C. BOURLET

Condition pour que deux quadriques aient une génératrice commune

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 434-442

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__434_1>

CONDITION POUR QUE DEUX QUADRIQUES AIENT UNE GÉNÉRATRICE COMMUNE;

Par M. C. BOURLET,
Docteur ès Sciences mathématiques.

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que deux surfaces du second degré aient au moins une génératrice commune est que le premier membre de l'équation en* λ *relative à ces deux surfaces soit carré parfait.*

Lorsqu'on a fait une étude complète de l'équation en λ relative à deux quadriques, la proposition précédente peut être énoncée sous forme de corollaire. Il suffirait, pour cela, de remarquer que, toutes les fois que l'équation en λ est *carré parfait*, il y a *au moins une* génératrice commune et que, dans tous les autres cas, il n'y a pas de génératrice commune.

A cause de la simplicité de l'énoncé précédent, il nous a semblé intéressant d'en donner une démonstration directe.

Nous rappellerons, d'abord, deux propositions bien connues dont nous ferons usage.

Proposition I. — *Les racines de l'équation en* λ *relative à deux quadriques ne changent pas quand on change les axes de coordonnées.*

Proposition II. — *Étant données deux surfaces du second ordre dont les équations sont*

$$S = 0, \qquad \Sigma = 0,$$

si l'on remplace l'une des deux surfaces, $S = 0$, *par exemple, par une surface passant par leur intersection, ayant pour équation*

$$S_1 \equiv S + \lambda_1 \Sigma = 0,$$

l'équation en λ *obtenue en égalant à zéro le hessien de* $S_1 + \lambda\Sigma$ *se déduit de l'équation en* λ *obtenue en égalant à zéro le hessien de* $S + \lambda\Sigma$ *en diminuant toutes les racines de la quantité* λ_1.

Ainsi, l'équation en λ relative aux quadriques S_1 et Σ se déduisant de l'équation relative aux quadriques S et Σ en remplaçant λ par $\lambda + \lambda_1$, ce changement ne modifiera pas l'ordre de multiplicité des racines et, pour faire notre démonstration, nous pourrons toujours remplacer l'une des deux surfaces, $S = 0$ par exemple, par une surface quelconque passant par l'intersection : en particulier par un *cône* (ou un *cylindre*), et, de plus, nous pourrons prendre tels axes qu'il nous plaira.

Avant d'établir la proposition énoncée nous démontrerons le lemme suivant :

Lemme. — *Lorsqu'à une racine multiple de l'équation en* λ *relative à deux quadriques correspond un cône proprement dit :*

1° *Si cette racine est double, le sommet du cône se trouve sur l'intersection des deux quadriques (qui sont tangentes en ce point);*

2° *Si cette racine est triple, le sommet du cône est sur l'intersection, les quadriques sont tangentes en ce* *point, et, en outre, le plan tangent commun est tangent au cône;*

3° *Si la racine est quadruple, les deux quadriques ont, de plus, une génératrice commune qui est la génératrice de contact du plan tangent commun avec le cône.*

Soient $S = 0$, $\Sigma = 0$ les deux quadriques et $C = 0$ l'équation du cône, proprement dit, passant par l'intersection. D'après la proposition II, nous pouvons remplacer la surface S par le cône C et, d'après la proposition I, nous pouvons prendre des axes tels que le sommet du cône soit l'origine des coordonnées.

Soit alors

$$C = \alpha x^2 + \alpha' y^2 + \alpha'' z^2 + 2\beta yz + 2\beta' zx + 2\beta'' xy = 0$$

l'équation développée du cône et désignons par Δ le discriminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta'' & \beta' \\ \beta'' & \alpha' & \beta \\ \beta' & \beta & \alpha'' \end{vmatrix}$$

qui est *différent de zéro*, d'après l'hypothèse.

Soit

$$\begin{aligned}\Sigma = {} & ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz \\ & + 2b'zx + 2b''xy + 2cx + 2c'y + 2c''z + d = 0\end{aligned}$$

l'équation développée de la surface Σ et désignons par H le hessien

$$H = \begin{vmatrix} a & b'' & b' & c \\ b'' & a' & b & c' \\ b' & b & a'' & c'' \\ c & c' & c'' & d \end{vmatrix}.$$

Le hessien de $C + \lambda\Sigma$ égalé à zéro donne alors l'équation

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta\, d\lambda &+ \lambda^2 \left[\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha}(ad - c^2) + \frac{\partial\Delta}{\partial\alpha'}(a'd - c'^2)\right.\\ &\quad + \frac{\partial\Delta}{\partial\alpha''}(a''d - c''^2) + \frac{\partial\Delta}{\partial\beta}(bd - c'c'')\\ &\quad \left. + \frac{\partial\Delta}{\partial\beta'}(b'd - c''c) + \frac{\partial\Delta}{\partial\beta''}(b''d - cc')\right]\\ &+ \lambda^3 \left[\frac{\partial H}{\partial a}\alpha + \frac{\partial H}{\partial a'}\alpha' + \frac{\partial H}{\partial a''}\alpha''\right.\\ &\quad \left. + \frac{\partial H}{\partial b}\beta + \frac{\partial H}{\partial b'}\beta' + \frac{\partial H}{\partial b''}\beta''\right] + \lambda^4 H = 0. \end{aligned}\right.$$

La racine $\lambda = 0$ est celle qui correspond au cône C.

1° Pour que la racine $\lambda = 0$ soit racine *double*, il faut et il suffit que l'on ait $\Delta d = 0$ et, comme $\Delta \neq 0$, cela donne $d = 0$. La quadrique Σ passe donc par l'origine des coordonnées, c'est-à-dire par le sommet du cône. Il en est de même de la surface S. Donc il faut et il suffit que le sommet du cône soit sur l'intersection.

2° La racine $\lambda = 0$ étant racine double, nous pouvons prendre pour plan des xy le plan tangent au sommet du cône à la surface $\Sigma = 0$; cela revient à faire

$$d = c = c' = 0$$

dans l'équation $\Sigma = 0$, c'' *étant différent de zéro*. L'équation en λ (1) prend alors la forme plus simple

$$(2)\quad -\lambda^2 \frac{\partial\Delta}{\partial\alpha''} c''^2 + \lambda^3 \left[\frac{\partial H}{\partial a}\alpha + \frac{\partial H}{\partial a'}\alpha' + \frac{\partial H}{\partial b''}\beta''\right] + \lambda^4 H = 0.$$

Pour que $\lambda = 0$ soit racine *triple*, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha''} c''^2 = 0,$$

et, comme $c'' \neq 0$, cela entraîne

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha''} = \alpha\alpha' - \beta''^2 = 0.$$

Cela exprime que le plan $z = 0$, c'est-à-dire le plan tangent à la quadrique Σ, est aussi tangent au cône C.

3° La racine $\lambda = 0$ étant racine triple, nous pouvons prendre comme axe des x la génératrice de contact du plan $z = 0$ avec le cône C, on a alors $\alpha = \beta'' = 0$ et l'équation en λ se réduit à

$$(3) \qquad \lambda^3 \frac{\partial H}{\partial a'} \alpha' + \lambda^4 H = 0.$$

On voit, enfin, que, pour que $\lambda = 0$ soit racine *quadruple*, il faut et il suffit que l'on ait, en outre,

$$\frac{\partial H}{\partial a'} \alpha' = 0.$$

Or, le cône C étant un cône proprement dit, α' est différent de zéro, donc il reste

$$\frac{\partial H}{\partial a'} = - a c''^2 = 0,$$

ce qui donne, puisque $c'' \neq 0$, la condition $a = 0$ qui exprime que l'axe des x est situé sur la surface Σ, c'est-à-dire que le cône C et la surface Σ ont une génératrice commune, qui est la génératrice de contact du plan tangent commun au cône.

Remarque. — Nous avons supposé, dans ce lemme, que le cône correspondant à la racine considérée était un cône proprement dit ($\Delta \neq 0$); il est aisé de voir ce qui arrive quand le cône se décompose en un système de plans.

Supposons, d'abord, que le cône correspondant à la racine considérée soit un système de deux plans *distincts* et prenons ces deux plans pour plans des yz et des zx.

L'équation du cône est alors

$$C \equiv xy = 0.$$

et l'équation en λ est

$$-(a''d - c''^2)\lambda^2 + \frac{\partial H}{\partial b''}\lambda^3 + \lambda^4 H = 0.$$

La racine correspondant au système de plans, $\lambda = 0$, est donc toujours racine double, ce qui était évident puisqu'elle annule tous les mineurs du hessien de $C + \lambda\Sigma$. Pour qu'elle soit racine *triple*, il faut et il suffit que l'on ait

$$a''d - c''^2 = 0,$$

ce qui exprime que l'axe des z, c'est-à-dire l'intersection des deux plans, est tangent à la quadrique $\Sigma = 0$.

La racine étant *triple*, nous pouvons prendre pour origine des coordonnées le point de contact de l'axe des z avec la quadrique Σ, ce qui donne

$$d = c'' = 0,$$

et l'équation en λ devient

$$2cc'a''\lambda^3 + \lambda^4 H = 0.$$

Pour que $\lambda = 0$ soit racine *quadruple*, il faut que l'on ait soit $c = 0$ ou $c' = 0$, soit $a'' = 0$.

Dans le premier cas, l'un des deux plans $x = 0$ ou $y = 0$, c'est-à-dire un des deux plans qui forment le cône C, est tangent à la quadrique Σ et il coupe Σ *suivant deux génératrices qui font partie de l'intersection.*

Dans le second cas, l'axe des z, c'est-à-dire l'intersection des deux plans, est situé tout entier sur Σ. Les deux plans coupent, chacun, la quadrique Σ suivant l'axe des z et une autre génératrice. *L'intersection se compose de trois génératrices, dont une double.*

Supposons, enfin, que le cône correspondant à la racine considérée soit un plan double. Prenons ce plan pour plan des xy,

$$C \equiv z^2 = 0.$$

L'équation en λ devient

$$\frac{\partial H}{\partial a''}\lambda^3 + H\lambda^4 = 0.$$

La racine $\lambda = 0$ est toujours au moins racine *triple* (ce qui était évident). Pour qu'elle soit en outre racine *quadruple,* il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial H}{\partial a''} = 0,$$

ce qui exprime que le plan $z = 0$ est *tangent* à la quadrique Σ. Il coupe la quadrique suivant deux génératrices, et *l'intersection se compose uniquement de ces deux génératrices* (*doubles*).

Démonstration : 1° *La condition est nécessaire.* — Soient en effet $S = 0$ et $\Sigma = 0$ deux quadriques ayant une génératrice commune. Par leur intersection il passe au moins un cône (ou cylindre) $C = 0$; pour démontrer que le hessien de $S + \lambda\Sigma$ est carré parfait, il suffit, d'après la proposition II, de prouver que cela a lieu pour le hessien de $C + \lambda\Sigma$.

D'ailleurs, d'après la proposition I, nous pouvons prendre pour origine des coordonnées le sommet du cône C, et comme axe des z la génératrice commune. Soient alors

$$C \equiv \alpha x^2 + \alpha' y^2 + \alpha'' z^2 + 2\beta yz + 2\beta' zx + 2\beta'' xy = 0,$$
$$\Sigma \equiv ax^2 + a'yz + 2byz + 2b'zx + 2b''xy + 2cx + 2c'y = 0$$

les équations du cône et de la quadrique Σ, l'équation en λ est

$$[\lambda(\beta' c' - \beta c) + \lambda^2(b'c' - bc)]^2 = 0,$$

qui est bien *carré parfait.*

2° *La condition est suffisante.* — Supposons, en effet, que l'équation en λ, relative à deux quadriques

S et Σ soit carré parfait. Cela peut avoir lieu dans deux circonstances : ou bien si l'équation a *deux racines doubles* ou si elle a *une racine quadruple*.

Si l'équation a *deux racines doubles*, il y a trois cas à considérer :

(a) Les deux cônes C_1 et C_2 correspondant aux deux racines doubles sont deux cônes proprement dits. Alors, d'après le lemme, leurs sommets s_1 et s_2 sont chacun sur l'intersection et, comme chacun des cônes passe par cette intersection, le sommet s_1 est sur le cône C_2 et s_2 sur C_1. La droite $s_1 s_2$ est donc *une génératrice commune* aux deux cônes et fait partie de l'intersection.

(b) Le cône C_1 est un cône proprement dit et le cône C_2 se compose d'un système de plans. D'après le lemme, le sommet s_1 de C_1, étant sur l'intersection, est situé dans l'un des deux plans de C_2, lequel coupe le cône C_1 suivant *deux génératrices qui font partie de l'intersection*.

(c) Les deux cônes C_1 et C_2 se décomposent chacun en un système de deux plans. L'intersection se compose alors de *quatre génératrices* qui sont les droites d'intersection de ces deux couples de plans deux à deux.

Si l'équation en λ *a une racine quadruple*, à cette racine il peut correspondre un cône proprement dit, un système de deux plans distincts ou un plan double. Or nous avons vu dans le lemme et la remarque qui suit, que, dans ces trois cas, il y a *au moins une* génératrice commune.

Donc, dans tous les cas où l'équation en λ est carré parfait, il y a au moins une génératrice commune et la condition est suffisante.

Remarque I. — Nous avons négligé les cas où, au lieu d'un cône, on aurait un *cylindre;* on pourrait déduire le cas du cylindre du cas du cône comme *cas* *limite*, et il serait d'ailleurs facile de l'étudier directement.

Remarque II. — Dans la démonstration précédente, nous avons énuméré tous les cas où il peut y avoir une génératrice commune. Lorsqu'on aura reconnu que l'équation en λ est carré parfait, il sera facile d'avoir la génératrice commune, car on aura, par des calculs élémentaires, les racines de l'équation en λ et, par suite, les cônes correspondants.

Remarque III. — Le lemme et la remarque qui suit pourraient servir de base à une étude complète et méthodique de l'équation en λ relative à deux quadriques. On aurait ainsi une méthode *simple* tout à fait analogue à celle qu'a donnée M. Darboux pour l'étude de l'équation en λ de deux coniques.