NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ANDRÉ CAZAMIAN

Théorèmes sur les quadriques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 378-380

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__378_0>

THÉORÈMES SUR LES QUADRIQUES;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

On sait que l'on peut déduire du théorème de M. Faure sur les cercles circonscrits aux triangles conjugués à une conique, la proposition suivante [1] :

Les cercles orthoptiques des coniques inscrites dans un triangle coupent orthogonalement le cercle conjugué au triangle.

Ce théorème s'étend à l'espace et s'applique aux quadriques inscrites dans un tétraèdre, seulement ce tétraèdre doit avoir ses arêtes opposées rectangulaires, car seuls les tétraèdres de cette espèce ont une sphère conjuguée. On a (la condition d'orthogonalité étant réciproque) deux théorèmes généraux équivalents :

Les sphères conjuguées aux tétraèdres à arêtes opposées rectangulaires circonscrits à une quadrique coupent orthogonalement la sphère orthoptique de cette quadrique.

Les sphères orthoptiques des quadriques inscrites à un tétraèdre à arêtes opposées orthogonales coupent orthogonalement la sphère conjuguée au tétraèdre.

COROLLAIRES. — 1° *Le lieu des centres des quadriques inscrites à un tétraèdre à arêtes opposées rectangulaires et dont la somme des carrés des axes demeure constante est une sphère ayant pour centre l'orthocentre du tétraèdre.*

---

[1] *Voir* notre Note : *Sur un théorème de M. Faure.*

En particulier : *Le lieu des centres des hyperboloïdes équilatères inscrits à un tétraèdre à arêtes opposées rectangulaires est la sphère conjuguée au tétraèdre.*

2° *L'orthocentre d'un tétraèdre à arêtes opposées rectangulaires circonscrit à une paraboloïde est dans le plan orthoptique de cette quadrique.*

C'est le théorème de Steiner étendu à l'espace.

En transformant cette dernière proposition par polaires réciproques, relativement à la sphère conjuguée au tétraèdre, qui a son centre dans le plan orthoptique, on obtient cette proposition :

Les hyperboloïdes équilatères passant par les sommets d'un tétraèdre à arêtes opposées rectangulaires passent par l'orthocentre au tétraèdre.

On voit que ce dernier théorème est l'extension à l'espace de la propriété classique des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle ABC de passer par l'orthocentre H du triangle. Mais on remarquera que le triangle ABC peut être quelconque, tandis que, dans l'espace, le tétraèdre doit avoir ses arêtes opposées rectangulaires. Cela peut s'expliquer :

La propriété des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle peut se vérifier de bien des façons, mais, géométriquement, on peut dire qu'elle est une conséquence directe de ce fait que, lorsqu'une conique S_1 est circonscrite à un triangle conjugué à une conique S, la polaire d'un point quelconque de S_1 par rapport à S est divisée harmoniquement par les deux courbes, ce qui peut encore s'énoncer en disant qu'une droite quelconque divisée harmoniquement par S et S_1 a son pôle par rapport à S_1 situé sur S.

Or considérons une hyperbole équilatère E circonscrite à un triangle ABC, et le cercle Σ conjugué au triangle. L'hyperbole E est circonscrite à un triangle conjugué à Σ, et la droite de l'infini est divisée harmoniquement par S et Σ : donc le pôle de cette droite par rapport à Σ, c'est-à-dire le centre de Σ, est situé sur E. Or on sait que ce centre est l'orthocentre du triangle.

Dans l'espace, si nous considérons un tétraèdre quelconque, notre raisonnement n'est plus valable, parce qu'il n'y a pas de sphère conjuguée au tétraèdre. Mais si cette sphère existe, c'est-à-dire si le tétraèdre a ses arêtes opposées rectangulaires, on répétera mot pour mot la démonstration : Le plan de l'infini coupe un hyperboloïde équilatère circonscrit E suivant une conique circonscrite à un triangle conjugué à l'ombilicale, c'est-à-dire suivant une conique harmoniquement circonscrite à l'ombilicale, et comme l'hyperboloïde E est circonscrit à un tétraèdre conjugué à une sphère S, le pôle du plan de l'infini par rapport à S, c'est-à-dire le centre de S, ou l'orthocentre du tétraèdre, est situé sur E.