ces côtés, les deux autres suivant des lignes c', d', qui se rencontreront généralement en un point i'. Le tétraèdre cherché se projettera verticalement suivant un trapèze $a'b'c'd'$, et horizontalement

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

suivant un quadrilatère $abcd$. Or, si l'on déplace $c'd'$ parallèlement à elle-même, la projection cd pivote autour d'un point fixe, facile par conséquent à déterminer à l'aide d'une position quelconque de la droite cd, $c'd'$. La projection horizontale i de ce point est sur la perpendiculaire $i'i$ à la ligne de terre. Cette propriété résulte de ce que la figure représente la projection d'un paraboloïde hyperbolique sur un plan directeur. Cette projection forme, comme l'on sait, un système rayonnant. On mènera donc par le point i une droite cid limitée entre les deux parallèles c, d; elle donnera en projection verticale une droite $c'd'$ parallèle à la ligne de terre. Ce sera la longueur de l'arête CD du tétraèdre cherché.

L'arête opposée AB se projettera verticalement suivant la distance des droites parallèles a, b et horizontalement, en vraie grandeur, suivant le segment perpendiculaire à la direction c', d' intercepté entre les droites a et b.

Pour en trouver la position, il suffira de déterminer le point l où la projection horizontale de AB rencontrera cd. Or, pour cela, on prendra le plan vertical passant par CD pour plan vertical de projection, et l'on mènera par les points C, D un plan perpendiculaire à la droite opposée dd', cc'. L'intersection des traces verticales de ces plans est la projection l' du point L. Par conséquent, par le point l' on mènera une horizontale, et par le point l, maintenant déterminé, une perpendiculaire à la direction c, d. On aura ainsi les projections a, a', b, b' des deux autres sommets du tétraèdre.

Cette construction simple conduit à diverses remarques intéressantes.

1° Le centre O du parallélogramme $mnpq$ est la projection horizontale du centre de l'hyperboloïde passant par les quatre hauteurs du tétraèdre ou les quatre droites données.

2° La projection horizontale G du centre de gravité du tétraèdre s'obtiendra en prenant le milieu G de la droite qui joint les milieux des diagonales ab, cd.

Le centre S de la sphère circonscrite au tétraèdre se projettera horizontalement à l'intersection des perpendiculaires menées à chacune des diagonales en leur milieu.

3° On pourra donc établir, sur ces données, le théorème suivant :

482. *Le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre, le* *centre de l'hyperboloïde passant par les quatre hauteurs, le centre de gravité du tétraèdre sont trois points en ligne droite.* (JOACHIMSTHAL.)

Cette proposition fait l'objet de la *Question* 482 (*Voir* 1^{re} série, t. XVIII, p. 266) et peut s'établir, comme l'on voit, à l'aide des propriétés des quadrilatères, projections du tétraèdre sur un plan parallèle à deux arêtes opposées. Ainsi l'on peut montrer que :

Dans un quadrilatère, le milieu G *de la droite qui joint les milieux des diagonales, le point* S *de rencontre des perpendiculaires à ces diagonales en leurs milieux, et le centre* O *du parallélogramme obtenu en menant par les sommets des perpendiculaires à ces diagonales, sont en ligne droite.*

Il suffit de calculer les distances des points O, G, S, à la diagonale CD prise pour axe des x. En effet, si l'on désigne par a_1, b_1, a_2, b_2 les coordonnées de A et B (D étant l'origine), et la longueur DC par a, on a

$$(y)S = \frac{b_2 - b_1}{2} - \frac{a_2 - a_1}{2(b_2 - b_1)}(a - a_1 - a_2),$$

$$(y)G = \frac{b_2 - b_1}{4},$$

$$(y)O = \frac{(a_2 - a_1)(a - a_1 - a_2)}{2(b_2 + b_1)},$$

et l'on voit que

$$(y)O + (y)S = 2(y)G.$$

D'ailleurs, par construction,

$$(x)O + (x)S = 2(x)G.$$

Ainsi les trois points O, G, S sont en ligne droite et OG = GS. On établirait les relations analogues pour les distances des points O', G', S' au plan horizontal.

4° Revenons à la question proposée.

Avec les quatre droites données A, B, C, D, on peut former six couples de deux droites qui déterminent les directions des plans tels que le tétraèdre se projette, suivant un parallélogramme, sur le plan perpendiculaire au plan ainsi défini. Mais un seul de ces plans suffit, et la construction, qui a déjà donné deux arêtes opposées en vraie grandeur, donnera de même les quatre autres.

5° Si, sans changer le plan horizontal, on fait tourner le plan vertical de 90°, la projection verticale du tétraèdre devient un triangle. Cette disposition n'apporte pas de modification essentielle aux conclusions qui précèdent.

2ᵉ SOLUTION

Par M. MORET-BLANC.

473. On sait (*Question* 472) que les quatre hauteurs d'un tétraèdre, quand elles ne se coupent pas, sont quatre génératrices du même système d'un hyperboloïde à une nappe. Les perpendiculaires aux plans des faces, élevées par le point de concours des hauteurs du triangle, rencontrant trois de ces génératrices et étant parallèles à la quatrième, sont quatre génératrices du second système.

La plus courte distance de deux hauteurs d'un tétraèdre est parallèle aux plans des deux faces auxquelles elles sont respectivement perpendiculaires et, par suite, parallèle à l'intersection de ces deux plans, qui est l'arête rencontrant les deux autres hauteurs.

Cela posé, pour construire le tétraèdre dont quatre génératrices d'un hyperboloïde sont les hauteurs, on mène la plus courte distance de deux de ces génératrices, et la parallèle à cette plus courte distance s'appuyant sur les deux autres génératrices et limitée par elles; puis la plus courte distance de celles-ci, et sa parallèle s'appuyant sur les deux premières et limitée par elles. Ce sont des problèmes élémentaires de Géométrie descriptive. On obtient ainsi les quatre sommets du tétraèdre.

482. Soient ABC une des faces du trétraèdre ABCD, O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, G le point de concours des médianes, H celui des hauteurs du triangle, P le pied de la hauteur du tétraèdre abaissée du sommet D sur ABC. On sait que les points O, G, H sont en ligne droite et que $OG = \frac{1}{3}OH$ ou $HG = 2OG$. Tirons les droites PH et PG. Les perpendiculaires au plan ABC, menées par H et P sont deux génératrices parallèles de l'hyperboloïde. En effet. l'une rencontre les trois hauteurs issues des sommets A, B, C, qui se projettent suivant les trois hauteurs du triangle ABC, car les plans projetants sont respectivement perpendiculaires aux côtés BC, CA, AB, et l'autre est la quatrième hauteur. La parallèle à ces deux droites, située dans leur plan à égale distance de chacune d'elles, est une génératrice du cône asymptote; elle contient le centre de l'hyperboloïde qui se projette au point O_1, milieu de HP. Le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre se projette en O, et le centre de gravité du tétraèdre au point G_1, au quart de GP. Il faut démontrer que les trois points O, G_1, O_1 sont en ligne droite.

Soit Q le milieu de GP; O_1Q est parallèle à HG et égale à sa moitié; elle est donc égale et parallèle à OG; la figure OQO_1G est un parallélogramme; les diagonales OO_1 et GQ se coupent en G_1, milieu de GQ et de OO_1. Les trois points de l'énoncé se projetant en ligne droite sur une face quelconque du tétraèdre sont en ligne droite dans l'espace. On voit de plus que le centre de gravité du tétraèdre est au milieu de la droite qui joint le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre au centre de l'hyperboloïde.

Question 132.

Par cinq points donnés dans l'espace, faire passer un cylindre droit à base circulaire.

SOLUTION

Par M. H. Brocard.

Par trois des points donnés, A, B, C, faisons passer une ellipse quelconque (S). Les cônes ayant pour base cette ellipse et pour sommets les deux autres points donnés D, E se coupent généralement suivant une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à deux directions (P), (P′) qu'il est possible de déterminer d'après les données du problème. Il est évident que l'on obtiendra un cylindre du second degré passant par les cinq points donnés, en prenant pour directrice la conique (S) et pour directions des génératrices des parallèles aux droites (P), (P′).

Cela posé, considérons une section de ce cylindre faite par un plan perpendiculaire aux génératrices et faisons passer par le grand axe de la section elliptique un plan quelconque (M). Il existe deux positions du plan (M) symétriques par rapport au précédent, et qui donnent les sections circulaires du cylindre. Les données du problème permettent encore de trouver, pour chaque ellipse (S) et chaque direction (P), l'orientation du plan (M). On cherchera donc pour quelle forme de l'ellipse (S) le plan (M) est perpendiculaire à l'une des directions (P) ou (P').

Il y a généralement, pour chaque hyperbole, deux solutions, et, comme il existe dix triangles ABC, ... servant de point de départ, on voit qu'il y a, en général, vingt cylindres qui satisfont aux conditions du problème.

Question 86.

Inscrire dans un triangle donné une ellipse dont la surface soit égale à celle d'un cercle donné.

En discutant cette question, on déterminera comme cas particulier l'ellipse inscrite dont la surface est maximum.

SOLUTION

Par M. Moret-Blanc.

Soient ABC le triangle et r le rayon du cercle donné. Prenons pour axes de coordonnées les côtés CA et CB ; posons $CB = a$, $CA = b$, angle $ACB = \omega$, et désignons par α, β les coordonnées du centre de l'ellipse ; son équation sera

$$A(x-\alpha)^2 + 2B(x-\alpha)(y-\beta) + C(x-\alpha)^2 - 1 = 0$$

ou

$$\begin{aligned} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 2(A\alpha + B\beta)x - 2(B\alpha + C\beta)y \\ + A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

En exprimant que les côtés CB et CA sont tangents à l'ellipse, on a les conditions

$$(B^2 - AC)\beta^2 + A + 0, \qquad (B^2 - AC)\alpha^2 + C = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{A}{\beta^2} = \frac{C}{\alpha^2} = AC - B^2 = \frac{\sin^2\omega}{r^4},$$

car l'aire de l'ellipse est $\dfrac{\pi \sin\omega}{\sqrt{AC - B^2}} = \pi r^2$.

Les distances des points de contact au sommet C sont respectivement

$$\frac{A\alpha + B\beta}{A} \quad \text{et} \quad \frac{B\alpha + C\beta}{C}.$$

On a

$$A = \frac{\beta^2 \sin^2\omega}{r^4}, \qquad C = \frac{\alpha^2 \sin^2\omega}{r^4},$$

$$B = \pm \sin^2\omega \frac{\sqrt{\alpha^2\beta^2 - \dfrac{r^4}{\sin^2\omega}}}{r^4}.$$

Il reste à exprimer que l'ellipse est tangente au côté AB

$$bx + ay - ab = 0.$$

On tire de là

$$y = \frac{ab - bx}{a}.$$

Portant cette valeur dans l'équation de l'ellipse et exprimant que l'équation en x a ses racines égales, il vient, réductions faites,

$$(AC - B^2)(b\alpha + a\beta - ab)^2 = Aa^2 - 2Bab + Cb^2,$$

et, en remplaçant A, B, C par leurs valeurs, et supprimant le facteur commun $\dfrac{\sin^2\omega}{r^4}$,

$$(b\alpha + a\beta - ab)^2 - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 = \pm 2ab\sqrt{\alpha^2\beta^2 - \frac{r^4}{\sin^2\omega}}.$$

Réduisant, divisant par $2ab$ et élevant au carré, il vient, après quelques réductions,

$$\left(b\alpha + a\beta - \frac{ab}{2}\right)\left(2\alpha\beta - b\alpha - a\beta + \frac{ab}{2}\right) = \frac{r^4}{\sin^2\omega}.$$

On n'a qu'une relation entre α et β; le problème admet donc une infinité de solutions. Donnant à α une valeur arbitraire comprise entre o et a, on trouvera pour β deux valeurs correspondantes; α et β étant connus, on connaîtra A, B, C, et l'on déterminera les points de contact sur CA et CB; puis on joindra ces points par des droites, aux sommets opposés; la droite menée par le sommet C et le point d'intersection de ces deux droites, passe, comme on sait, par le point de contact avec AB. Connaissant le centre, trois tangentes et leurs points de contact, on pourra construire l'ellipse.

Cherchons l'ellipse d'aire maximum.

Égalant à zéro les dérivées du premier membre de l'équation précédente par rapport à α et à β, on a

$$(2b\alpha + a\beta - ab)(2\beta - b) = 0,$$
$$(b\alpha + 2a\beta - ab)(2\alpha - a) = 0.$$

Les solutions $2\beta - b = 0$ et $2\alpha - a = 0$ donnent $r = 0$ et correspondent à un minimum : l'ellipse est alors une ligne droite.

Les équations

$$2b\alpha + a\beta - ab = 0$$
$$b\alpha + 2a\beta - ab = 0$$

donnent

$$\alpha = \frac{a}{3}, \qquad \beta = \frac{b}{3}.$$

On a ensuite

$$\frac{r^4}{\sin^2\omega} = \frac{ab}{6}\,\frac{ab}{18} = \frac{a^2b^2}{108}, \qquad \frac{r^2}{\sin\omega} = \frac{ab}{6\sqrt{3}}.$$

$$\text{L'aire du cercle} = \frac{\pi ab\sin\omega}{6\sqrt{3}} = \text{aire du triangle} \times \frac{1}{3\sqrt{3}},$$

$$A = \frac{b^2}{9} \times \frac{108}{a^2b^2} = \frac{12}{a^2}, \qquad C = \frac{12}{b^2}, \qquad B = \frac{6}{ab}.$$

Points de contact : pour $y = 0$,

$$x = \frac{A\alpha + B\beta}{A} = \frac{a}{2};$$

pour $x = 0$,

$$y = \frac{B\alpha + C\beta}{C} = \frac{b}{2},$$

pour le côté AB,

$$x = \frac{a}{2}, \qquad y = \frac{b}{2}.$$

Les points de contact sont les milieux des côtés du triangle.

Question 157.

Lorsque trois forces P, Q, R, *non situées deux à deux dans le même plan, se réduisent à une seule force, la somme de deux tétraèdres construits sur* P, Q, R *prises deux à deux est équivalente au troisième.* (Catalan.)

SOLUTION

Par M. Moret-Blanc.

Lemme. — *Soient une droite limitée* AB *et une force* PQ *qui ne la rencontre pas, le moment de* PQ *par rapport à l'axe* AB *est égal à six fois le volume du tétraèdre construit sur* AB *et* PQ, *ou* ABPQ, *divisé par* AB.

Soient CD la plus courte distance des droites AB, PQ et P′Q′ la projection de PQ sur une perpendiculaire au plan ADB.

AB.P′Q′.CD représente six fois le volume du tétraèdre ABPQ, P′Q′.CD est le moment de PQ par rapport à AB, ce qui démontre le lemme.

Nota. — On convient de regarder le moment de PQ par rapport à AB comme positif ou négatif suivant que, pour un observateur placé sur AB, les pieds en A et la tête en B, et regardant PQ, la force tend à faire tourner le corps de gauche à droite ou de droite à gauche, c'est-à-dire dans le sens des aiguilles d'une montre ou en sens contraire.

Si l'on regarde PQ comme un axe fixe et AP comme une force, il est facile de voir que le signe du moment reste le même.

Nous regarderons un tétraèdre comme ayant le signe du moment qu'il représente à un facteur près.

Cela posé, si les trois forces P, Q, R non situées deux à deux dans le même plan se font équilibre ou se réduisent à une seule force, on sait que la somme algébrique de leurs moments par rapport à un axe quelconque est égale à zéro.

Prenant pour axe successivement chacune des trois forces, on a

$$(P, Q)+(P, R)=0,$$
$$(P, Q)+(Q, R)=0,$$
$$(P, R)+(Q, R)=0.$$

Ajoutant et divisant par 2

$$(P, Q)+(P, R)+(Q, R)=0,$$

(P, Q) désigne le volume du tétraèdre construit sur P et Q, avec sa valeur algébrique.

La somme algébrique des trois tétraèdres construits sur les forces prises deux à deux est égale à zéro; par conséquent, en valeur absolue, la somme de deux de ces tétraèdres est équivalente au troisième.

Question 174.

Une équation algébrique ayant toutes ses racines réelles, trouver le nombre précis de racines comprises entre deux limites données par le moyen du théorème de Descartes.

(JACOBI.)

SOLUTION

Par M. MORET-BLANC.

Soient a et b les deux limites, $a < b$; si l'on pose

$$y = \frac{x-a}{b-x}, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{by+a}{y+1},$$

la transformée en y aura toutes ses racines réelles, et autant de racines positives que la proposée a de racines comprises entre a et b : ce nombre est égal à celui des variations de la transformée en y.

Question 245.

Soit

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n;$$

supposons que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ puissent prendre respectivement $m_1, m_2, \ldots, m_n$ valeurs différentes, alors z aura au plus $m_1m_2\ldots m_n$ valeurs différentes, mais il peut en avoir moins. Dans quel cas?

SOLUTION

Par M. Moret-Blanc.

En combinant chacune des m_1 valeurs de x_1 avec chacune des m_2 valeurs de x_2, la somme des deux premiers termes prendra, au plus, $m_1 m_2$ valeurs, qui, combinées avec les m_3 valeurs de x_3, donneront pour la somme des trois premiers termes, au plus, $m_1 m_2 m_3$ valeurs différentes, et ainsi de suite. Le nombre des valeurs de z sera donc, au plus, $m_1 m_2 m_3 \ldots m_n$; mais il peut être moindre. Ceci arrivera lorsque la somme d'un certain nombre de termes conserve la même valeur pour plusieurs systèmes de valeurs de m.

Supposons, par exemple, que l'on ait $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, et que parmi les m_1 valeurs de x_1 soient 3 et 7, et parmi les valeurs de x_2, 5 et 2; la somme des deux premiers termes, $3x_1 + 4x_2$, prendra la même valeur de $2y$, pour $x = 3$, $y = 5$ et pour $x = 7$, $y = 2$.

Par ce seul fait, le nombre des valeurs de z serait diminué de $m_3 m_4 \ldots m_n$ unités.

Question 475.

Construire une conique connaissant trois tangentes et une directrice.

SOLUTION

Par M. H. Brocard.

Ce qui suit ne renferme pas la solution de la question proposée, mais diverses remarques qui s'y rattachent.

Ce problème, pris dans son ensemble, admet généralement quatre solutions.

En effet, considérons le triangle ABC (1) formé par les trois tangentes données. Figurons aussi la directrice D. Traçons les quatre circonférences inscrite et ex-inscrites au triangle ABC. Soient O, O_1, O_2, O_3 leurs centres respectifs. Par chacun des sommets A, B, C, menons une droite parallèle (Aa, Bb, Cc) et une autre perpendiculaire (Aa', Bb', Cc') à la directrice,

---

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

jusqu'à sa rencontre avec le côté opposé, prolongé s'il est nécessaire. Nous obtenons ainsi les points a, b, c, a', b', c'.

Cela posé, le problème reviendra évidemment à chercher l'intersection de la droite D avec le lieu des pieds des directrices des coniques inscrites ou ex-inscrites au triangle ABC, et dont l'axe focal est perpendiculaire à la droite D. Or, sans déterminer cette courbe, on peut se rendre compte de son tracé. Elle admet seize branches infinies, asymptotes aux huit droites parallèles et perpendiculaires à la droite D, menées par les points O, O_1, O_2, O_3. De plus, cette courbe passe par les neuf points A, B, C, a, b, c, a', b', c'. Ce lieu répond aussi aux coniques dont l'axe focal est parallèle à la droite D. Mais, parmi les premières, quatre seulement répondent à l'énoncé.

Nota. — Le point O est le point de rencontre des hauteurs du triangle $O_1O_2O_3$. Les pieds de ces hauteurs sont les sommets A, B, C du triangle donné. Il en résulte que les quatre points O, O_1, O_2, O_3 se trouvent sur une hyperbole équilatère, qui renferme aussi les milieux des segments Aa, Bb, Cc, Aa', Bb', Cc'. Ainsi, cette hyperbole passe par dix points déterminés du plan, ayant une corrélation bien définie. Les directions des asymptotes sont d'ailleurs la directrice et la perpendiculaire.

Nous avons pensé que les diverses indications qui précèdent faciliteront à nos lecteurs la solution définitive, analytique ou graphique, de cette question. Mais elle ne semble pas devoir conduire à un résultat simple.

Question 536.

Quel est le minimum de matière pour construire un vase cylindrique droit dont on donne : 1° l'épaisseur uniforme du fond; 2° l'épaisseur uniforme de la partie latérale; 3° la capacité; 4° l'aire de la paroi intérieure; 5° l'aire de la paroi extérieure; 6° enfin, une section faite parallèlement au fond et semblable à une figure plane donnée.

(Bordoni.)

SOLUTION

Par M. Brocard.

Soient respectivement e, e', V, A et A' les cinq premières données. La section parallèle au fond peut être prise équivalente à un certain cercle, et l'on peut enfin supposer le vase de forme cylindrique circulaire. En désignant alors par x le rayon intérieur et par y la hauteur intérieure, la quantité u à rendre minima est la suivante :

$$u = \pi e x^2 + \pi y e'(2x - e') \tag{1}$$

sous les conditions successives

$$\pi y(x - e')^2 = V, \tag{2}$$

$$2\pi(x - e')y = A, \tag{3}$$

$$2\pi(y + e)x = A'. \tag{4}$$

Dans tout ce qui précède, on suppose la densité prise pour unité.

Si l'on élimine y entre l'équation (1) et chacune des trois autres, on a trois nouvelles expressions de u en fonction de x. En égalant $\frac{du}{dx}$ à zéro, on a trois équations d'où l'on tire les valeurs de x cherchées. Celles de y s'obtiendront, de même, en éliminant x et faisant $\frac{du}{dy}$ égal à zéro.

Dans tous les cas, les équations obtenues sont au moins du troisième degré, de sorte que leur discussion ne conduit à rien de simple.

Question 541.

Circonscrire à une ellipse le triangle équilatéral dont le côté soit : 1° un maximum; 2° un minimum.

SOLUTION

par M. H. Brocard.

Voici le procédé qui nous a paru le plus simple pour traiter ce problème :

1° Inscrire l'ellipse dans un angle de 60° dont on prend les bissectrices pour axes de coordonnées (Ox étant la bissectrice intérieure).

2° Mener les tangentes parallèles à l'axe des y. L'équation de ces droites étant de la forme $x = \delta$, il est évident que la valeur de δ est proportionnelle au côté ou à la surface du triangle équilatéral circonscrit, et qu'il n'y aura qu'à chercher les maxima et minima de δ.

Pour éviter de trop longs calculs, nous profiterons de certaines relations d'identités qui, dans le cas présent, conduisent à des expressions d'une grande simplicité.

L'équation de l'ellipse étant

$$(1)\qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

la courbe sera tangente aux droites

$$y = +\frac{x}{\sqrt{3}},\qquad y = -\frac{x}{\sqrt{3}},$$

si l'on a les deux relations

$$(2)\qquad DE - 2BF = 0,$$

$$(3)\qquad D^2 - 4AF + 3(E^2 - 4CF) = 0.$$

D'autre part, aux points (x, y) de la courbe où la tangente est parallèle à Oy, on a

$$(4)\qquad 2Ay + Bx + D = 0.$$

Éliminant y entre les équations (1) et (4), il vient

$$(5)\qquad (B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF = 0,$$

équation qui donne pour x les valeurs de δ.

Il reste à exprimer que l'ellipse est de grandeur constante. Pour cela, il faut identifier l'équation (1) avec la suivante

$$\begin{aligned} &b^2[(x-\alpha)\cos\varphi + (y-\beta)\sin\varphi]^2 \\ &+ a^2[(y-\beta)\cos\varphi - (x-\alpha)\sin\varphi]^2 - a^2b^2 = 0, \end{aligned}$$

qui, développée, devient

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &(b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi)y^2 - 2c^2xy\sin\varphi\cos\varphi \\ &+(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi)y^2 \\ &-2(b^2\beta\sin^2\varphi + a^2\beta\cos^2\varphi - c^2\alpha\sin\varphi\cos\varphi)y \\ &-2(b^2\alpha\cos^2\varphi + a^2\alpha\sin^2\varphi - c^2\beta\sin\varphi\cos\varphi)x \\ &+b^2(\alpha^2\cos^2\varphi + \beta^2\sin^2\varphi) \\ &+a^2(\beta^2\cos^2\varphi + \alpha^2\sin^2\varphi) - 2\alpha\beta c^2\sin\varphi\cos\varphi - a^2b^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

et peut s'écrire encore

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &A'y^2 + B'xy + C'x^2 + y(-2A'\beta - B'\alpha) \\ &\quad + x(-2C'\alpha - B'\beta) + A'\beta^2 + B'\alpha\beta + C'\alpha^2 - a^2b^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

où l'on a mis α et β en évidence.

Dans ces hypothèses, les binomes $B^2 - 4AC$, $BD - 2AE$, $D^2 - 4AF$, $E^2 - 4CF$ deviennent respectivement $-4a^2b^2$, $4a^2b^2\alpha$, $4a^2b^2(A' - \alpha^2)$ et $4a^2b^2(C' - \beta^2)$.

Les équations de condition (2) et (3) deviennent, par conséquent,

$$\alpha\beta = c^2 \sin\varphi \cos\varphi,$$

$$\alpha^2 + 3\beta^2 = 3(a^2 + b^2) - 2(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi).$$

L'élimination de φ conduit à l'équation

$$4\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 + 3\beta^2 - a^2 - 3b^2)(3a^2 + b^2 - \alpha^2 - 3\beta^2),$$

qui représente le lieu du centre de l'ellipse mobile.

La courbe se compose de quatre boucles fermées, symétriques par rapport aux deux axes de coordonnées, et situées dans l'angle de 60° et les angles opposés et supplémentaires.

Elle coupe l'axe des y aux points

$$\beta^2 = \frac{a^2 + 3b^2}{3}, \qquad \beta^2 = \frac{3a^2 + b^2}{3},$$

et l'axe des x aux points

$$\alpha^2 = a^2 + 3b^2, \qquad \alpha^2 = 3a^2 + b^2.$$

Cette question incidente trouve sa solution naturelle dans le courant du calcul et nous servira dans la suite.

L'équation (5) devient, à son tour,

$$(x - \alpha)^2 - A' = 0, \tag{8}$$

d'où l'on conclut

$$x = \delta = \alpha \pm \sqrt{b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi}.$$

Il est clair que l'on retrouvera cette même valeur de δ en exprimant que la droite $x = \delta$ est tangente à la conique (7). On retombe ainsi sur l'équation (8). C'est ce que l'on peut aisément vérifier.

L'expression de δ renferme deux termes, fonctions de φ. Mais, sans exprimer α en fonction de φ, on peut remarquer que, pour $\varphi = 0$ et $\varphi = 90°$, α prend les valeurs maxima et minima $\sqrt{a^2 + 3b^2}$, $\sqrt{3a^2 + b^2}$, et que, pour ces mêmes valeurs de φ, la quantité placée sous le radical est maxima ou minima. On peut ainsi conclure que les quatre expressions suivantes

$$\delta_1 = \sqrt{a^2+3b^2}+a, \qquad \delta_2 = \sqrt{a^2+3b^2}-a,$$
$$\delta_3 = \sqrt{3a^2+b^2}+b, \qquad \delta_4 = \sqrt{3a^2+b^2}-b$$

représentent des valeurs maxima ou minima de δ.

δ_2 et δ_4 correspondent au triangle équilatéral circonscrit qui laisse la courbe à son extérieur; δ_2 est un minimum, δ_4 un maximum.

δ_1 et δ_3 correspondent au triangle équilatéral circonscrit qui laisse la courbe à son intérieur; l'une des valeurs de δ est un minimum et l'autre un maximum. Pour les distinguer, il faut chercher le signe de la quantité

$$\sqrt{a^2+3b^2}+a-\sqrt{3a^2+b^2}-b,$$

et, pour faciliter le calcul, on prendra $b=1$ et l'on fera $a=mb$, m étant généralement >1. L'expression considérée devient alors

$$\sqrt{3+m^2}+m-\sqrt{1+3m^2}-1.$$

Sous cette forme, il est facile de s'assurer que cette quantité est positive, et qu'elle a son minimum, zéro, pour $m=1$.

Ainsi δ_1 est un maximum et δ_3 un minimum.

Il existe donc une série de quatre triangles équilatéraux maxima et minima. Dans tous ces triangles, l'une des hauteurs est dirigée suivant le grand axe, ou suivant le petit axe de la courbe.

Les autres maxima et minima sont donnés par une équation assez compliquée, obtenue en remplaçant dans l'expression de x, α par sa valeur en fonction de φ, puis égalant à zéro la dérivée prise par rapport à φ. Ces valeurs correspondent à l'ellipse tangente aux deux côtés de l'angle de 120°.

Le calcul n'offrant pas d'autre intérêt, nous pensons qu'il n'y a pas lieu de le poursuivre davantage. Il convient toutefois d'attirer l'attention sur une question incidente.

Considérons l'expression

$$\sqrt{a^2+3b^2}+a-\sqrt{3a^2+b^2}-b,$$

et remplaçons a par 1, et b par $\sqrt{1-k^2}$, k étant l'excentricité. Nous aurons ainsi

$$\sqrt{4-3k^2}+1-\sqrt{4-k^2}-\sqrt{1-k^2},$$

fonction qui, d'après ce que nous avons vu, est positive et très voisine de zéro. Si l'on donne à k une valeur quelconque $\frac{1}{n}$, n désignant un nombre quelconque positif, la fonction deviendra

$$\sqrt{4n^2-3}+n-\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{n^2-1},$$

à un facteur près, et différera toujours peu de zéro. Les valeurs extrêmes correspondent à $k=0$, ce qui indique que tous les triangles maxima sont égaux; alors on a le minimum, qui est zéro; enfin, pour $k=1$, ellipse infiniment aplatie, ou, en d'autres termes, segment de droite égal à la hauteur du triangle ayant 1 pour côté. On trouve ainsi, pour le maximum, la valeur 0,1160254... Il n'y a identité que pour la valeur particulière de $k=0$, mais l'accord existe jusqu'aux millièmes pour les premières valeurs entières de n. Exemples :

$$\begin{array}{ll}
n=1\ldots\ldots & 1+1=2+0,\\
n=2\ldots\ldots & \sqrt{13}+2=\sqrt{15}+\sqrt{3}\ +\varepsilon,\\
n=3\ldots\ldots & \sqrt{33}+3=\sqrt{35}+\sqrt{8}\ +\varepsilon',\\
n=4\ldots\ldots & \sqrt{61}+4=\sqrt{63}+\sqrt{15}+\varepsilon'',\\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

et ainsi de suite; ε, ε', ... désignent des nombres inférieurs à 0,001.

Cette propriété pourrait servir dans le calcul des approximations.

Question 936.

En multipliant $(x^2-1)^n$ *par la série*

$$\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\ldots,$$

la partie entière du produit sera le polynome

$$F(x)=x^{2n-1}-\left(n-\frac{1}{3}\right)x^{2n-3}+\left[\frac{n(n-2)}{1.2}-\frac{n}{3}+\frac{1}{5}\right]x^{2n-5}-\ldots$$

à l'égard duquel on propose de démontrer :

1° *Que l'équation* $F(x)=0$ *a toutes ses racines imaginaires sauf* $x=0$ *quand* n *est impair;*

2° *Qu'en supposant* n *pair, elle n'admet, outre le ra-*

cine nulle, que deux racines réelles egales et de signes contraires, dont la valeur absolue, supérieure à l'unité, est moindre que $\sqrt{2}$ et converge vers cette limite quand n augmente. (HERMITE.)

SOLUTION

Par M. O. CALLANDREAU [1].

Nous nous appuierons sur le lemme suivant :

LEMME. — *Trouver la somme de la suite (n entier)*

$$
(1)\quad \left\{\begin{aligned} &1-\frac{1}{3}\frac{n}{1}+\frac{1}{5}\frac{n(n-1)}{1.2}\\ &-\frac{1}{7}\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}.\end{aligned}\right.
$$

Il suffit d'intégrer $(1-x^2)^n\,dx$ entre les limites zéro et un.

On peut prendre une nouvelle variable $x=\cos\varphi$: il faudra alors intégrer $-\sin^{2n+1}\varphi\,d\varphi$.

On trouve (voir DUHAMEL, *Calcul infinitésimal*, t. II, p. 42) pour la somme

$$
(2)\qquad \frac{1}{2n+1}\,\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}.
$$

J'appelle F_{n+1}, F_n les polynomes obtenus avec $(x^2-1)^{n+1}$, $(x^2-1)^n$.

Il n'est pas difficile de voir que le polynome F_{n+1} se composera du polynome F_n multiplié par x^2-1 et d'un terme Cx où C est le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement complet de $(x^2-1)^n\,\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$.

Je cherche ce coefficient C et je le trouve égal, sans difficulté, à

$$
(3)\quad (-1)^n+(-1)^{n-1}\frac{1}{3}\frac{n}{1}+(-1)^{n-2}\frac{1}{5}\frac{n(n-1)}{1.2}+\ldots+\frac{1}{2n+1}
$$

ou, d'après le lemme, à

$$
(-1)^n\frac{1}{2n+1}\,\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}.
$$

---

[1] Cette solution nous a été envoyée vers 1871.

Donc

$$(4)\qquad (x^2-1)\,F_n+(-1)^n\,\frac{1}{2n+1}\,\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}=F_{n+1}.$$

J'ai supprimé le facteur x commun à tous les termes et je continue à appeler F_n, F_{n+1} les polynomes débarrassés du facteur x.

Considérant la suite des équations (4) pour les différentes valeurs de n : n, $n-1$, $n-2$, ..., 2, 1; faisant pour abréger $x^2-1=y$ et

$$b_n=(-1)^n\,\frac{1}{2n+1}\,\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)},$$

ajoutant toutes ces équations après les avoir multipliées respectivement par $1, y, y^2, \ldots, y^{n-1}$,

$$F_{n+1}=y^n+b_1y^{n-1}+b_2y^{n-2}+\ldots+b_n=0.$$

Cette équation ne peut avoir de racines négatives : le changement de y en $-y$ donnerait le même signe à tous les termes Elle peut s'écrire

$$y^{n-1}(y+b_1)+y^{n-3}(yb_2+b_3)+\ldots+b_n=0.$$

Or les valeurs absolues de b_1, b_2, ..., b_n forment une suite décroissante et $b_1=-\frac{2}{3}$. Donc 1 est une limite supérieure des racines positives.

D'autre part, la dérivée, par rapport à y, de

$$\frac{F_{n+1}}{y^n}=b_ny^{-n}+b_{n-1}y^{-n+1}+\ldots+b_1y^{-1}+1,$$

a un signe constant pour les valeurs de y positives et inférieures à 1; on s'en assure en écrivant

$$\begin{aligned}&-nb_ny^{-n-1}-(n-1)\,b_{n-1}y^{-n}-\ldots\\&\quad=-y^{-n-1}[nb_n+(n-1)b_{n-1}y]-\ldots,\end{aligned}$$

et remarquant que les quantités entre crochets ont le signe de b_n, b_{n-2}, ..., à cause de

$$(-1)^n[nb_n+(n-1)\,b_{n-1}y]>(-1)^n[nb_n+(n-1)\,b_{n-1}],$$

et des inégalités analogues, dans lesquelles les seconds membres sont positifs.

Il suit de là que $\frac{F_{n+1}}{y^n}$ ne peut passer qu'une fois par zéro; cela arrive si n est impair, mais pas si n est pair.

Pour trouver la limite vers laquelle tend la racine dans le cas de n impair, on observe que, d'après le lemme, on peut écrire

$$F_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \frac{y^{n+1} - \sin^{2(n+1)}\varphi}{y + \sin^2\varphi} d\varphi,$$

$$F_{n+1} = y^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y \sin\varphi}{y + \sin^2\varphi} d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n+3}\varphi}{y + \sin^2\varphi} d\varphi,$$

puis

$$F_{n+1} < y^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+3}\varphi\, d\varphi;$$

d'où

$$y^n > \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{5}\cdots\frac{2n+2}{2n+3}.$$

De cette inégalité résulte que y ne peut différer de l'unité d'une quantité finie, quand n augmente indéfiniment.

Questions 992 et 993.

992. *Soit* C_3 *une courbe du troisième degré et de la troisième classe; on s'approche indéfiniment d'un point de rebroussement en construisant sur la courbe une telle série de points que chacun d'eux soit le point d'intersection de la courbe avec la tangente au point précédent.*

(ÉMILE WEYR.)

993. *Soit* C_3 *une courbe du troisième ordre et de la troisième classe; on construit sur cette courbe une telle série de points que chacun d'eux soit le point de contact de la tangente qu'on peut mener à la courbe par le point précédent. Prouver que ces points se rapprochent de plus en plus d'un point d'inflexion.* (ÉMILE WEYR.)

SOLUTIONS

Par M. MORET-BLANC [1].

Une courbe du troisième ordre est, en général, de la sixième classe; mais l'existence d'un point double diminue la classe de

(1) Je corrige les énoncés primitifs où le point d'inflexion et le point de rebroussement avaient été mis l'un pour l'autre.

deux unités et celle d'un point de rebroussement la diminue de trois unités. Une courbe du troisième ordre et de la troisième classe est donc une courbe du troisième ordre ayant un point de rebroussement.

Remarquons de plus que l'ordre et la classe d'une courbe ne sont point altérés par la projection perspective de la courbe sur un plan.

Cela posé, on peut représenter toutes les courbes du troisième ordre par l'équation

$$\alpha(\alpha - a\gamma)(\alpha - b\gamma) - k\beta^2\gamma = 0, \tag{1}$$

où $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ sont les équations de trois droites et a, b, k trois paramètres : elle renferme, en effet, neuf paramètres arbitraires, comme l'équation générale des courbes du troisième ordre.

La droite $\gamma = 0$ est la tangente au point d'inflexion

$$(\alpha = 0, \gamma = 0).$$

Si l'on fait la perspective sur un plan de manière à rejeter à l'infini la tangente d'inflexion $\gamma = 0$, il suffit de faire $\gamma = 1$ dans l'équation (1), et l'équation de la courbe perspective sera

$$\alpha(\alpha - a)(\alpha - b) - k\beta^2 = 0,$$

ou, en prenant $\beta = 0$ et $\alpha = 0$ pour axes des x et des y,

$$ky^2 = x(x - a)(x - b),$$

équation d'une famille de courbes qui peuvent reproduire par la perspective toutes les courbes du troisième ordre.

Pour que la courbe ait un point de rebroussement, il faut qu'on ait $a = 0$, $b = 0$, et l'équation se réduit à

$$ky^2 = x^3.$$

La forme de cette courbe, qui a un point de rebroussement à l'origine, un point d'inflexion à l'infini, et qui tourne constamment sa convexité vers l'axe des x met en évidence les propriétés énoncées.

Dans la construction du n° 992, le point d'intersection se rapproche indéfiniment du point de rebroussement; il en est donc de même dans la courbe dont elle est la perspective.

Dans la construction du n° 993, le point de contact de la tangente s'éloigne indéfiniment, en se rapprochant du point d'inflexion situé à l'infini; donc dans la courbe dont elle est la perspective le point de contact s'approche indéfiniment d'un point d'inflexion situé à distance finie ou infinie.

La vérification analytique de cette double propriété, au moyen de l'équation $ky^2 = x^3$, ne présente d'ailleurs aucune difficulté.

Question 305.

Soient donnés : 1° sept points sur une droite A ; *2° sept plans dans l'espace. Mener une transversale qui rencontre les sept plans en sept points qui soient homographiques aux sept points de la droite* A. (Chasles.)

SOLUTION

Par M. J. Franel.

Soient $P_1, P_2, \ldots, P_7$ les sept points donnés, que nous supposerons distincts, $A = 0$, $B = 0$, $\ldots$, $G = 0$ les équations, en coordonnées homogènes, des sept plans donnés. Nous supposerons que quatre de ces plans ne passent pas par un même point et nous appellerons, pour abréger, plan A le plan représenté par l'équation $A = 0$.

Posons

$$\frac{P_3P_1}{P_3P_2} : \frac{P_4P_1}{P_4P_2} = (P_1P_2P_3P_4) = \lambda,$$

$$(P_1P_2P_3P_5) = \lambda', \qquad (P_1P_2P_3P_6) = \lambda'', \qquad (P_1P_2P_3P_7) = \lambda''',$$

et désignons par $Q_1, Q_2, \ldots, Q_7$ les points d'intersection d'une transversale quelconque l avec les plans respectifs $A, B, \ldots, G$.

Considérons, tout d'abord, l'ensemble des droites l, telles que $(Q_1Q_2Q_3Q_4) = \lambda$. Les coordonnées X, Y, Z, T d'un point variable de la transversale l peuvent se mettre sous la forme

$$X = x_0 + \rho x, \qquad Y = y_0 + \rho y, \qquad Z = z_0 + \rho z, \qquad T = t_0 + \rho t,$$

x_0, y_0, z_0, t_0 et x, y, z, t étant les coordonnées de deux points déterminés Q_0 et Q de cette droite. La valeur ρ_1 du paramètre ρ correspondant au point Q_1 a pour expression

$$\rho_1 = -\frac{A_0}{A},$$

où A_0 désigne ce que devient A quand on y remplace x, y, z, t respectivement par x_0, y_0, z_0, t_0. On a semblablement pour les valeurs ρ_2, ρ_3, ρ_4 de ρ qui correspondent aux points Q_2, Q_3, Q_4,

$$\rho_2 = -\frac{B_0}{B}, \qquad \rho_3 = -\frac{C_0}{C}, \qquad \rho_4 = -\frac{D_0}{D}.$$

La condition

$$(Q_1 Q_2 Q_3 Q_4) = \lambda = \frac{\rho_1 - \rho_3}{\rho_2 - \rho_3} : \frac{\rho_1 - \rho_4}{\rho_2 - \rho_4}$$

prend alors la forme

$$(1) \quad (C_0 A - A_0 C)(D_0 B - B_0 D) = \lambda (C_0 B - B_0 C)(D_0 A - A_0 D);$$

c'est là une équation du deuxième degré par rapport aux six coordonnées

$$x_0 y - y_0 x, \quad x_0 z - z_0 x, \quad \ldots, \quad z_0 t - t_0 z$$

de la transversale l. Elle représente un complexe connu sous le nom de *complexe tétraédral* ou *complexe de Reye*, du nom du géomètre qui, le premier, en fit une étude approfondie (1).

Le lieu des droites du complexe passant par un point donné $Q_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ est un cône du deuxième degré passant par les sommets du tétraèdre que forment les quatre plans A, B, C, D, et dont l'équation est évidemment l'équation (1) lorsqu'on y regarde x_0, y_0, z_0, t_0 comme des quantités données, x, y, z, t comme des variables. Ce cône se décompose en deux plans lorsque le point Q_0 est situé sur l'une des faces du tétraèdre A, B, C, D; par exemple, si Q_0 est dans le plan A, on a $A_0 = 0$ et l'équation (1) se décompose dans les deux suivantes :

$$A = 0, \qquad C_0(D_0 B - B_0 D) = \lambda (C_0 B - B_0 C) D_0,$$

dont la dernière peut se mettre sous la forme

$$(1 - \lambda)\frac{B}{B_0} + \lambda \frac{C}{C_0} - \frac{D}{D_0} = 0.$$

D'après ce qui précède, il est clair que la question posée revient à déterminer, dans le plan A, un point

$$Q_1(x_1, y_1, z_1, t_1),$$

---

(1) *Voir* sa *Geometrie der Lage*, II; consulter aussi STURM, *Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie*, I (Teubner), et le Mémoire de M. FOURET qui fait suite à la traduction française de la *Géométrie du mouvement* du Dr SCHÖNFLIES (Gauthier-Villars et fils).

tel que les quatre plans R_1, R_2, R_3, R_4, représentés par les équations

$$(1)\qquad (1-\lambda)\frac{B}{B_1}+\lambda\frac{C}{C_1}-\frac{D}{D_1}=0,$$

$$(2)\qquad (1-\lambda')\frac{B}{B_1}+\lambda'\frac{C}{C_1}-\frac{E}{E_1}=0,$$

$$(3)\qquad (1-\lambda'')\frac{B}{B_1}+\lambda''\frac{C}{C_1}-\frac{F}{F_1}=0,$$

$$(4)\qquad (1-\lambda''')\frac{B}{B_1}+\lambda'''\frac{C}{C_1}-\frac{G}{G_1}=0,$$

et qui passent déjà par le point Q_1, se coupent suivant la même droite. Tout d'abord cherchons, dans le plan A, le lieu des points Q_1 tels que les trois plans R_1, R_2, R_3 passent par la même droite. Il existera dans ce cas trois multiplicateurs constants m, m', m'', n'étant pas tous nuls, tels que l'on ait identiquement

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &m\left[(1-\lambda)\frac{B}{B_1}+\lambda\frac{C}{C_1}-\frac{D}{D_1}\right]\\ +&m'\left[(1-\lambda')\frac{B}{B_1}+\lambda'\frac{C}{C_1}-\frac{E}{E_1}\right]\\ +&m''\left[(1=\lambda'')\frac{B}{B_1}+\lambda''\frac{C}{C_1}-\frac{F}{F_1}\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Or, par hypothèse, quatre des plans donnés ne passent pas par un même point; on pourra donc déterminer, et cela d'une seule manière, à un facteur près σ, cinq constantes b, c, d, e, f, telles que l'on ait identiquement

$$(6)\qquad bB+cC+dD+eE+fF=0.$$

La comparaison de cette identité avec la précédente donne les relations

$$\begin{aligned} m(1-\lambda)+m'(1-\lambda')+m''(1-\lambda'')&=\sigma b B_1,\\ m\lambda+m'\lambda'+m''\lambda''&=\sigma c C_1,\\ -m&=\sigma d D_1,\\ -m'&=\sigma e E_1,\\ -m''&=\sigma f F_1,\end{aligned}$$

dont la première est une conséquence des suivantes, en vertu de l'identité (6).

L'élimination de m, m', m'' entre ces dernières donne finalement l'équation

$$(7) \qquad c\mathrm{C}_1 + \lambda d\mathrm{D}_1 + \lambda' e\mathrm{E}_1 + \lambda'' f\mathrm{F}_1 = 0,$$

qui représente, avec $\mathrm{A}_1 = 0$, le lieu des points Q_1, tels que les trois plans R_1, R_2, R_3 se coupent suivant une même droite. Ce lieu est donc une certaine droite h; par chaque point de cette droite passe une transversale l, telle que ses points de rencontre Q_1, Q_2, ..., Q_6, avec les six plans donnés A, B, ..., F, soient homographiques aux six points donnés P_1, P_2, ..., P_6. Cette transversale est représentée par deux quelconques des équations (1), (2) et (3). On s'assure aisément, par un calcul tout semblable au précédent, qu'il existe une de ces transversales et une seule h' située dans le plan A. Le lieu de ces transversales, quand le point Q_1 se déplace sur la droite h, est un hyperboloïde tangent aux six plans donnés A, B, ..., F. En effet, ces transversales rencontrent chacun des plans A, B, ..., F suivant une droite (telle que h); en outre, chacun de ces plans renferme une transversale et une seule (telle que h'). On peut donc énoncer le théorème suivant :

Étant donnés six points sur une droite et six plans dans l'espace, le lieu des transversales qui rencontrent les plans en six points homographiques aux points donnés est un hyperboloïde tangent aux plans donnés.

Il est à peine besoin d'ajouter que ces transversales sont des génératrices de même système de cet hyperboloïde.

Soient maintenant b', c', d', e', g' des constantes, telles que l'on ait identiquement

$$b'\mathrm{B} + c'\mathrm{C} + d'\mathrm{D} + e'\mathrm{E} + g'\mathrm{G} = 0.$$

Pour que les trois plans R_1, R_2 et R_4 se coupent suivant la même droite, on devra choisir le point Q_1 sur l'intersection des deux plans représentés par les équations

$$\mathrm{A} = 0, \qquad c'\mathrm{C} + \lambda d'\mathrm{D} + \lambda' e'\mathrm{E} + \lambda''' g'\mathrm{G} = 0.$$

On en conclut qu'il existe, en général, une transversale et une seule satisfaisant à l'énoncé du problème. Cette transversale est représentée par deux quelconques des équations (1), (2), (3) et (4), x_1, y_1, z_1, t_1 désignant les coordonnées du point commun aux trois plans

$$A = 0,$$

$$c\,C + \lambda\, d\, D + \lambda' e\; E + \lambda'' f\; F = 0,$$

$$c' C + \lambda\, d' D + \lambda' e' E + \lambda''' g' G = 0.$$

Question 539.

Trouver une courbe qui représente les trois folioles du Trifolium pratense. *Chaque foliole est partagée symétriquement par une droite qui aboutit vers l'intérieur à un point de rebroussement et à l'extérieur à un point d'inflexion. Les trois droites, formant entre elles des angles de* 120°, *se réunissent au même point du pédoncule.*

SOLUTION

Par M. Brocard.

Concevons une courbe fermée convexe (M), symétrique par rapport à l'axe des x, ayant un point de rebroussement sur cet axe et le coupant à angle droit en un autre point. Si l'on prend celui-ci pour pôle, et que, sans changer le rayon vecteur, on triple les angles correspondants, on aura une courbe composée de trois folioles égales, ayant un point de rebroussement sur leur axe de symétrie.

Toute courbe (M) satisfaisant aux conditions données, pourra servir de point de départ.

On peut choisir, par exemple, l'épicycloïde

$$\rho = a(1 - \cos\omega).$$

En transportant l'origine au point $\rho = 2a$, $\omega = \pi$, les formules de transformation seront

$$\frac{r}{\sin\omega} = \frac{\rho}{\sin\theta} = \frac{2a}{\sin(\omega - \theta)}.$$

Éliminant ρ et ω, on a

$$a^2(r^2 - 4ar\cos\theta + 4a^2) = (r^2 - 3ar\cos\theta + 2a^2)^2.$$

Il ne reste plus qu'à changer θ en 3φ, sans changer r; la courbe

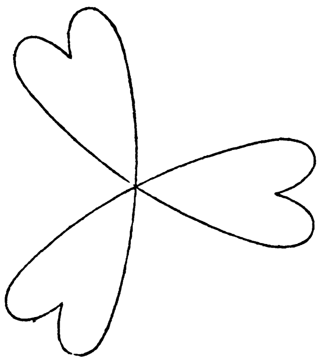
$$a^2(r^2 - 4ar\cos 3\varphi + 4a^2) = (r^2 - 3ar\cos 3\varphi + ra^2)^2$$

répond donc à la question.

En coordonnées rectilignes, elle a pour équation

$$a^2\left(x^2+y^2-4ax\frac{x^2-3y^2}{x^2+y^2}+4a^2\right)$$
$$=\left(x^2+y^2-3ax\frac{x^2-3y^2}{x^2+y^2}+2a^2\right)^2,$$

courbe du huitième degré, de la septième classe, composée de trois folioles égales, ayant chacune un point de rebrousse-



ment sur l'axe de symétrie, à la distance $r = 2a$ de l'origine. Les axes de symétrie font entre eux des angles de 120°, l'un d'eux n'est autre que OX.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1685. Il existe une infinité de triangles T qui sont à la fois circonscrits à une ellipse E et inscrits à un cercle concentrique C, le rayon de C étant égal à la demi-somme des axes de E.

La somme des carrés des côtés de tous les triangles T est constante. (E.-N. Barisien.)

TABLE DES MATIÈRES DES EXERCICES.

Questions proposées.

Questions résolues.

20558 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.