Nouvelles annales de mathématiques

E. Amigues

Intersection de deux coniques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 81-91

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__81_0>

INTERSECTION DE DEUX CONIQUES;

PAR M. E. AMIGUES.

I. — SOLUTION.

La méthode qui suit étant absolument algébrique, nous aurons soin de n'employer aucune expression empruntée à la Géométrie.

Il s'agit de *trouver les solutions d'un système de deux équations du second degré à deux inconnues, x et y, dont les coefficients sont réels ou imaginaires,* savoir

$$(1) \qquad \begin{cases} S = 0, \\ S' = 0. \end{cases}$$

Nous écarterons le cas où l'un au moins des polynomes S et S' est une somme de deux carrés, et aussi le cas où les deux équations ne diffèrent que par un facteur numérique.

Si l'on rend homogène l'expression

$$S + \lambda S',$$

en introduisant une variable z, cette expression devient une forme quadratique. Égalant à 0 son discriminant Δ, on obtient une équation du troisième degré en λ.

Puisque ni S ni S' ne sont des sommes de deux carrés, l'équation en λ n'a ni racine nulle ni racine infinie. Pour la même raison, elle ne peut être une identité. (On peut voir sans peine que, si elle était une identité, les expressions S et S' se décomposeraient en facteurs du premier degré et auraient un facteur commun.)

Soient λ_1 et λ_2 deux racines différentes de l'équation en λ. Le système proposé est équivalent au système

$$(2)\qquad \begin{cases} S + \lambda_1 S' = 0, \\ S + \lambda_2 S' = 0, \end{cases}$$

lequel peut s'écrire sous la forme

$$(3)\qquad \begin{cases} MN = 0, \\ PQ = 0. \end{cases}$$

Ce dernier système a pour solutions les solutions de quatre systèmes du premier degré, savoir

$$(4)\qquad \begin{cases} M = 0, \\ P = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} M = 0, \\ Q = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} N = 0, \\ P = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} N = 0, \\ Q = 0. \end{cases}$$

Le problème est donc résolu dès qu'on connaît λ_1 et λ_2, et l'on peut dire que l'équation en λ est une résolvante du système (1).

Remarque. — Si l'équation en λ a toutes ses racines égales, la méthode est en défaut. Si l'on représente par λ_1 la racine triple, le système proposé est équivalent au système

$$(5)\qquad \begin{cases} S = 0, \\ S + \lambda_1 S' = 0, \end{cases}$$

dans lequel la seconde équation se décompose en un produit de deux facteurs.

[On aurait en particulier racine triple si les polynomes S et S_1 ne différaient que par un facteur numérique, mais nous avons écarté ce cas, pour lequel la deuxième des équations (5) se réduirait d'ailleurs à une identité.]

II. — Discussion générale.

Nous écarterons ici les deux mêmes cas que pour la solution.

Premier théorème. — *Le système proposé ne peut jamais avoir plus de quatre solutions.*

En effet, j'ai à résoudre les systèmes (4). Or aucun d'eux ne peut admettre plus d'une solution. Car si le premier, par exemple, admettait plus d'une solution, on aurait

$$M \equiv KP,$$

et, par suite,

$$S + \lambda_1 S' \equiv KPN,$$
$$S + \lambda_3 S' \equiv PQ.$$

Donc, en retranchant,

$$(\lambda_1 - \lambda_2) S' \equiv P(KN - Q),$$

ce qui est contre notre hypothèse.

La démonstration ne s'applique pas au cas de la racine triple. On a alors à résoudre le système (5), c'est-à-dire en posant

$$S + \lambda_1 S' \equiv MN,$$

que l'on doit résoudre les deux systèmes

$$\begin{cases} S = 0, \\ M = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} S = 0, \\ N = 0. \end{cases}$$

Si chacun d'eux n'a que deux solutions, le théorème est démontré. Prouvons qu'il en est ainsi pour le premier.

L'équation $M = 0$ contient au moins une des inconnues, sans quoi le premier système n'aurait pas de solution : supposons que ce soit y. On en tire alors

$$y = mx + n.$$

Portant cette valeur dans l'équation

$$S = 0,$$

on a une équation en x du second degré. Il s'agit de prouver que cette équation n'est pas une identité. En effet, si elle était une identité, le polynome S serait divisible par $y - mx - n$ pour toute valeur de x, ce qui est contraire à nos hypothèses.

Second théorème. — *Pour que deux solutions soient confondues, il faut et il suffit que l'équation en* λ *ait une racine double. Pour que les deux solutions qui restent soient également confondues, il faut et il suffit que cette racine double annule les mineurs du discriminant* Δ.

Nous ferons d'abord une remarque. Si deux facteurs de la forme

$$ax + by + c$$

s'annulent tous deux pour $x = \alpha$ et $y = \beta$, et aussi pour $x = \alpha'$ et $y = \beta'$, ces facteurs sont les mêmes à un facteur numérique près. Car le système linéaire obtenu en les égalant à o admet, dans ce cas, deux solutions et, par suite, une infinité.

Autre remarque. Si un facteur s'annule pour trois des quatre solutions, deux de ces solutions sont confondues. Car, d'après le système (3), si trois solutions annulent la facteur M, ces trois solutions sont solutions du système

$$\begin{aligned} M &= 0, \\ PQ &= 0, \end{aligned}$$

qui ne peut en avoir que deux, n'en ayant pas une infinité. Ces trois solutions ne peuvent donc être distinctes.

Autre remarque. Des deux facteurs M et N qui entrent dans l'une des équations (3), l'une admet deux des solutions, l'autre les deux autres.

Désignons maintenant les quatre solutions par les nombres 1, 2, 3, 4; et par P_{ij} le facteur du premier degré qui admet les solutions i et j, en sorte que P_{ij} ne diffère pas de P_{ji}. En appelant α, β, γ les trois racines de l'équation en λ, on a

$$(6)\qquad \begin{cases} S+\alpha S' \equiv P_{12}P_{34}, \\ S+\beta S' \equiv P_{13}P_{24}, \\ S+\gamma S' \equiv P_{14}P_{23}. \end{cases}$$

Si les solutions 1 et 2 se confondent, on a

$$S+\beta S' \equiv \mu(S+\gamma S').$$

Ceci ayant lieu en particulier pour des valeurs de x et y qui annulent S' sans annuler S, on a

$$\mu = 1,$$

et alors

$$\gamma = \beta.$$

Réciproquement, si l'on a

$$\gamma = \beta,$$

on peut conclure que l'on a l'identité

$$(7)\qquad P_{13}P_{24} \equiv P_{14}P_{23}.$$

Les facteurs de ces deux produits sont donc identiques deux à deux. Le premier facteur du produit de gauche peut être identique au premier facteur du produit de droite, ou inversement.

Dans la première hypothèse, les facteurs P_{13} et P_{14} ont chacun les solutions 1, 3, 4; et les facteurs P_{24}, P_{23} ont chacun les solutions 2, 3, 4. Il faut pour cela que deux solutions au moins soient confondues.

Dans l'autre hypothèse, on arrive à la même conclusion.

Cherchons maintenant les conditions nécessaires et suffisantes pour que les solutions soient confondues deux à deux. Si les solutions 1 et 2 sont confondues (ce qui exige $\beta = \gamma$) et que les solutions 3 et 4 soient également confondues, les facteurs P_{13} et P_{24} ont deux solutions qui sont les mêmes, et, par suite, ne diffèrent que par un facteur numérique. Donc la racine double β donne un carré parfait

$$S + \beta S'.$$

Réciproquement, si une racine double β donne un carré parfait, les solutions 1 et 3 du facteur P_{13} sont aussi solutions du facteur P_{24}, qui, dès lors, admet les quatre solutions 1, 2, 3, 4. Donc les premières sont confondues deux à deux avec les secondes, à moins que plus de deux solutions ne fussent confondues, ce qui exigerait que β fût racine triple, comme on verra par le théorème suivant. Ainsi, pour que les quatre solutions se confondent deux à deux, il faut et il suffit que l'équation en λ ait une racine double β et que cette racine double donne un carré parfait

$$S + \beta S',$$

ou, ce qui revient au même, annule les mineurs du discriminant Δ.

Troisième théorème. — *Pour que trois des solutions soient confondues, il faut et il suffit que l'équation en λ ait ses trois racines égales. Pour que la quatrième solution soit confondue avec les trois premières, il faut et il suffit que cette racine triple annule les mineurs du déterminant Δ.*

En effet, si les solutions 2, 3 et 4 sont confondues, les seconds membres des identités (6) ne peuvent différer que par un facteur numérique [1]. Il en est de

---

[1] Le signe P_{22} représente un facteur linéaire qui admet la solution 2 et une solution infiniment voisine.

même des premiers membres, ce qui montre que ces facteurs numériques sont égaux à 1, et qu'on a en outre

$$\alpha = \beta = \gamma.$$

Réciproquement, si l'on a

$$\alpha = \beta = \gamma,$$

les premiers membres des identités (6) sont identiques. Donc il en est de même des seconds et l'on a

$$(8) \qquad P_{12}P_{34} \equiv P_{13}P_{24} \equiv P_{14}P_{23}.$$

On a donc trois produits dont les facteurs doivent être identiques deux à deux. Cela donne lieu à quatre combinaisons. Dans l'une d'elles, par exemple, les premiers facteurs des trois produits sont identiques, et les trois seconds identiques. Les trois premiers ont alors les solutions 1, 2, 3, 4 et les trois autres les solutions 2, 3, 4. Il faut pour cela, ou bien que trois solutions au moins soient confondues ou bien que les quatre soient confondues deux à deux. Les trois autres combinaisons possibles conduisent évidemment à la même conclusion.

Si trois solutions au moins sont confondues, la réciproque est démontrée. Si les quatre solutions sont confondues deux à deux, l'un des produits (8) est un carré parfait, et, par suite, les deux autres sont aussi des carrés et les mêmes carrés.

Supposons, par exemple, les solutions impaires confondues, et les solutions paires aussi. Les identités (8) deviennent

$$P_{12}^2 \equiv P_{11}P_{22} \equiv P_{12}P_{21}.$$

On a donc

$$P_{11} \equiv P_{22},$$

c'est-à-dire que les solutions 1 et 2 sont confondues Ainsi les quatre solutions sont confondues et la réciproque est encore vraie.

Cherchons d'une manière générale les conditions nécessaires et suffisantes pour que les quatre solutions soient confondues. Si elles le sont, les seconds membres des identités (6) sont des carrés qui ne diffèrent que par un facteur numérique. Les premiers membres de ces identités ne peuvent aussi différer que par un facteur numérique. On voit facilement que ce facteur est 1 et que l'on a

$$\alpha = \beta = \gamma.$$

En outre, cette racine triple donne un carré parfait

$$S + \alpha S'.$$

Réciproquement, si une racine triple α donne un carré, les seconds membres des identités (6) sont trois carrés identiques. Les six facteurs des identités (8) ne peuvent donc différer que par des facteurs numériques. Par exemple, on a

$$P_{12} \equiv \mu P_{34}.$$

Ceci exige que les solutions soient confondues deux à deux. Supposons, par exemple, les solutions impaires confondues et les solutions paires aussi. On prouvera comme ci-dessus que les quatre sont confondues.

Ainsi, pour que les quatre solutions soient confondues, il faut et il suffit que la racine triple α donne un carré parfait

$$S + \alpha S',$$

ou, en d'autres termes, annule les mineurs de Δ.

III. — Discussion complémentaire dans le cas où les deux équations données sont à coefficients réels.

Premier théorème. — *Si l'équation en λ a deux racines imaginaires, le système admet deux solutions réelles et deux solutions imaginaires conjuguées.*

En effet, ces deux racines sont imaginaires conjuguées et donnent le système (3) sous la forme suivante

$$\begin{cases} (M + Ni)(P + Qi) = 0, \\ (M - Ni)(P - Qi) = 0. \end{cases}$$

En associant les facteurs conjugués, on a deux solutions réelles. En associant les facteurs non conjugués, on a deux solutions imaginaires conjuguées, c'est-à-dire dans lesquelles les valeurs de x sont conjuguées et les valeurs de y aussi.

Ces dernières ne peuvent être réelles qu'en étant confondues, ce qui n'a lieu qu'autant que les valeurs imaginaires conjuguées de λ deviennent égales, et, par suite, réelles.

Second théorème. — *Si l'équation en λ n'a que des racines réelles, le système proposé admet quatre solutions réelles, ou quatre solutions imaginaires conjuguées deux à deux.*

Chaque racine, étant réelle, donne un couple de facteurs, qui sont ou réels ou imaginaires conjugués.

Supposons d'abord qu'un couple au moins soit formé de facteurs imaginaires conjugués. Soit

$$(M + Ni)(M - Ni) = 0$$

l'équation obtenue en égalant à 0 ce couple, et

$$G = 0$$

l'équation obtenue en égalant à 0 un autre couple, cette équation étant à coefficients réels d'après notre hypothèse.

Ce système de deux équations se décompose en deux autres, dont l'un donne deux solutions imaginaires, et l'autre les deux solutions conjuguées.

Ces solutions ne pourraient être toutes réelles que si les deux premières étaient respectivement confondues avec les deux conjuguées. Mais alors les facteurs $M \pm Ni$ devraient être les mêmes, ce qui ne peut avoir lieu, puisqu'ils sont conjugués.

Mais deux solutions imaginaires conjuguées peuvent devenir réelles en devenant égales, les deux autres demeurant imaginaires conjuguées.

De même, les solutions imaginaires données par le premier système peuvent être confondues en demeurant imaginaires; mais alors les solutions conjuguées données par le second système sont confondues aussi.

Supposons en second lieu qu'aucun couple ne soit formé de facteurs imaginaires conjugués, alors tous les couples sont formés de facteurs réels. Deux des trois couples sont alors représentés par des équations de la forme

$$MN = 0,$$
$$PQ = 0,$$

qui donnent quatre solutions réelles.

Deux de ces solutions peuvent se confondre, les autres demeurant distinctes, ou bien elles peuvent se confondre deux à deux.

Remarque I. — Si l'équation en λ a une racine triple, les trois ou quatre solutions confondues ne peuvent être que réelles, sans quoi on aurait les conjuguées, c'est-à-dire en tout plus de quatre solutions.

Remarque II. — Le nombre des couples de facteurs imaginaires conjugués est ou 0 ou 2. D'abord il ne saurait être égal à 1, sans quoi les deux couples de facteurs réels prouveraient que toutes les solutions sont réelles, et le couple de facteurs imaginaires conjugués prouverait qu'il y a au moins deux solutions imaginaires. Il ne saurait non plus être égal à 3, car il faut un couple au moins de facteurs réels, toutes les fois que les deux polynomes S et S′ sont à coefficients réels. Démontrons ce dernier fait. Les quatre solutions étant réelles ou conjuguées deux à deux, il y a toujours un couple de facteurs dont chacun admet ou deux solutions réelles ou deux solutions conjuguées. Je dis que chaque facteur de ce couple est toujours réel. En effet, soit un facteur à coefficients réels inconnus a, b, c,

$$ax + by + c.$$

Je dis qu'on a des valeurs réelles de a, b, c, si ce facteur admet les solutions réelles $(x = \alpha, y = \beta)$ et $(x = \alpha', y = \beta')$; je dis, en d'autres termes, qu'on peut tirer des valeurs réelles de a, b, c du système suivant

$$\begin{aligned} a\alpha + b\beta + c &= 0, \\ a\alpha' + b\beta' + c &= 0, \end{aligned}$$

ce qui est évident.

Je dis maintenant que l'on a encore des valeurs réelles de a, b, c, si le factenr admet deux solutions imaginaires conjuguées. En effet, soit l'une de ces solutions $x = \alpha + \beta i, y = \gamma + \delta i$. On doit avoir

$$a(\alpha + \beta i) + b(\gamma - \delta i) + c = 0,$$

c'est-à-dire, puisqu'on cherche des valeurs réelles de a, b, c,

$$\left\{ \begin{aligned} a\alpha + b\gamma + c &= 0, \\ a\beta + b\delta \quad\; &= 0. \end{aligned} \right.$$

La solution conjuguée donne le même système, lequel donne évidemment des valeurs réelles pour a, b, c.

Remarque III. — Les réciproques des deux théorèmes sont vraies et se démontrent par l'absurde.