A. ASTOR

Note de mécanique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 442-461

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__442_1>

NOTE DE MÉCANIQUE;

PAR M. A. ASTOR.

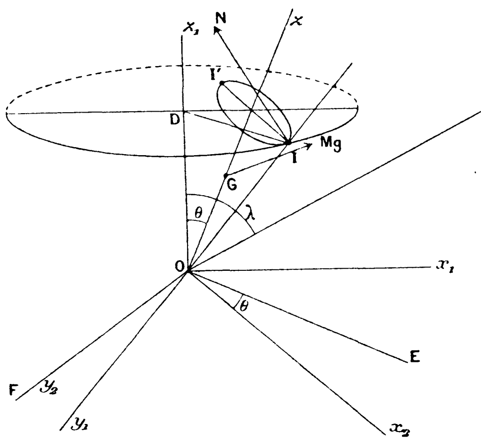
Il s'agit du mouvement d'un solide pesant, homogène, de révolution, fixé par un point de son axe et assujetti à s'appuyer sur un cercle fixe dont l'axe passe par le point de suspension :

1° *En négligeant les résistances passives;*

2° *En tenant compte du frottement de glissement de la surface du corps sur le cercle fixe et supposant la composante normale de la pression sur le cercle dirigée perpendiculairement à la droite qui joint le point fixe au point d'appui.*

Supposons, pour fixer les idées, que le corps se meuve à l'intérieur du cercle; les points du solide qui coïncideront successivement avec ceux du cercle sont sur un parallèle de la surface; nous désignerons par ρ et h le rayon et la distance au point fixe O de ce parallèle, par R et h' les mêmes éléments du cercle fixe.

Prenons pour origine le point O et pour axe fixe Oz_1 l'axe du cercle fixe dirigé du point O vers le cercle; par le point O, menons une demi-droite OL parallèle à la direction de la pesanteur, et soit λ l'angle compris entre O et π qu'elle forme avec Oz_1; choisissons le plan z_1L pour plan des $z_1 x_1$, l'axe Ox_1 faisant un angle aigu avec OL; les axes fixes $Ox_1y_1z_1$ sont déterminés.



Nous prendrons pour axes mobiles : l'axe Oz du corps dirigé vers le parallèle de contact et deux droites rectangulaires Ox, Oy liées au solide dans le plan perpendiculaire à Oz mené par le point O, le trièdre $Oxyz$ étant comme d'habitude superposable au trièdre fixe $Ox_1y_1z_1$. Nous désignerons par A le moment d'inertie du corps par rapport à Ox ou Oy, par C le moment par rapport à Oz, et nous déterminerons la position du solide par les angles θ, φ, ψ d'Euler, en remarquant que, par la nature même de la question, θ est constant.

Soient, à l'instant t, I le point de contact, DI le rayon du cercle R, I'I le diamètre du parallèle, ces droites sont dans le plan $z_1 O z$. Ce dernier coupe $x_1 y_1$ suivant une droite OE que nous choisirons parallèle à DI; le plan xy coupe le plan $x_1 y_1$ suivant une droite perpendiculaire à OE; nous prendrons, pour déterminer l'angle ψ, la direction OF que l'on obtient en faisant tourner OE de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct. Sur la droite d'intersection de xy et de $z_1 z$ prenons la direction Ox_2 qui avec Oz et OF forme un trièdre $Ox_2 y_2 z$ superposable à $Oxyz$; l'angle formé par Ox_2 avec Ox sera $-\varphi-\frac{\pi}{2}$; cette remarque nous sera utile dans la suite.

Le solide peut être considéré comme libre à condition d'adjoindre au poids Mg parallèle à OL et appliqué en un point G de Oz la réaction du point fixe O et celle du cercle. Si l'on écrit les équations d'Euler, la première disparaît et il ne reste que la seconde qui est déterminée seulement par son moment relatif au point O. En supposant qu'il n'y a pas de résistances passives, elle doit être normale au cercle, c'est-à-dire située dans le plan $z_1 O z$; nous pouvons la décomposer en deux, l'une suivant IO, l'autre normale à cette droite; nous admettrons que la pression exercée par le corps sur le cercle se réduit à une force égale et opposée à cette dernière composante. Si nous appelons N la réaction envisagée de la sorte, la force de frottement sera une force égale à fN dirigée suivant la tangente commune en I aux deux cercles R et ρ en sens inverse de la vitesse de glissement, c'est-à-dire de la vitesse du point I du corps solide. Cette force de frottement sera donc parallèle à Oy_2. Cette remarque nous sera encore utile.

Appelons p, q, r les composantes de la rotation instantanée par rapport aux axes mobiles, p_1, q_1, r_1 ses composantes par rapport aux axes fixes; nous aurons par les formules connues, puisque θ est constant,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} p &= \sin\theta\sin\varphi\frac{d\psi}{dt},\\ q &= \sin\theta\cos\varphi\frac{d\psi}{dt},\\ r &= \frac{d\varphi}{dt}+\cos\theta\frac{d\psi}{dt};\end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} p_1 &= \sin\theta\sin\psi\frac{d\varphi}{dt},\\ q_1 &= -\sin\theta\cos\psi\frac{d\varphi}{dt},\\ r_1 &= \frac{d\psi}{dt}+\cos\theta\frac{d\varphi}{dt}.\end{aligned}\right.$$

Deux équations suffiront pour déterminer le mouvement; nous les obtiendrons en exprimant le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à Oz et à Oz_1; nous pourrions remplacer cette dernière équation par l'équation des forces vives, mais en vue du cas du frottement, il est plus commode de procéder ainsi que nous venons de le dire.

Quand on néglige les résistances passives, toutes les forces rencontrent l'axe Oz; l'équation des moments par rapport à cet axe sera donc

$$C\frac{dr}{dt} = 0,$$

d'où

$$(3)\qquad r = n,$$

n étant une constante déterminée par les conditions initiales. Pour écrire la seconde équation, nous avons besoin du moment du poids Mg par rapport à Oz_1; car si nous appelons N ce moment, l'équation, après des réductions faciles, s'écrit

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{A}\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt}+\mathrm{C}r\cos\theta\right)=\mathrm{N},$$

ou

$$(4)\qquad \mathrm{A}\sin^2\theta\,\frac{d^2\psi}{dt^2}=\mathrm{N},$$

puisque r et θ sont constants.

Appelons l la coordonnée z positive ou négative du centre de gravité; les coordonnées de C par rapport aux axes fixes seront, en grandeur et en signe,

$$l\sin\theta\sin\psi,\qquad -l\sin\theta\cos\psi,\qquad l\cos\theta;$$

d'autre part, les composantes de Mg par rapport aux mêmes axes sont

$$\mathrm{M}g\sin\lambda,\qquad 0,\qquad \mathrm{M}g\cos\lambda,$$

par suite

$$\mathrm{N}=\mathrm{M}gl\sin\theta\sin\lambda\cos\psi,$$

et la seconde équation est, en divisant par $\sin\theta$,

$$(5)\qquad \mathrm{A}\sin\theta\,\frac{d^2\psi}{dt^2}=\mathrm{M}gl\sin\lambda\cos\psi.$$

On peut l'intégrer une première fois et l'on obtient, en désignant par D une constante,

$$(6)\qquad \mathrm{A}\sin\theta\,\frac{d\psi^2}{dt^2}=2\mathrm{M}gl\sin\lambda\sin\psi+\mathrm{D}.$$

Les équations (3) et (6) déterminent φ et ψ par des quadratures.

Calculons maintenant N. Pour cela, considérons le trièdre $\mathrm{O}x_2y_2z$ comme lié au solide; son déplacement dépend uniquement de la rotation $\frac{d\psi}{dt}$ autour de $\mathrm{O}z_1$; nous allons écrire le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à $\mathrm{O}y_2$ supposée fixe. Il suffit d'écrire que la projection sur $\mathrm{O}y_2$ de la vitesse de l'extrémité de l'axe du couple résultant des quantités de mouvement de tous les éléments du corps est égale à la somme des moments de toutes les forces par rapport à cette droite.

Or, d'après une remarque précédente, les coordonnées de l'extrémité de l'axe du couple par rapport à Ox_2, Oy_2, Oz sont

$$-A(p\sin\varphi + q\cos\varphi) = -A\sin\theta\frac{d\psi}{dt}, \qquad 0 \qquad \text{et} \qquad Cr;$$

les composantes de la rotation $\frac{d\psi}{dt}$ qui déplace le trièdre sont

$$-\frac{d\psi}{dt}\sin\theta, \qquad 0, \qquad \frac{d\psi}{dt}\cos\theta;$$

la méthode de Bour nous donne donc comme projection de la vitesse sur Oy_2

$$-A\sin\theta\cos\theta\frac{d\psi^2}{dt^2} + C\sin\theta\, r\frac{d\psi}{dt};$$

reste à évaluer les moments de N et de Mg.

Si nous représentons OI par d et si nous considérons N comme positive quand elle est dirigée vers l'intérieur de la surface, le moment de N est $-Nd$. Les coordonnées du point d'application de Mg par rapport à Ox_2, Oy_2, Oz_2 sont 0, 0, l; les composantes de Mg sont $Mg\cos(L, x_2)$, $Mg\cos(L, y_2)$, $Mg\cos(L, z_2)$; donc son moment par rapport à Oy_2 est $Mgl\cos(L, x_2)$. Or nous avons

$$\cos(L, x_2) = \cos(L, x_1)\cos(x_2, x_1) \\ + \cos(L, y_1)\cos(x_2, y_1) + \cos(L, z_1)\cos(x_2, z_1).$$

Nous avons vu que

$$\cos(L, x_1) = \sin\lambda, \qquad \cos(L, y_1) = 0, \qquad \cos(L, z) = \cos\lambda;$$

de plus $\cos(x_2, z_1) = -\sin\theta$; il suffit donc de connaître $\cos(x_2, x_1)$.

Dans le trièdre rectangle Ox_2x_1E nous connaissons deux faces $x_2OE = \theta$, $x_1OE = \psi - \frac{\pi}{2}$, de sorte que

$$\cos(x_2, x_1) = \cos\theta \sin\psi,$$

et enfin

$$\cos(L, x_2) = \sin\lambda \cos\theta \sin\psi - \sin\theta \cos\lambda,$$

et N est donné par l'équation

$$(7) \quad \begin{aligned} &-A \sin\theta \cos\theta \frac{d\psi^2}{dt^2} + C \sin\theta\, r \frac{d\psi}{dt} \\ &\quad = -Nd + Mgl(\sin\lambda \cos\theta \sin\psi - \sin\theta \cos\lambda). \end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que l'équation (7) subsistera quand nous tiendrons compte du frottement, car la force de frottement étant dirigée suivant la tangente commune au parallèle et au cercle fixe en I est parallèle à Oy_2, de sorte que son moment par rapport à cette droite est nul ; mais les équations (3) et (4) n'auront plus lieu, car nous aurons à tenir compte dans l'évaluation des moments par rapport à Oz et Oz_1 de la force de frottement.

Il est clair d'autre part que les équations, dans l'un et l'autre cas, ne correspondent au mouvement que tout autant que la valeur de N que l'on déduira de (7) sera positive, dans l'hypothèse où nous nous sommes placé d'un contact intérieur.

Il va nous être facile maintenant d'établir les équations du mouvement en tenant compte du frottement de glissement.

Soient x, y, z d'une part, u, v, w d'autre part, les coordonnées et les composantes de la vitesse du point I du corps solide par rapport aux axes mobiles, $x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1$ les quantités correspondantes par rapport aux axes fixes. Nous aurons, d'après des remarques déjà faites,

$$x = -\rho \sin\varphi, \qquad y = -\rho \cos\varphi, \qquad z = h,$$
$$x_1 = \mathrm{R} \sin\psi, \qquad y_1 = = \mathrm{R} \cos\psi, \qquad z_1 = h';$$

donc

$$(8) \quad \begin{cases} u = qz - ry = \cos\varphi\left(h \sin\theta \dfrac{d\psi}{dt} + \rho r\right), \\ v = rx - pz = -\sin\varphi\left(h \sin\theta \dfrac{d\psi}{dt} + \rho r\right); \end{cases}$$

quant à w, il est nul, comme on devait s'y attendre.

De même,

$$(9) \quad \begin{cases} u_1 = q_1 z_1 - r_1 y_1 = \cos\psi\left(\mathrm{R} r_1 - h' \sin\theta \dfrac{d\varphi}{dt}\right), \\ v_1 = r_1 x_1 - p_1 z_1 = \sin\psi\left(\mathrm{R} r_1 - h \sin\theta \dfrac{d\varphi}{dt}\right), \end{cases}$$

et $w_1 = 0$.

Avant d'aller plus loin, nous voyons que la vitesse du point I est la valeur absolue de l'une ou l'autre des deux expressions

$$h \sin\theta \frac{d\psi}{dt} + \rho r, \qquad \mathrm{R} r_1 - h' \sin\theta \frac{d\varphi}{dt},$$

de sorte que, en égalant dans ces deux expressions les coefficients de $\frac{d\psi}{dt}$ et de $\frac{d\varphi}{dt}$, nous avons ces relations que, du reste, la figure permet d'établir directement,

$$(10) \quad \begin{cases} \rho = \mathrm{R} \cos\theta - h' \sin\theta, \\ \mathrm{R} = h \sin\theta + \rho \cos\theta. \end{cases}$$

Nous avons ρ en fonction de R et de h'; calculons aussi h en fonction de ces mêmes quantités; nous trouvons aisément

$$(11) \qquad h = \mathrm{R} \sin\theta + h' \cos\theta.$$

Ces relations (10) et (11) nous seront utiles.

Il nous est facile d'avoir maintenant les composantes X, Y et X_1, Y_1 de la force de frottement dans les deux systèmes d'axes (Z et Z_1 sont nuls).

Posons $h \sin\theta \frac{d\psi}{dt} + \rho r = V$, et appelons (V) la valeur absolue de V; nous aurons, f étant le coefficient de frottement,

$$\frac{X}{-u} = \frac{Y}{-v} = \frac{fN}{(V)},$$
$$\frac{X_1}{-u_1} = \frac{Y_1}{-v_1} = \frac{fN}{(V)}.$$

Si nous appelons K la quantité positive $\frac{fN}{(V)}$, nous aurons donc

$$X = -Ku, \qquad Y = -Kv,$$
$$X_1 = -Ku_1, \qquad Y_1 = -Kv_1;$$

les moments de cette force par rapport à Oz et à Oz_1 sont

$$\begin{aligned} xY - yX &= -K(xv - yu) \\ &= -K\rho\left(h \sin\theta \frac{d\psi}{dt} + \rho r\right) = -K\rho V, \\ x_1 Y_1 - y_1 X_1 &= -K(x_1 v_1 - y_1 u_1) \\ &= -KR\left(R r_1 - h' \sin\theta \frac{d\psi}{dt}\right) = -KRV, \end{aligned}$$

d'après les remarques faites plus haut.

Les équations du mouvement seront donc

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & C\frac{dr}{dt} = -K\rho V, \\ & A \sin^2\theta \frac{d^2\psi}{dt^2} - C\cos\theta \frac{dr}{dt} \\ & \qquad = -KRV + Mgl \sin\lambda \sin\theta \cos\psi. \end{aligned} \right.$$

Si nous éliminons K entre ces équations (12), nous obtenons

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \rho\left(A \sin^2\theta \frac{d^2\psi}{dt^2} + C\cos\theta \frac{dr}{dt} - Mgl \sin\lambda \sin\theta \cos\psi\right) \\ & \qquad\qquad - RC\frac{dr}{dt} = 0. \end{aligned} \right.$$

Entre les mêmes équations (12), éliminons $\frac{dr}{dt}$, nous aurons

$$A \sin^2\theta \frac{d^2\psi}{dt^2} - Mgl \sin\lambda \sin\theta \cos\psi = -KV(R - \rho\cos\theta),$$

ou, en nous servant de (10) et divisant par $\sin\theta$,

$$(14) \qquad A \sin\theta \frac{d^2\psi}{dt^2} - Mgl \sin\lambda \cos\psi = -KhV.$$

D'autre part, (13) peut s'écrire, en tenant compte des mêmes relations et divisant encore par $\sin\theta$,

$$(15) \qquad \rho A \sin\theta \frac{d^2\psi}{dt^2} - Ch \frac{dr}{dt} - \rho Mgl \sin\lambda \cos\psi = 0.$$

Les équations (14) et (15), quand nous aurons remplacé dans la première K par sa valeur, seront les équations du problème.

Mais $K = \frac{fN}{(V)}$, donc $KV = \pm fN$, suivant que $V \gtrless 0$. Appelons ω la valeur initiale de $\frac{d\psi}{dt}$, ω' celle de $\frac{d\varphi}{dt}$, et posons

$$V_0 = h \sin\theta\omega + \rho r_0 = (h \sin\theta + \rho\cos\theta)\omega + \rho\omega',$$

le signe de V_0 fixera celui qu'on devra prendre à l'origine. Les équations du problème seront donc enfin

$$(16) \qquad \rho A \sin\theta \frac{d^2\psi}{dt^2} - Ch \frac{dr}{dt} - \rho Mgl \sin\lambda \cos\psi = 0,$$

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} & A \sin\theta \frac{d^2\psi}{dt^2} - Mgl \sin\lambda \cos\psi \\ & \quad = \mp \frac{fh}{d} \left[A \sin\theta \cos\theta \frac{d\psi^2}{dt^2} - C \sin\theta\, r \frac{d\psi}{dt} \right. \\ & \qquad \left. + Mgl(\sin\lambda \cos\theta \sin\psi - \sin\theta \cos\lambda) \right], \end{aligned} \right.$$

avec le signe — ou le signe + dans (17) suivant que V_0 sera > 0 ou < 0.

Si le corps devait presser sur le cercle à son extérieur, les équations seraient encore les mêmes, mais on devrait changer dans la seconde le signe de d, car le moment de N aurait changé de signe, tout en étant donné par la même équation.

La forme des équations (16) et (17) nous montre que, dans le cas général, la solution du problème exigerait l'intégration d'une équation différentielle fort compliquée du troisième ordre; nous verrons que, si $\lambda = 0$ ou π, le calcul peut être fait et la question complètement discutée; mais nous pouvons signaler un cas où l'on n'aurait à intégrer qu'une équation différentielle du second ordre : c'est celui où θ et λ seraient tous les deux égaux à $\frac{\pi}{2}$; dans ce cas, le cercle est vertical; l'axe du corps se déplace dans un plan parallèle à celui du cercle, de sorte que le contact doit être extérieur. Les équations deviennent alors, en tenant compte de ce que nous avons dit relativement à N et de ce que $\rho = h$:

$$N = \frac{C\dfrac{d\varphi}{dt}\dfrac{d\psi}{dt}}{d},$$

$$A\frac{d^2\psi}{dt^2} - C\frac{d^2\varphi}{dt^2} - Mgl\cos\psi = 0,$$

$$A\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{Cfh}{d}\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt} - Mgl\cos\psi = 0,$$

en supposant $V > 0$.

Si l'on retranche les deux dernières, on obtient

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{fh}{d}\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt} = 0$$

qu'on peut intégrer et qui donne

$$\frac{d\varphi}{dt} = ke^{-\frac{fh}{d}\psi},$$

K étant une constante déterminée par les données initiales. Alors l'équation à intégrer sera

$$(18) \qquad A\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{CKfh}{d}e^{-\frac{fh}{d}\psi}\frac{d\psi}{dt} - Mgl\cos\psi = 0.$$

Les équations, comme le montre la valeur de N, ne conviennent au problème que tout autant que $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\psi}{dt}$ sont de même signe.

Si nous supposons qu'il en soit ainsi au début, le corps pressera sur le cercle. La valeur trouvée pour $\frac{d\varphi}{dt}$ montre que cette dérivée ne change pas de signe; il n'y a donc à discuter que $\frac{d\psi}{dt}$. Si le coefficient de frottement f était très petit, on pourrait intégrer (18) par approximations successives et suivre la variation de $\frac{d\psi}{dt}$; mais c'est un calcul sur lequel nous n'insisterons pas. On pourrait intégrer si l était nul, mais ce cas rentre comme cas particulier dans celui où λ est égal à 0 ou à π, cas que nous allons discuter complètement.

Supposons le contact intérieur et $\lambda = \pi$, c'est-à-dire le cercle R horizontal et au-dessus du point fixe. Les équations (16) et (17) deviennent, en supposant d'abord pour fixer les idées, $V_0 > 0$,

$$(19) \qquad \rho A\sin\theta\frac{d^2\psi}{dt^2} = -Ch\frac{dr}{dt},$$

$$(20) \qquad A\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{fh}{d}\left(A\cos\theta\frac{d\psi^2}{dt^2} - Cr\frac{d\psi}{dt} + Mgl\right).$$

Il faudrait changer le signe du second membre de cette dernière si V_0 était < 0.

(19) s'intègre une première fois et donne

$$\rho A\sin\theta\frac{d\psi}{dt} - Chr = H,$$

avec

$$H = \rho A \sin\theta\omega - C h r_0 = \rho A \sin\theta\omega - C h(\omega' + \omega\cos\theta).$$

Nous en déduisons

$$r = \frac{\rho A \sin\theta \dfrac{d\psi}{dt} - H}{C h},$$

et (20) devient, après des réductions simples,

$$A\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{fh}{d}\left[\frac{A(h\cos\theta - \rho\sin\theta)}{h}\frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{H}{h}\frac{d\psi}{dt} + Mgl\right].$$

Or nous avons vu que

$$h = R\sin\theta + h'\cos\theta,$$
$$\rho = R\cos\theta - h'\sin\theta;$$

donc

$$h\cos\theta - \rho\sin\theta = h',$$

et enfin l'équation à intégrer devient

$$(21)\quad \begin{cases} A\dfrac{d^2\psi}{dt^2} = -\dfrac{fh}{d}\left(\dfrac{Ah'}{h}\dfrac{d\psi^2}{dt^2} + \dfrac{H}{h}\dfrac{d\psi}{dt} + Mgl\right) \\ \qquad\quad = -\dfrac{fhF}{d}\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right), \end{cases}$$

$F\left(\frac{d\psi}{dt}\right)$ étant le trinome entre parenthèses.

On pourrait l'intégrer complètement, mais il est plus commode de discuter sans effectuer l'intégration.

l peut être positif ou négatif; nous le supposerons positif pour fixer les idées. Alors toutes les lettres qui entrent dans l'équation sont des quantités positives, sauf H, qui pourra avoir les deux signes, suivant les circonstances initiales.

La valeur initiale de N étant supposée positive, $F(\omega)$ est > 0, de sorte que, pour $t = 0$, $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ est < 0, et $\frac{d\psi}{dt}$ décroît à partir de ω.

Soit ω_1 la valeur de $\frac{d\psi}{dt}$ qui annulerait le glissement, c'est-à-dire pour laquelle V serait nul. Si ω'_1 et r_1 sont les valeurs correspondantes de $\frac{d\varphi}{dt}$ et de r, nous aurons

$$h \sin\theta\omega_1 + \rho r_1 = 0,$$
$$\rho A \sin\theta\omega_1 - C h r_1 = H,$$

d'où

$$(22) \qquad \omega_1 = \frac{\rho H}{(Ch^2 + A\rho^2)\sin\theta}.$$

et ω_1 a le signe de H.

Remarquant que ω_1 doit être égal à ω si $V_0 = 0$, il est naturel de calculer $\omega_1 - \omega$. En remplaçant H par sa valeur $\rho A \sin\theta\omega - Ch(\omega' + \omega\cos\theta)$, on trouve sans difficulté

$$(23) \qquad \omega_1 - \omega = \frac{-ChV_0}{(Ch^2 + A\rho^2)\sin\theta}.$$

$\omega_1 - \omega$ est donc de signe contraire à V_0, c'est-à-dire qu'il est négatif dans le cas présent, puisque nous avons supposé $V_0 > 0$ et $\omega_1 < \omega$.

Dès lors, si $H > 0$, ω_1 et *a fortiori* ω sont positifs, $\frac{d\psi}{dt}$ décroîtra de ω à ω_1, atteindra cette valeur après un temps fini qu'il serait facile de calculer; pendant ce temps, le trinome $F\left(\frac{d\psi}{dt}\right)$ reste positif et le corps presse toujours sur le cercle. Quand $\frac{d\psi}{dt}$ devient égal à ω_1, X et Y s'annulent, le mouvement devient un roulement sans glissement, et, comme nous négligeons le frottement de roulement, ce roulement se continuera indéfiniment avec une vitesse constante. Avant de passer au cas où H serait < 0, nous pouvons démontrer que le roulement que nous venons d'obtenir est un roulement stable. Pour cela, supposons $V_0 < 0$, mais $H > 0$; alors, dans (21), nous devons prendre le second membre avec le signe $+$, de sorte que $\frac{d\psi}{dt}$ croît; (23) montre que $\omega_1 > \omega$; dès lors, si $\omega > 0$, comme $F\left(\frac{d\psi}{dt}\right)$ ne s'annule pour aucune valeur positive de $\frac{d\psi}{dt}$, cette dernière croîtra de ω à ω_1 et nous aurons encore un roulement au bout d'un temps fini.

Cela posé, revenons au cas précédent et supposant que $\frac{d\psi}{dt}$ a atteint la valeur ω_1, de sorte que le mouvement est devenu un roulement, donnons à $\frac{d\psi}{dt}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$ des valeurs $\omega_1 + \varepsilon$, $\omega'_1 + \varepsilon'$, ε et ε' étant des quantités de signes quelconques aussi petites que l'on voudra; il est clair que H n'aura pas changé de signe. Si la petite vitesse de glissement que nous avons communiquée au corps est > 0, le premier raisonnement nous montre que le mouvement redeviendra très rapidement un roulement, et le second montre de même qu'il en sera encore ainsi si la vitesse est négative. Le roulement est donc stable.

Revenons maintenant à l'hypothèse $V_0 > 0$, mais supposons $H < 0$; alors ω_1 est encore $< \omega$, mais il est négatif; si $\omega < 0$, comme $F\left(\frac{d\psi}{dt}\right)$ ne s'annule en ce cas pour aucune valeur negative de $\frac{d\psi}{dt}$, cette dernière décroîtra encore de ω à ω_1 et l'on obtiendra un roulement; il en sera de même quel que soit le signe de ω si $F\left(\frac{d\psi}{dt}\right)$ a ses racines imaginaires ou si, ces racines étant réelles et, par suite, positives, ω est inférieur à la plus petite; mais les choses peuvent se présenter autrement : ω ne peut être compris entre les racines ω_2 et ω_3 de $F\left(\frac{d\psi}{dt}\right)$, mais il pourrait être supérieur à la plus grande ω_3;

alors $\frac{d\psi}{dt}$ décroîtrait de ω à ω_3; la forme de l'équation différentielle montre du reste que $\frac{d\psi}{dt}$ ne pourrait devenir égal à ω_3 qu'après un temps infini; le corps tendrait donc vers une position limite pour laquelle il n'exercerait plus de pression sur le cercle, mais n'atteindrait jamais cette position. Le glissement persisterait toujours. Il est facile de voir, du reste, que le corps accomplirait une infinité de révolutions autour de la verticale, car nous aurions toujours

$$\frac{d\psi}{dt} - \omega_3 > 0;$$

par suite

$$\psi - \psi_0 - \omega_3 t$$

serait une fonction croissante avec le temps; et, comme elle s'annule pour $t = 0$, on aurait constamment

$$\psi - \psi_0 - \omega_3 t > 0,$$

ce qui prouve que ψ pourrait augmenter indéfiniment.

Il reste à voir que ce cas peut se présenter.

Les inégalités auxquelles les constantes de la question devront satisfaire sont les suivantes :

$$\omega > 0,$$

$$A\frac{h'}{h}\omega^2 + \frac{(\rho A\sin\theta - Ch\cos\theta)\omega - Ch\omega'}{h}\omega + Mgl > 0,$$

$$(\rho A\sin\theta - Ch\cos\theta)\omega - Ch\omega' < 0,$$

$$[(\rho A\sin\theta - Ch\cos\theta)\omega - Ch\omega']^2 - 4AMglhh' > 0,$$

$$(2Ah' + \rho A\sin\theta - Ch\cos\theta)\omega - Ch\omega' > 0.$$

Si nous remplaçons dans la seconde et la cinquième h' par sa valeur $h\cos\theta - \rho\sin\theta$, elles deviennent

$$(A - C)\cos\theta\omega^2 - C\omega\omega' + Mgl > 0,$$

$$[(2A - C)h\cos\theta - \rho A\sin\theta]\omega - Ch\omega' > 0.$$

Or nous pouvons supposer $A > C$ et θ aussi petit que nous voudrons pourvu qu'il ne soit pas nul ; alors il devient évident qu'on peut satisfaire aux inégalités en prenant ω' négatif et ω positif suffisamment grand. Dans ces conditions, nous aurons un mouvement dans lequel le glissement ne s'annulera jamais.

Le cas où $V_0 < o$ se discuterait de la même manière et présenterait des circonstances analogues.

Nous allons terminer par l'étude d'un cas particulier intéressant, celui où $h' = o$. Ce cas aurait une réalisation simple par un cercle tournant autour de son sommet et roulant sur un cercle horizontal ayant pour centre le sommet et au-dessus duquel il serait placé. d devenant égal à R, l'équation sera

$$(24) \qquad A\frac{d^2\psi}{dt^2} = \mp \frac{fh}{R}\left(\frac{H}{h}\frac{d\psi}{dt} + Mgl\right),$$

suivant que V sera $>$ ou $<$ o. Supposons d'abord $V > o$, c'est-à-dire que nous prenions le signe —. Les formules (23) et (24) qui donnent ω_1 et $\omega_1 - \omega$ subsistent et montrent que $\omega_1 < \omega$.

Si $H > o$, $\frac{d\psi}{dt}$ qui décroît est $> o$, car il est supérieur à ω_1 qui est lui-même positif; quand il arrive à la valeur ω_1, le mouvement devient un roulement sans glissement.

Si $H < o$ mais $\frac{H}{h}\omega + Mgl > o$, ω_1 est $< o$; d'autre part, $\frac{H}{h}\omega_1 + Mgl > o$, d'après la formule (23) qui donne ω_1; $\frac{d\psi}{dt}$ peut donc décroître de ω à ω_1, sans que le corps cesse de presser sur le cercle; quand $\frac{d\psi}{dt}$ devient égal à ω_1, le mouvement devient un roulement sans glissement.

Si $H = 0$, la seule différence est que $\omega_1 = 0$; pendant que le corps glisse, on a

$$A\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{fh}{R}Mgl,$$

c'est-à-dire que l'angle ψ varie pour ainsi dire d'une façon uniformément accélérée, suivant la formule

$$A(\psi - \psi_0) = -\frac{fhMgl}{R}\frac{t_2}{2} + A\omega t.$$

Nous verrions de même que, quand $V_0 < 0$, le mouvement devient un roulement sans glissement.

Remarquons que, dans les deux cas, si l'on suppose $H = 0$, le corps tend vers une position limite pour laquelle on a

$$\frac{d\psi}{dt} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

et dans laquelle il demeurera par suite en repos. Il atteint du reste cette position limite après un temps fini et facile à calculer.

Les intégrales, quand $h' = 0$, se présentent sous une forme simple qui se prête facilement au calcul, et même à la discussion.

En supposant encore $V_0 > 0$, l'équation s'écrit

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{fH}{AR}\frac{d\psi}{dt} = -\frac{fhMgl}{AR}.$$

On en déduit

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{hMgl}{H} + Ke^{-\frac{fH}{AR}t},$$

K étant une constante déterminée par l'équation

$$\omega = -\frac{hMgl}{H} + K,$$

de sorte que

$$(25) \qquad \frac{d\psi}{dt} = -\frac{hMgl}{H} + \left(\omega + \frac{hMgl}{H}\right)e^{-\frac{fH}{AR}t}$$

et

$$(26)\quad \psi - \psi_0 = -\frac{h M g l}{H} t - \frac{AR\left(\omega + \frac{h M g l}{H}\right)}{f H}\left(e^{-\frac{fH}{AR}t} - 1\right).$$

Supposant par exemple $H > 0$, calculons le temps τ pendant lequel le corps glissera. Il sera donné par l'équation

$$\omega_1 = -\frac{h M g l}{H} + \left(\omega + \frac{h M g l}{H}\right) e^{-\frac{fH}{AR}\tau}$$

ou

$$\tau = \frac{AR}{fH} \log \frac{\omega + h\frac{M g l}{H}}{\omega_1 + h\frac{M g l}{H}},$$

et l'on voit que τ est bien positif, car nous savons que ω_1, dont nous avons la valeur, est $< \omega$ et ils sont positifs tous les deux.

Si H est < 0, nous supposons que

$$H\omega + h M g l > 0,$$

et, comme ω_1 est $< \omega$, il est clair que

$$H\omega_1 + h M g l > H\omega + h M g l.$$

Or ici nous aurons

$$e^{-\frac{fH}{AR}\tau} = \frac{H\omega_1 + h M g l}{H\omega + h M g l},$$

et comme $H < 0$, cette équation fournit bien une valeur positive pour τ.

Nous verrions de même le cas où $V_0 < 0$.

Remarque. — Nous avons vu que la composante normale de la pression que le corps exerce sur le cercle au point de contact est indéterminée, son moment seul par rapport au point fixe entrant dans les équations.

Cette indétermination, purement mathématique, est du genre de celle qu'on rencontre dans le mouvement d'un solide autour d'un axe fixe. Nous avons supposé la pression effectuée perpendiculaire à la droite d'appui OI; mais les équations conserveraient leur forme et les résultats que nous en avons déduits subsisteraient si la direction de cette pression, sans être perpendiculaire à OI, faisait avec cette droite un angle constant. Il ne saurait en être autrement si, en supposant que la direction de cette pression ne dépend que des corps au contact, la vitesse de glissement était constante. L'hypothèse faite revient donc à supposer que cette direction est indépendante de la vitesse de glissement, ce qui est conforme à la théorie du frottement.

Si nous supposons que la surface qui limite le corps est une surface convexe, elle pourra être considérée comme roulant à l'intérieur d'un cône de révolution ayant pour base le cercle R et pour sommet le point commun où les plans tangents à la surface aux points I de contact successifs rencontrent l'axe Oz_1 de ce cercle. On pourrait supposer N normale à ce cône, mais il y aurait un cas d'exception, celui où OI serait normale à la surface, et où cette dernière, dans le voisinage du point I, serait extérieure à la sphère de rayon OI. Car dans ce cas, avec l'hypothèse faite, le moment de la réaction N serait toujours nul et, si l'on négligeait le frottement, le corps devrait toujours se mouvoir comme s'il était simplement fixé par le point O, ce qui est impossible.