NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solution géométrique de la même question

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 493-498

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__493_1>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA MÊME QUESTION;

PAR UN ANCIEN ÉLÈVE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Soit D la polaire de Δ par rapport à (S); la projection orthogonale de D sur un plan (P) est la polaire du point de rencontre de Δ et de (P), par rapport à la section de ce plan et de (S).

Cette droite est alors l'arête d'un dièdre droit dont les faces passent respectivement par l'axe oz et par D. Lorsqu'on fait tourner (P) autour de oz, elle engendre alors, comme l'on sait, un hyperboloïde Σ dont les sections circulaires sont perpendiculaires, les unes à oz et les autres à la polaire D de Δ.

Nous avons ainsi répondu aux deux premières parties de la question proposée.

Pour que la surface Σ reste la même lorsqu'on a déplacé la sphère, il faut que D conserve la même position ; la droite Δ_1 qu'on doit substituer à Δ est alors la polaire de D par rapport à (S) dans sa nouvelle situation. *Quel est le lieu des droites telles que* Δ_1, *lorsque le centre de* (S) *décrit* oz ? C'est là l'énoncé de la quatrième partie qui reste à traiter et qu'on peut formuler ainsi :

On demande le lieu des polaires d'une droite par rapport à une sphère de grandeur invariable, dont le centre décrit une droite donnée.

Indépendamment des notations précédentes désignons par O la droite fixe dont on prend la polaire. Plaçons-la verticalement ; sa projection horizontale est en o. Prenons un plan vertical parallèle à la droite décrite par le centre de la sphère (S), et soient C et C′ les projections de cette droite.

Si le centre de (S) est en (c, c'), la polaire de O par rapport à cette sphère est l'horizontale qui se projette en G perpendiculairement à oc et telle que le produit $cm \times co$ soit égal au carré du rayon de (S).

Par le centre (c, c') menons une perpendiculaire au plan vertical. Elle se projette horizontalement suivant cab, qui rencontre G en a et qui coupe en b la parallèle ob à C.

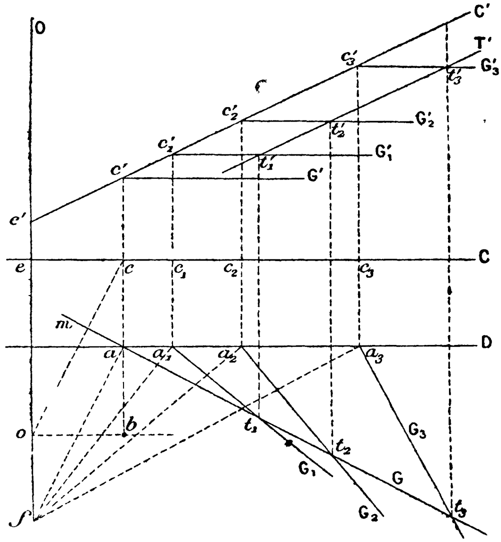
On a $ca \times cb = cm \times co =$ const.

Mais le segment cb est constant, par suite le segment ca est aussi de grandeur constante.

Lorsque le centre de (S) se déplace, le point (a, c') décrit alors la droite (D, C′) parallèle à (C, C′).

Cette droite (D, C′) est le lieu des traces des polaires telles que (G, G′) sur le plan de front projeté en D.

Ce plan de front coupe le lieu demandé suivant cette droite et, comme il contient la polaire de O par rapport



à la sphère (S) de centre (e, e') pied de la perpendiculaire commune aux deux droites données, on voit qu'il coupe le lieu des droites telles que (G, G′) suivant deux droites.

Ce lieu est alors du second degré et, par suite, c'est un paraboloïde hyperbolique, puisque les droites (G, G′) sont horizontales.

Autrement. — Par le point a, menons la droite af parallèlement à co, elle rencontre en f la perpendiculaire of au plan vertical.

Le segment of étant égal à ca est de grandeur constante et le point f est fixe quelle que soit la position du centre c.

La droite G étant perpendiculaire à af et le point a décrivant D, G enveloppe une parabole qui a f pour foyer et D pour tangente au sommet.

Prenons (G, G') dans trois autres positions.

Les traces de ces droites sur le plan vertical mené par G sont les points (t_1, t'_1), (t_2, t'_2), (t_3, t'_3).

Mais les droites G_1, G_2, G_3 étant tangentes à une parabole déterminent, sur les tangentes D et G à cette courbe, des segments proportionnels; on a alors

$$\frac{t_1 t_2}{t_2 t_3} = \frac{a_1 a_2}{a_2 a_3} = \frac{c'_1 c'_2}{c'_2 c'_3}.$$

D'après cela, si l'on prend les projections verticales t'_1, t'_2, t'_3, ces points sont en ligne droite.

Les polaires telles que (G, G'), qui s'appuient sur la droite (D, C'), s'appuient donc en outre sur une autre droite projetée en G, et, comme elles sont horizontales, *elles appartiennent à un paraboloïde hyperbolique.*

Je désignerai cette surface par (G).

Remarques. — Lorsque le centre de la sphère est à l'infini, la polaire de O est perpendiculaire au plan vertical. Les génératrices du paraboloïde (G), qui ne sont pas horizontales, rencontrent cette droite à l'infini et se projettent alors verticalement suivant des droites parallèles. Ainsi *la droite* T' *qui contient les points* t'_1, t'_2, t'_3 *est parallèle à* C'.

On voit que le paraboloïde (G), qui a déjà pour plan directeur un plan perpendiculaire à O, a pour second plan directeur un plan parallèle à la droite des centres de (S) ainsi qu'à la perpendiculaire commune à cette droite et à O.

L'axe de (G) est cette perpendiculaire commune : cette droite est en effet parallèle aux deux plans directeurs et le plan tangent à (G) au point où elle rencontre cette surface lui est perpendiculaire, puisque c'est le plan de front qui contient D.

Nous avons vu que T' est parallèle à C'; les segments $c'_1\, t'_1$, $c'_2\, t'_2$, $c'_3\, t'_3$, ... sont alors égaux; de là résulte ce théorème :

Deux tangentes D *et* G *à une parabole interceptent, sur les tangentes* G_1, G_2, G_3, ..., *à cette courbe, des segments dont les projections, faites sur une droite arbitraire, dans la direction des diamètres de cette parabole, sont des segments égaux.*

Transformons ce théorème par polaires réciproques en prenant comme cercle directeur une circonférence dont le centre est au foyer de la parabole; on obtient ainsi cette proposition de Géométrie élémentaire :

On donne une circonférence de cercle E *et sur cette courbe les points* α, β, γ.

Les droites qui joignent les points α, β *à un point arbitraire de* E *déterminent sur la tangente en* γ *à cette courbe des points dont la somme ou la différence des inverses des distances à* γ *est constante* (la somme lorsque les points de rencontre sont de part et d'autre de γ).

Transformons ce théorème par rayons vecteurs réciproques en prenant le point γ pour pôle de transformation. On trouve ainsi :

On donne deux circonférences de cercles qui se coupent. Par leurs points de rencontre on mène deux droites parallèles. Les segments interceptés sur ces droites par les circonférences données sont égaux.

Cette propriété connue se démontre très simplement. Si on la prend comme point de départ, elle conduit par deux transformations successives au théorème relatif à la parabole.

On a ainsi un autre moyen d'arriver à ce théorème. Sa démonstration directe est du reste très simple et il est facile de le généraliser.