MODESTE POSTNICOFF

Recherches sur les courbes planes du quatrième ordre

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 348-377

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__348_1>

RECHERCHES SUR LES COURBES PLANES DU QUATRIÈME ORDRE;

PAR M. MODESTE POSTNICOFF,
Professeur de Mathématiques au Gymnase d'Astrakan.

1. Démontrons d'abord le théorème algébrique suivant :

Si quatre équations du premier degré

$$\begin{aligned}
a_{11}x + a_{12}y + a_{13} &= 0,\\
a_{21}x + a_{22}y + a_{23} &= 0,\\
a_{31}x + a_{32}y + a_{33} &= 0,\\
a_{41}x + a_{42}y + a_{43} &= 0
\end{aligned}$$

sont satisfaites par le même système de quantités x, y, finies, déterminées et différentes de zéro, les coefficients de ces équations satisfont aux relations suivantes

$$|a_{ik}| = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3 \end{pmatrix},$$

$$|a_{ik}| = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 4 \\ k = 1, 2, 3 \end{pmatrix},$$

$$|a_{ik}| = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 3, 4 \\ k = 1, 2, 3 \end{pmatrix},$$

$$|a_{ik}| = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 2, 3, 4 \\ k = 1, 2, 3 \end{pmatrix}.$$

Supposons, en effet, que x et y soient les racines du système des équations données; alors il est évident que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

se réduit à zéro, puisque tous les éléments de la première colonne s'annulent. En ajoutant aux éléments de la première colonne les éléments correspondants de la deuxième, multipliés par $-y$, et ceux de la troisième, multipliés par -1, et en supprimant le facteur différent de zéro, nous obtenons

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

On déduit de la même manière les trois autres relations entre les coefficients.

Admettons, maintenant, réciproquement, que les quantités $a_{ik}\begin{pmatrix} i = 1, 2, 3, 4 \\ k = 1, 2, 3 \end{pmatrix}$ satisfassent aux relations

$$|a_{ik}| = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3 \end{pmatrix},$$

$$|a_{ik}| = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 4 \\ k = 1, 2, 3 \end{pmatrix},$$

$$|a_{ik}| = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 3, 4 \\ k = 1, 2, 3 \end{pmatrix},$$

$$|a_{ik}| = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 2, 3, 4 \\ k = 1, 2, 3 \end{pmatrix},$$

et que deux équations quelconques du système

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0,$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0,$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0,$$
$$a_{41}x + a_{42}y + a_{43} = 0$$

puissent être satisfaites par un système de quantités x_1, y_1, finies, déterminées et différentes de zéro. Alors je dis que les quantités x_1, y_1 doivent satisfaire aussi à deux autres équations du système donné. Posons, en effet, que les équations

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0,$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0$$

soient satisfaites par un système de quantités

$$x = x_1 = \frac{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}},$$
$$y = y_1 = \frac{a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

En prenant dans ce cas le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

ajoutons aux éléments de la première colonne les éléments correspondants de la deuxième, multipliés par y_1, et ceux de la troisième; nous obtenons alors

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= (a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Mais comme, par hypothèse, le déterminant

$$(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

ne se réduit pas à zéro, on aura

$$a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33} = 0.$$

On trouvera, d'une manière toute semblable, que

$$a_{41}x_1 + a_{42}y_1 + a_{43} = 0.$$

2. L'équation générale des courbes du quatrième ordre contient quinze paramètres arbitraires et peut être mise sous la forme suivante

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{array}{l} P_1x''^4 + 2P_2x''^3y'' + 2P_3x''^2y''^2 + 2P_4x''y''^3 \\ \quad + P_5y''^4 + Q_1x''^3 + Q_2x''^2y'' + Q_3x''y''^2 + Q_4y''^3 \\ \quad + R_1x''^2 + R_2x''y'' + R_3y''^2 + S_1x'' + S_2y'' + T = 0. \end{array}\right.$$

En admettant les axes rectangulaires, considérons à quelle forme se réduit cette équation, supposé que la courbe ait un centre et que l'on transporte l'origine des coordonnées au centre de la courbe. Représentons le premier membre de l'équation (I) par $f(x'', y'')$; en transportant l'origine des coordonnées au point $M(a, b)$ du plan et en nommant x', y' les coordonnées d'un point quelconque de la courbe par rapport aux nouveaux axes rectangulaires, parallèles aux premiers et ayant pour origine le point M, nous trouvons

$$x'' = a + x',$$
$$y'' = b + y',$$
$$f(x'', y'') = f(a + x', b + y') = 0.$$

Désignons maintenant par $\frac{d\,f(a, b)}{dx''}$ la dérivée partielle $\frac{df}{dx'}$ où l'on remplace après la différentiation les variables x'', y'' par a, b; par $\frac{d^2 f(a, b)}{dx''\,dy''}$ la dérivée $\frac{d^2 f}{dx''\,dy''}$ dans laquelle on a aussi mis a et b à la place de

x'' et y'' et ainsi de suite. Alors, d'après le théorème de Taylor, nous obtiendrons

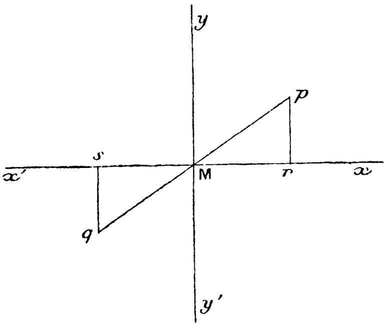
$$
(\mathrm{II})\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{24}\frac{d^4 f(a,b)}{dx''^4}x'^4+\frac{1}{6}\frac{d^4 f(a,b)}{dx''^3\,dy''}x'^3y'\\
&+\frac{1}{4}\frac{d^4 f(a,b)}{dx''^2\,dy''^2}x'^2y'^2+\frac{1}{6}\frac{d^4 f(a,b)}{dx''\,dy''^3}x'y'^3\\
&+\frac{1}{24}\frac{d^4 f(a,b)}{dy''^4}y'^4+\frac{1}{6}\frac{d^3 f(a,b)}{dx''^3}x'^3\\
&+\frac{1}{2}\frac{d^3 f(a,b)}{dx''^2\,dy''}x'^2y'+\frac{1}{2}\frac{d^3 f(a,b)}{dx''\,dy''^2}x'y'^2\\
&+\frac{1}{6}\frac{d^3 f(a,b)}{dy''^3}y'^3+\frac{1}{2}\frac{d^2 f(a,b)}{dx''^2}x'^2\\
&+\frac{d^2 f(a,b)}{dx''\,dy''}x'y'+\frac{1}{2}\frac{d^2 f(a,b)}{dy''^2}y'^2\\
&+\frac{d f(a,b)}{dx''}x'+\frac{d f(a,b)}{dy''}y'+f(a,b)=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Représentons-nous que l'origine M des coordonnées se confonde avec le centre de la courbe; menons par le point M une droite dont la direction est arbitraire et supposons que p et q en soient les deux points d'intersection avec la courbe exprimée par l'équation (II). En général, la droite passant par l'origine des coordonnées peut couper la courbe du quatrième ordre en quatre points; mais, en supposant que l'origine des coordonnées se confonde avec le centre de la courbe, nous en concluons qu'à chaque point p de la courbe, pris arbitrairement, correspond un autre point q de manière que $\mathrm{M}p = \mathrm{M}q$. Mais dans ce cas les abscisses et les ordonnées des points d'intersection p et q doivent être aussi égales avec les signes contraires.

Effectivement, en abaissant les perpendiculaires pr et sq (*fig.* 1) sur les axes des coordonnées, nous obtenons les triangles rectangles $pr\mathrm{M}$ et $qs\mathrm{M}$, qui sont évidemment égaux; et, par conséquent, en désignant pr par y'

et Mr par x', on trouve que les coordonnées du point q sont $-x'$, $-y'$. D'où l'on conclut que, si la courbe du quatrième ordre a le centre M, qui se confond avec l'origine des coordonnées, et que si x', y' sont les coordonnées

Fig. 1.



d'un point quelconque de la courbe, les quantités $-x'$, $-y'$ déterminent aussi un point de la courbe et satisfont à son équation. Supposons maintenant, réciproquement, que, quelle que soit la droite pq passant par l'origine M des coordonnées, les abscisses et les ordonnées de chaque couple des points de son intersection avec la courbe soient des quantités successivement égales avec les signes contraires et que, par exemple, le point p soit déterminé par les coordonnées x', y', étant $-x'$, $-y'$ celles du point q. Dans ce cas il est évident que la courbe a un centre, qui se confond avec l'origine des coordonnées. En abaissant, en effet, les perpendiculaires pr et qs (*fig.* 1) sur les axes, nous obtiendrons deux triangles prM et qsM; puisque les cathètes de l'un d'eux sont égales à celles de l'autre, les triangles mêmes sont égaux; d'où il suit que la droite pq, menée par l'origine des coordonnées, se coupe par ce point en deux parties égales. Donc les points d'intersection d'une droite quelconque, menée par l'origine des coordonnées, avec la courbe du quatrième ordre, sont symétriques deux à deux par rapport au point M; par conséquent, l'origine des coordonnées se confond avec le centre de la courbe.

3. Supposons, maintenant, qu'on ait

$$(\mathrm{III})\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{df(a,b)}{dx''}=0, & \dfrac{df(a,b)}{dy''}=0, & \dfrac{d^3f(a,b)}{dx''^3}=0, \\[2ex] \dfrac{d^3f(a,b)}{dx''\,dy''^2}=0, & \dfrac{d^3f(a,b)}{dx''^2\,dy''}=0, & \dfrac{d^3f(a,b)}{dy''^3}=0. \end{array}\right.$$

Alors je dis que la courbe du quatrième ordre a un centre, qui se confond avec l'origine des coordonnées et dont les coordonnées par rapport aux anciens axes sont a et b. En effet, quel que soit le système de quantités x', y', satisfaisant à l'équation (II), celle-ci sera satisfaite en remplaçant x' par $-x'$ et y' par $-y'$, de sorte que le point $(-x', -y')$ appartient aussi à la courbe. Réciproquement, pour qu'un point (a, b) du plan soit le centre de la courbe du quatrième ordre, il faut et il suffit qu'après avoir transporté les axes parallèlement à eux-mêmes et de sorte que l'origine des coordonnées se déplace au point (a, b), chaque système de quantités $-x'$, $-y'$ satisfasse à l'équation (II), si celui des quantités x', y' lui satisfait, car, s'il en était autrement, les points de la courbe ne seraient pas symétriques par rapport au point M; et dans ce cas il est nécessaire que les quantités a et b satisfassent à toutes les conditions du système (III). Par conséquent les équations (III) expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que le point M, auquel on transporte l'origine des coordonnées, soit le centre de la courbe. Ces conditions peuvent être écrites de la manière suivante :

$$(IV)\ \left\{\begin{array}{l} 4P_1a^3+6P_2a^2b+4P_3ab^2+2P_4b^3+3Q_1a^2+2Q_2ab \\ \qquad +Q_3b^2+2R_1a+R_2b+S_1=0, \end{array}\right.$$

$$(V)\ \left\{\begin{array}{l} 2P_2a^3+4P_3a^2b+6P_4ab^2+4P_5b^3+Q_2a^2+2Q_3ab \\ \qquad +3Q_4b^2+R_2a+2R_3b+S_2=0, \end{array}\right.$$

$$(VI)\qquad \left\{\begin{array}{l} 4P_1a+2P_2b+Q_1=0, \\ 6P_2a+4P_3b+Q_2=0, \\ 4P_3a+6P_4b+Q_3=0, \\ 2P_4a+4P_5b+Q_4=0. \end{array}\right.$$

En déterminant Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 des quatre équations dernières et en mettant les valeurs obtenues dans les deux premières, on trouve

$$4P_1a^3+6P_2a^2b+4P_3ab^2+2P_4b^3=\frac{2R_1a+R_2b+S_1}{2},$$

$$2P_2a^3+4P_3a^2b+6P_4ab^2+4P_5b^3=\frac{R_2a+2R_3b+S_2}{2}.$$

Ainsi les équations (IV) et (V), prises à considération les conditions (VI), prennent la forme suivante :

$$(1)\quad 6Q_1a^2+4Q_2ab+2Q_3b^2+6R_1a+3R_2b+3S_1=0,$$

$$(2)\quad 6Q_4b^2+4Q_3ab+2Q_2a^2+6R_3b+3R_2a+3S_2=0.$$

Or, pour que les valeurs a et b, tirées de deux équations quelconques du système (VI), satisfassent aux autres équations de ce système, c'est-à-dire que quatre équations simultanées du système (VI) puissent être satisfaites d'un même système de quantités a et b, il faut et il suffit, comme nous l'avons déjà vu, que les coefficients P_1, P_2, ..., Q_1, Q_2, ... remplissent ces quatre relations

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} 2P_1 & P_2 & Q_1 \\ 3P_2 & 2P_3 & Q_2 \\ 2P_3 & 3P_4 & Q_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} 2P_1 & P_2 & Q_1 \\ 3P_2 & 2P_3 & Q_2 \\ P_4 & 2P_5 & Q_4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} 2P_1 & P_2 & Q_1 \\ 2P_3 & 3P_4 & Q_3 \\ P_4 & 2P_5 & Q_4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} 3P_2 & 2P_3 & Q_2 \\ 2P_3 & 3P_4 & Q_3 \\ P_4 & 2P_5 & Q_4 \end{vmatrix} = 0.$$

En résumé, si les coefficients de l'équation de la courbe satisfont aux relations (3), (4), (5) et (6), et si, en outre, les valeurs de a et b tirées de deux équations quelconques du système (VI) rendent les égalités (1) et (2) identiques, le point (a, b) sera le centre de la courbe du quatrième ordre. Maintenant se présente une question : les conditions dont nous nous sommes occupés, nécessaires et suffisantes pour que la courbe ait un centre, confondant avec l'origine des coordonnées, sont-elles de même suffisantes pour que le lieu géométrique, exprimé par l'équation du quatrième degré, ait deux axes de symétrie perpendiculaires l'un à l'autre? Il est aisé de voir qu'elles ne le sont pas.

Représentons-nous, en effet, que l'équation du quatrième degré exprime un système de deux ellipses ou, en général, un système de deux coniques ayant le centre commun, mais choisies arbitrairement et situées d'une manière arbitraire. Il est clair que les conditions de l'existence du centre peuvent être satisfaites dans ce cas, mais néanmoins le lieu géométrique exprimé par l'équation du quatrième degré, en général, dans le cas considéré n'a pas deux axes de symétrie. Par conséquent il faut déduire quelques conditions supplémentaires, nécessaires et suffisantes pour que la courbe du quatrième ordre ait les axes énoncés de symétrie.

Trouvons ces conditions supplémentaires.

4. L'équation de la courbe du quatrième ordre, dont le centre se confond avec l'origine des coordonnées, devient

$$\text{(VII)}\quad \left\{\begin{array}{l} P_1 x'^4 + 2P_2 x'^3 y' + 2P_3 x'^2 y'^2 + 2P_4 x' y'^3 \\ \qquad + P_5 y'^4 + M_1 x'^2 + M_2 x' y' + M_3 y'^2 + f(a,b) = 0 \end{array}\right.$$

ou

$$M_1 = \frac{1}{2}\,\frac{d^2 f(a,b)}{dx''^2},$$

$$M_2 = \frac{d^2 f(a,b)}{dx''\,dy''},$$

$$M_3 = \frac{1}{2}\,\frac{d^2 f(a,b)}{dy''^2}.$$

Tournons maintenant les axes des coordonnées autour du point M à angle α; alors les coordonnées anciennes du point quelconque s'exprimeront au moyen des nouvelles coordonnées x, y du même point de la manière suivante :

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$

$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Par conséquent l'équation de la courbe par rapport aux nouveaux axes sera

$$
(\mathrm{VIII})\quad \left\{
\begin{aligned}
&[P_1 \cos^4\alpha + 2P_2 \sin\alpha\cos^3\alpha + 2P_3 \sin^2\alpha\cos^2\alpha \\
&\qquad\qquad + 2P_4 \sin^3\alpha\cos\alpha + P_5 \sin^4\alpha]x^4 \\
&+ [2P_2 \cos^4\alpha + 4(P_3 - P_1)\sin\alpha\cos^3\alpha \\
&\quad + 6(P_4 - P_2)\sin^2\alpha\cos^2\alpha \\
&\quad + 4(P_5 - P_3)\sin^3\cos\alpha - 2P_4 \sin^4\alpha]x^3y \\
&+ [2P_3 \cos^4\alpha + 6(P_4 - P_2)\sin\alpha\cos^3\alpha \\
&\quad + 2(3P_5 - 4P_3 + 3P_1)\sin^2\alpha\cos^2\alpha \\
&\qquad\quad + 6(P_2 - P_4)\sin^3\alpha\cos\alpha + 2P_3 \sin^4\alpha]x^2y^2 \\
&+ [2P_4 \cos^4\alpha + 4(P_5 - P_3)\sin\alpha\cos^3\alpha \\
&\quad + 6(P_2 - P_4)\sin^2\alpha\cos^2\alpha \\
&\quad + 4(P_3 - P_1)\sin^3\alpha\cos\alpha - 2P_2 \sin^4\alpha]xy^3 \\
&+ [P_5 \cos^4\alpha - 2P_4 \sin\alpha\cos^3\alpha \\
&\quad + 2P_3 \sin^2\alpha\cos^2\alpha - 2P_2 \sin^3\alpha\cos\alpha + P_1 \sin^4\alpha]y^4 \\
&+ [M_1 \cos^2\alpha + M_2 \sin\alpha\cos\alpha + M_3 \sin^2\alpha]x^2 \\
&+ [M_2 \cos^2\alpha - 2(M_1 - M_3)\sin\alpha\cos\alpha - M_2 \sin^2\alpha]xy \\
&\qquad + [M_3 \cos^2\alpha - M_2 \sin\alpha\cos\alpha + M_1 \sin^2\alpha]y^2 + f(a, b) = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Cette équation peut s'écrire encore de la façon suivante

$$
(\mathrm{IX})\quad \left\{
\begin{aligned}
&\cos^4\alpha[P_1 + 2P_2 \operatorname{tang}\alpha \\
&\qquad\qquad + 2P_3 \operatorname{tang}^2\alpha + 2P_4 \operatorname{tang}^3\alpha + P_5 \operatorname{tang}^4\alpha]x^4 \\
&+ \cos^4\alpha[2P_2 + 4(P_3 - P_1)\operatorname{tang}\alpha + 6(P_4 - P_2)\operatorname{tang}^2\alpha \\
&\qquad\qquad\qquad + 4(P_5 - P_3)\operatorname{tang}^3\alpha - 2P_4 \operatorname{tang}^4\alpha]x^3y \\
&+ \cos^4\alpha[2P_3 + 6(P_4 - P_2)\operatorname{tang}\alpha \\
&\qquad\qquad + 2(3P_5 - 4P_3 + 3P_1)\operatorname{tang}^2\alpha \\
&\qquad\qquad - 6(P_4 - P_2)\operatorname{tang}^3\alpha + 2P_3 \operatorname{tang}^4\alpha]x^2y^2 \\
&+ \cos^4\alpha[2P_4 + 4(P_5 - P_3)\operatorname{tang}\alpha - 6(P_4 - P_2)\operatorname{tang}^2\alpha \\
&\qquad\qquad\qquad + 4(P_3 - P_1)\operatorname{tang}^3\alpha - 2P_2 \operatorname{tang}^4\alpha]xy^3 \\
&+ \cos^4\alpha[P_5 - 2P_4 \operatorname{tang}\alpha \\
&\qquad\qquad + 2P_3 \operatorname{tang}^2\alpha - 2P_2 \operatorname{tang}^3\alpha + P_1 \operatorname{tang}^4\alpha]y^4 \\
&+ \cos^2\alpha[M_1 + M_2 \operatorname{tang}\alpha + M_3 \operatorname{tang}^2\alpha]x^2 \\
&+ \cos^2\alpha[M_2 - 2(M_1 - M_3)\operatorname{tang}\alpha - M_2 \operatorname{tang}^2\alpha]xy \\
&\qquad + \cos^2\alpha[M_3 - M_2 \operatorname{tang}\alpha + M_1 \operatorname{tang}^2\alpha]y^2 + f(a, b) = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Proposons-nous de déterminer l'angle α de sorte que les coefficients des termes, contenant x^3y, xy^3 et xy, s'annulent simultanément au changement des axes considéré. En égalant à zéro le coefficient de xy dans l'équation (VIII), il vient

$$M_2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2(M_1 - M_3)\sin\alpha\cos\alpha = o,$$

d'où

$$(7)\qquad \tang 2\alpha = \frac{M_2}{M_1 - M_3}.$$

Il est aisé de voir que l'angle α, auquel il faut tourner les axes pour que le coefficient de xy dans l'équation transformée s'annule, on peut toujours le supposer aigu. Effectivement, $\cos\alpha$ étant différent de zéro, pour que le coefficient de xy dans l'équation (IX) s'annule, il faut poser

$$\tang^2\alpha - 2\left(\frac{M_3 - M_1}{M_2}\right)\tang\alpha - 1 = o,$$

d'où

$$\tang\alpha = \frac{(M_3 - M_1) \pm \sqrt{(M_1 - M_3)^2 + M_2^2}}{M_2}.$$

Si $M_2 < o$, quel que soit le signe de la quantité $(M_3 - M_1)$, en prenant le radical avec le signe $-$, c'est-à-dire en posant

$$\tang\alpha = \frac{(M_3 - M_1) - \sqrt{(M_1 - M_3)^2 + M_2^2}}{M_2},$$

nous obtiendrons $\tang\alpha > o$, car la valeur absolue du radical surpasse celle de la quantité $(M_3 - M_1)$.

Si, au contraire, $M_2 > o$, quel que soit le signe de la différence $(M_3 - M_1)$, en prenant le radical avec le signe $+$, c'est-à-dire en posant

$$\tang\alpha = \frac{(M_3 - M_1) + \sqrt{(M_1 - M_3)^2 + M_2^2}}{M_2},$$

nous aurons ainsi $\tang\alpha > o$.

5. En désignant maintenant par α cet angle aigu, auquel il faut tourner les axes pour que le terme con-

tenant xy s'annule, considérons à quelles relations doivent satisfaire les coefficients P_1, $2P_2$, ..., M_1, M_2, M_3 pour que les termes de l'équation transformée, contenant x^3y et xy^3, s'annulent aussi. Posons

$$\begin{aligned}K_1 = 2P_2 &+ 4(P_3 - P_1)\operatorname{tang}\alpha + 6(P_4 - P_2)\operatorname{tang}^2\alpha \\ &+ 4(P_5 - P_3)\operatorname{tang}^3\alpha - 2P_4\operatorname{tang}^4\alpha, \\ K_2 = 2P_4 &+ 4(P_5 - P_3)\operatorname{tang}\alpha - 6(P_4 - P_2)\operatorname{tang}^2\alpha \\ &+ 4(P_3 - P_1)\operatorname{tang}^3\alpha - 2P_2\operatorname{tang}_4\alpha);\end{aligned}$$

pour qu'à la valeur considérée de α les quantités K_1 et K_2 s'annulent, il faut et il suffit que leur somme et leur différence soient égales à zéro. En retranchant K_2 de K_1, égalant à zéro la différence ainsi obtenue, après l'avoir multipliée par $\cos^4\alpha$, nous trouvons

$$\begin{aligned}&2(\sin^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha)(P_2 - P_4) \\ &\quad + (4\sin^3\alpha\cos\alpha - 4\sin\alpha\cos^3\alpha)(P_1 - 2P_3 + P_5) = 0\end{aligned}$$

ou

$$2\cos 4\alpha(P_2 - P_4) - \sin 4\alpha(P_1 - 2P_3 + P_5) = 0,$$

d'où

$$\operatorname{tang} 4\alpha = \frac{2(P_2 - P_4)}{P_1 - 2P_3 + P_5}. \tag{8}$$

Or, en ajoutant K_1 à K_2 et égalant leur somme à zéro, nous trouvons

$$\begin{aligned}&(P_2 + P_4) + 2(P_5 - P_1)\operatorname{tang}\alpha \\ &\quad + 2(P_5 - P_1)\operatorname{tang}^3\alpha - (P_2 + P_4)\operatorname{tang}^4\alpha = 0\end{aligned}$$

ou

$$(P_2 + P_4)(1 - \operatorname{tang}^4\alpha) - 2(P_1 - P_5)\operatorname{tang}\alpha(1 + \operatorname{tang}^2\alpha) = 0,$$

d'où, en observant que

$$(1 - \operatorname{tang}^4\alpha) = (1 + \operatorname{tang}^2\alpha)(1 - \operatorname{tang}^2\alpha)$$

et en supprimant le facteur $(1 + \operatorname{tang}^2\alpha)$, il vient

$$(P_2 + P_4)(1 - \operatorname{tang}^2\alpha) - 2(P_1 - P_5)\operatorname{tang}\alpha = 0;$$

par conséquent,

$$\frac{P_2 + P_4}{P_1 - P_5} - \frac{2 \operatorname{tang} \alpha}{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{P_2 + P_4}{P_1 - P_5}; \tag{9}$$

mais

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{M_2}{M_1 - M_3},$$

donc

$$\frac{P_2 + P_4}{P_1 - P_5} = \frac{M_2}{M_1 - M_3}. \tag{10}$$

De l'égalité (9) nous obtiendrons

$$\operatorname{tang} 4\alpha = \frac{2(P_1 - P_5)(P_2 + P_4)}{(P_1 - P_5)^2 - (P_2 + P_4)^2};$$

mais, d'après l'équation (8),

$$\operatorname{tang} 4\alpha = \frac{2(P_2 - P_4)}{P_1 - 2P_3 + P_5};$$

donc

$$\frac{P_2 - P_4}{P_1 - 2P_3 + P_5} = \frac{(P_1 - P_5)(P_2 + P_4)}{(P_1 - P_5)^2 - (P_2 + P_4)^2},$$

ou

$$\frac{P_4 - P_2}{2P_3 - (P_1 + P_5)} = \frac{(P_1 - P_5)(P_2 + P_4)}{(P_1 - P_5)^2 - (P_2 + P_4)^2}. \tag{11}$$

De cette équation on trouve

$$P_3 = \frac{(P_1 P_4 + P_2 P_5)}{P_2 + P_4} + \frac{P_2^2 - P_4^2}{2(P_1 - P_5)}. \tag{12}$$

Les égalités (10) et (11) expriment les conditions cherchées, nécessaires et suffisantes pour que les coefficients des termes contenant $x^3 y$ et xy^3 s'annulent simultanément, à la condition que

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{M_2}{M_1 - M_3}.$$

Si ces conditions sont satisfaites, l'équation de la courbe se réduit à la forme

$$A x^4 + B x^2 y^2 + C y^4 + D x^2 + E y^2 + F = 0,$$

où $F = f(a, b)$. Remarquons que, si les coordonnées a et b du centre satisfont à l'équation $f(a, b) = 0$, c'est-à-dire si le centre de la courbe est situé sur la courbe même ou s'il en représente un point isolé, dans l'équation de la courbe, rapportée à ses axes de symétrie, le terme constant s'annule; nous appellerons ces courbes conjuguées par rapport au centre.

6. Pour déterminer les coefficients A, B, C, D et E, remarquons que

$$\sin 2\alpha = \frac{M_2}{\pm\sqrt{(M_1 - M^3)^2 + M_2^2}},$$

$$\cos 2\alpha = \frac{M_1 - M_3}{\pm\sqrt{(M_1 - M_3)^2 + M_2^2}}.$$

Puisque $2\alpha < \pi$, $\sin 2\alpha > 0$; donc, dans les deux dernières formules, le signe du radical est le même que celui de la quantité M_2.

On a

$$D = M_1 \cos^2\alpha + M_2 \sin\alpha\cos\alpha + M_3 \sin^2\alpha,$$

$$E = M_1 \sin^2\alpha + M_2 \sin\alpha\cos\alpha + M_3 \cos^2\alpha;$$

en ajoutant ces équations, on obtient

$$D + E = M_1 + M_3. \tag{13}$$

Or, en retranchant la seconde équation de la première, il vient

$$D - E = \pm\sqrt{(M_1 - M_3)^2 + M_2^2},$$

où, comme nous l'avons vu, le signe du radical doit être le même que celui de la quantité M_2. D'ailleurs de la formule $\tan 2\alpha = \frac{P_2+P_4}{P_1-P_5}$, il vient

$$\sin 2\alpha = \frac{P_2+P_4}{\pm\sqrt{(P_1-P_5)^2+(P_2+P_4)^2}},$$

$$\cos 2\alpha = \frac{P_1-P_5}{\pm\sqrt{(P_1-P_5)^2+(P^2+P_4)^2}}.$$

Puisque $2\alpha < \pi$, on a $\sin 2\alpha > 0$; d'où il suit que le signe du radical dans ces deux formules doit être le même que celui de la quantité (P_2+P_4). On a

$$A-C = [(P_1-P_5)\cos 2\alpha + (P_2+P_4)\sin 2\alpha],$$

ou

$$A-C = (P_1-P_5)(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \tan 2\alpha),$$

d'où

$$A-C = \frac{P_1-P_5}{\cos 2\alpha};$$

mais

$$\cos 2\alpha = \frac{P_1-P_5}{\pm\sqrt{(P_1-P_5)^2+(P_2+P_4)^2}},$$

donc

$$A-C = \pm\sqrt{(P_1-P_5)^2+(P_2+P_4)^2}, \tag{15}$$

où le signe du radical, comme nous l'avons déjà dit, est le même que celui de la quantité (P_2+P_4).

En additionnant les coefficients de x^4 et y^4 dans l'équation (VIII), on obtient

$$\begin{aligned} A+C = {} & P_1+P_5+(P_2-P_4)\sin 2\alpha\cos 2\alpha \\ & + 2[2P_3-(P_1+P_5)]\sin^2\alpha\cos^2\alpha, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A+C = {} & P_1+P_5+(P_2-P_4)\sin 2\alpha\cos 2\alpha \\ & - \frac{P_1+P_5-2P_3}{2}\sin^2 2\alpha, \end{aligned}$$

d'où, en divisant les deux membres de l'équation par

$(P_2 - P_4)$ et en remarquant que

$$\frac{P_1 + P_5 - 2P_3}{2(P_2 - P_4)} = \frac{1}{\tang 4\alpha},$$

on trouve

$$\frac{A + C}{P_2 - P_4} = \frac{P_1 + P_5}{P_2 - P_4} + \sin 2\alpha \cos 2\alpha - \frac{\sin^2 2\alpha}{\tang 4\alpha};$$

cette équation peut s'écrire ainsi

$$\frac{(A + C) - (P_1 + P_5)}{P_2 - P_4} = \sin 2\alpha \left[\cos 2\alpha - \frac{(1 - \tang^2 2\alpha)\sin 2\alpha}{2 \tang 2\alpha}\right],$$

ou

$$\frac{(A + C) - (P_1 + P_5)}{P_2 - P_4} = \frac{\sin 2\alpha \cos 2\alpha [2 - (1 - \tang^2 2\alpha)]}{2},$$

d'où

$$\frac{(A + C) - (P_1 + P_5)}{P_2 - P_4} = \frac{\sin 2\alpha \cos 2\alpha (1 + \tang^2 2\alpha)}{2},$$

ou, finalement,

$$\frac{(A + C) - (P_1 + P_5)}{P_2 - P_4} = \frac{\tang 2\alpha}{2}.$$

Puisque

$$\frac{\tang 2\alpha}{2} = \frac{P_2 + P_4}{2(P_1 - P_5)},$$

on obtient cette relation pour la détermination de $(A + C)$

$$\frac{(A + C) - (P_1 + P_5)}{P_2 - P_4} = \frac{P_2 + P_4}{2(P_1 - P_5)}.$$

En résolvant cette équation par rapport à $(A + C)$, on obtient

$$(16) \qquad A + C = \frac{P_2^2 - P_4^2}{2(P_1 - P_5)} + P_1 + P_5;$$

mais de l'équation (12) on a

$$\frac{P_2^2 - P_4^2}{2(P_1 - P_5)} = P_3 - \frac{P_1 P_4 + P_2 P_5}{P_2 + P_4};$$

donc

$$A + C = P_1 + P_3 + P_5 - \frac{P_1 P_4 + P_2 P_5}{P_2 + P_4},$$

ou, en définitive,

$$(17) \qquad A + C = \frac{P_1 P_2 + P_2 P_3 + P_3 P_4 + P_4 P_5}{P_2 + P_4}.$$

A l'aide des équations (15) et (17) on détermine les coefficients A et C.

Il reste maintenant à calculer le coefficient B. On a

$$\begin{aligned} B = [&2 P_3 \cos^4 \alpha + 6(P_4 - P_2) \sin\alpha \cos^3\alpha \\ &+ 2(3P_5 - 4P_3 + 3P_1) \sin^2\alpha \cos^2\alpha \\ &- 6(P_4 - P_2) \sin^3\alpha \cos\alpha + 2P_3 \sin^4\alpha]. \end{aligned}$$

Ajoutant et retranchant $4P_3 \sin^2\alpha \cos^2\alpha$ et en remarquant que

$$\cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha = 1,$$

on obtient

$$\begin{aligned} B = 2P_3 &- 6(P_2 - P_4) \sin\alpha \cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \\ &+ 6(P_1 - 2P_3 + P_5) \sin 2\alpha \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Puisque

$$P_1 - 2P_3 + P_5 = \frac{2(P_2 - P_4)}{\operatorname{tang} 4\alpha} = \frac{(P_2 - P_4)(1 - \operatorname{tang}^2 2\alpha)}{\operatorname{tang} 2\alpha},$$

on a

$$\begin{aligned} B = 2P_3 &- 3(P_2 - P_4) \sin 2\alpha \cos 2\alpha \\ &+ \frac{3\sin^2 2\alpha (P_2 - P_4)(1 - \operatorname{tang}^2 2\alpha)}{2 \operatorname{tang} 2\alpha}, \end{aligned}$$

d'où l'on obtient successivement

$$\begin{aligned} B &= 2P_3 - 3(P_2 - P_4)\left[\sin 2\alpha \cos 2\alpha - \frac{\sin^2 2\alpha(1 - \operatorname{tang}^2 2\alpha)}{2\operatorname{tang} 2\alpha}\right] \\ &= 2P_3 - \frac{3(P_2 - P_4)}{2\operatorname{tang} 2\alpha}[\sin^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha \operatorname{tang}^2 2\alpha] \\ &= 2P_3 - \frac{3(P_2 - P_4)\operatorname{tang} 2\alpha}{2} = 2P_3 - \frac{3(P_2 - P_4)(P_2 + P_4)}{2(P_1 - P_5)}; \end{aligned}$$

en remplaçant P_2 par sa valeur, tirée de la formule (12), on obtient

$$B = \frac{2(P_1P_4 + P_2P_5)}{P_2 + P_4} - \frac{P_2^2 - P_4^2}{2(P_1 - P_5)};$$

en substituant, enfin, au lieu de $\frac{P_2^2 - P_4^2}{2(P_1 - P_5)}$, la valeur de cette fraction, tirée de la même formule (12), on obtient

$$B = \frac{3(P_1P_4 + P_2P_5)}{P_2 + P_4} - P_3,$$

ou, finalement,

$$B = \frac{P_2(3P_5 - P_3) - (P_3 - 3P_1)P_4}{P_2 + P_4}. \tag{18}$$

7. L'équation de la courbe du quatrième ordre, ayant le centre et les axes de symétrie, nous avons réduit à la forme suivante :

$$Ax^4 + Bx^2y^2 + Cy^4 + Dx^2 + Ey^2 + F = 0;$$

en résolvant cette équation par rapport à y, on obtient

$$y = \pm\sqrt{-\frac{Bx^2 + E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{(B^2 - 4AC)x^4 + 2(BE - 2CD)x^2 + (E^2 - 4CF)}}.$$

En posant

$$B^2 - 4AC = M, \qquad BE - 2CD = N, \qquad E^2 - 4CF = P,$$

nous trouvons

$$y = \pm\sqrt{\frac{-(Bx^2 + E)}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{Mx^4 + 2Nx^2 + P}}$$

ou

$$y = \pm\sqrt{\eta_{\prime}^2 \pm \frac{1}{2C}\sqrt{Mx^4 + 2Nx^2 + P}},$$

où

$$\eta_{\prime}^2 = -\frac{B}{2C}x^2 - \frac{E}{2C}. \tag{19}$$

Les courbes du quatrième ordre, ayant le centre, nous diviserons en quatre espèces.

La courbe sera de première espèce, si $\eta^2 > 0$ pour toutes valeurs de x, pour lesquelles le trinome

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P$$

reste positif et la quantité

$$Y = \pm \frac{1}{2C}\sqrt{Mx^4 + 2Nx^2 + P}$$

est réelle; dans ce cas l'équation (19) exprime une courbe du second ordre ou un système de deux droites.

La courbe du quatrième ordre appartiendra à la seconde espèce, si $\eta^2 < 0$ pour toutes valeurs de x pour lesquelles Y reste une quantité réelle. Nous rapporterons la courbe à la troisième espèce, si la quantité η est nulle, c'est-à-dire si $B = E = 0$. Enfin la courbe du quatrième ordre sera de quatrième espèce, si η^2 change de signe entre les limites de x, pour lesquelles le trinome

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P$$

reste positif. Considérons, par exemple, la courbe définie par l'équation

$$(x^2 + y^2)^2 - 2r^2(x^2 + y^2) - 2r^2x^2 = 0.$$

En résolvant cette équation par rapport à y, on obtient

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2 \pm \sqrt{r^4 + 2r^2x^2}},$$

ou

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2 \pm \sqrt{r^2(r^2 + 2x^2)}}.$$

Dans le cas considéré, la quantité

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P$$

se réduit au binome

$$r^4 + 2r^2x^2,$$

qui demeure positif pour toutes les valeurs de x, comprises entre o et $\pm\infty$, tandis que la quantité η^2, définie par l'équation

$$\eta^2 = r^2 - x^2,$$

restant positive au changement de x entre o et $\pm r$, devient négative au changement de x entre $\pm r$ et $\pm\infty$. Donc la courbe considérée appartient à la quatrième espèce.

8. *Discussion.* — La quantité M peut être positive, négative, ou égale à zéro.

Dans les deux cas premiers le trinome

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P$$

peut être mis sous la forme

$$M\left(x^4 + \frac{2N}{M}x^2 + \frac{M}{P}\right);$$

en résolvant l'équation

$$x^4 + \frac{2N}{M}x^2 + \frac{P}{M} = 0,$$

on trouve

$$x = \pm\sqrt{\frac{-N \pm \sqrt{N^2 - MP}}{M}}.$$

Posons

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{-N + \sqrt{N^2 - MP}}{M}},$$

$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{-N - \sqrt{N^2 - MP}}{M}};$$

alors

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P = M(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2). \tag{20}$$

Supposons d'abord que $M < 0$; si $x_1 = x_2$, c'est-à-dire si $N^2 - MP = 0$, l'équation de la courbe se réduit à celle du second degré.

En supposant $N^2 - MP < 0$, les quantités x_1, x_2 deviennent imaginaires conjuguées; en posant dans ce cas

$$x_1 = \pm(\alpha + \beta i),$$
$$x_2 = \pm(\alpha - \beta i),$$

de l'équation (20) nous obtiendrons

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P = M[(x^2 - \alpha^2 + \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2],$$

et il est évident que le trinome considéré reste négatif pour toutes les valeurs de x; par conséquent le lieu géométrique, exprimé par l'équation du quatrième degré, sera imaginaire. Ainsi, il ne nous reste qu'à supposer que, si $M < 0$, on a

$$N^2 - MP > 0.$$

A ces conditions, nous avons à distinguer quelques cas.

Admettons d'abord que $N = 0$; alors, de l'inégalité précédente, il vient que $P > 0$. En posant $M = -M_1$, où $M_1 > 0$, on obtient $x_1 = \alpha i$ et le trinome

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P$$

se ramène au produit

$$M(x^2 + \alpha^2)(x^2 - x_2^2)$$

ou

$$M_1(x^2 + \alpha^2)(x_2^2 - x^2),$$

de sorte que cette quantité sera positive au changement de x entre 0 et $\pm x_2$, où

$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{M_1 P}}{M_1}}.$$

Posons, en second lieu, que $N < 0$; alors $N = -N_1$, où $N_1 > 0$. Si en outre $P = 0$, on a

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{2N_1}{-M^1}} = \pm \alpha i,$$
$$x_2 = 0,$$

et le trinome

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P,$$

étant ramené, dans ce cas, au produit

$$M(x^2 + \alpha^2)x^2,$$

sera négatif pour toutes les valeurs de x.

Si $N < 0$ et $P < 0$, de sorte que $P = -P_1$, où $P_1 > 0$, on trouve

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{N_1 + \sqrt{N_1^2 - M_1P_1}}{-M_1}},$$
$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{N_1 - \sqrt{N_1^2 - M_1P_1}}{-M_1}};$$

puisque la quantité $(N_1^2 - M_1P_1)$ par hypothèse est positive et, par suite, $N_1^2 > M_1P_1$, on a $x_1 = \pm\alpha i$, $x_2 = \pm\beta i$ et le lieu géométrique devient de nouveau imaginaire.

Si $N < 0$ et $P > 0$, on trouve

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{N_1 + \sqrt{N_1^2 + M_1P}}{-M_1}} = \pm\alpha i,$$
$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{N_1 - \sqrt{N_1^2 + M_1P}}{-M_1}};$$

x_2 est une quantité réelle, puisque la valeur absolue du radical $\sqrt{N_1^2 + M_1P}$ surpasse celle de N_1. Le trinome

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P,$$

étant ramené dans ce cas au produit

$$M_1(x^2 + \alpha^2)(x_2^2 - x^2),$$

restera positif, x variant de zéro à $\pm\infty$.

Posons, enfin, $N > 0$. Si $P = 0$, il vient

$$x_1 = 0,$$
$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{-2N}{M}} = \pm\sqrt{\frac{2N}{M_1}},$$

où l'on suppose $M = -M_1$, $M_1 > 0$.

Le trinome se ramène au produit

$$M_1 x^2\left(\frac{2N}{M_1} - x^2\right),$$

qui est positif pour toutes les valeurs de x, comprises entre zéro et $\pm\sqrt{\frac{2N}{M_1}}$.

En supposant $N > 0$, $P < 0$, on trouve

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{-N + \sqrt{N^2 - M_1 P_1}}{-M_1}},$$
$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{-N - \sqrt{N^2 - M_1 P_1}}{-M_1}},$$

où $P_1 = -P$. Puisque la valeur absolue du radical $\sqrt{N^2 - M_1 P_1}$ est moindre que celle de N, il est évident que toutes les racines de l'équation

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P = 0$$

sont réelles et que $x_1^2 < x_2^2$. Le trinome se ramène au produit

$$M_1(x^2 - x_1^2)(x_2^2 - x^2)$$

et, par suite, reste positif pour toutes les valeurs de x comprises entre $\pm x_1$ et $\pm x_2$.

Si, enfin, $N > 0$, $P > 0$, on obtient

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{-N + \sqrt{N^2 + M_1 P}}{-M_1}} = \pm\alpha i,$$

c'est-à-dire x_1 est une quantité imaginaire puisque la valeur absolue du radical $\sqrt{N^2 + M_1 P}$ surpasse celle de la quantité N. D'autre part,

$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{-N - \sqrt{N^2 + M_1 P}}{-M_1}};$$

donc x_2 est une quantité réelle et le trinome considéré s'exprime dans ce cas par le produit

$$M_1(x^2 + \alpha^2)(x_2^2 - x^2),$$

restant positif quand x varie de zéro à $\pm x_2$.

On voit ainsi que, dans le cas

$$M < 0,$$
$$N^2 - MP > 0,$$

on obtient cinq groupes des courbes, correspondant à ces hypothèses :

(I)	$N = 0,$	$P > 0,$
(II)	$N < 0,$	$P > 0,$
(III)	$N > 0,$	$P = 0,$
(IV)	$N > 0,$	$P < 0,$
(V)	$N > 0,$	$P > 0.$

9. *Discussion* (suite). — Passons maintenant au cas $M > 0$. Posons, comme plus haut,

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{-N + \sqrt{N^2 - MP}}{M}},$$

$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{-N - \sqrt{N^2 - MP}}{M}};$$

alors

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P = M(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2).$$

Si $N^2 - MP < 0$, il y a trois cas à distinguer : N peut être une quantité positive, ou négative, ou, enfin, égale à zéro; il est évident que dans tous ces cas $P > 0$. Si N est différent de zéro, les quantités x_1 et x_2 deviennent imaginaires conjuguées, quel que soit le signe de N; en posant donc

$$x_1 = \pm(\alpha + \beta i),$$
$$x_2 = \pm(\alpha + \beta i),$$

il vient

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P = M[(x^2 - \alpha^2 + \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2];$$

c'est-à-dire le trinome considéré demeure positif, x variant de zéro à $\pm\infty$. Si, au contraire, $N = 0$, le trinome

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P$$

se ramène au binome

$$Mx^4 + P,$$

et, puisque $P > 0$, cette quantité sera positive pour toutes les valeurs de x, comprises entre $-\infty$ et $+\infty$.

Posons ensuite

$$N^2 - MP > 0,$$

alors nous avons à distinguer les cas suivants : 1° $N > 0$; 2° $N < 0$; 3° $N = 0$.

Admettons d'abord que $N > 0$; si en outre $P > 0$, la valeur numérique du radical $\sqrt{N^2 - MP}$ est inférieure à la valeur absolue de N; par suite, on obtient

$$x_1 = \pm \alpha i,$$
$$x_2 = \pm \beta i,$$
$$Mx^4 + 2Nx^2 + P = M(x^2 + \alpha^2)(x^2 + \beta^2),$$

c'est-à-dire le trinome en question est positif pour toutes les valeurs de x, comprises entre $-\infty$ et $+\infty$.

Si $N > 0$ et $P = 0$, on a

$$x_1 = 0,$$
$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{-2N}{M}} = \pm \alpha i,$$
$$Mx^4 + 2Nx^2 + P = Mx^2\left(x^2 + \frac{2N}{M}\right),$$

c'est-à-dire le trinome reste positif au changement de x entre $-\infty$ et $+\infty$. Si, enfin, $N > 0$ et $P < 0$, nous obtenons, en posant $P = -P_1$,

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{-N+\sqrt{N^2+MP_1}}{M}},$$
$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{-N-\sqrt{N^2+MP_1}}{M}};$$

puisque la valeur absolue du radical $\sqrt{N^2+MP_1}$ surpasse celle de la quantité N, x_1 est une quantité réelle, mais x_2 est une imaginaire de la forme αi; par conséquent

$$Mx^4+2Nx^2+P = M(x^2-x_1^2)(x^2+\alpha^2)$$

et le trinome sera positif, x variant de $\pm x$ à $\pm\infty$.

Posons, maintenant, que $N < 0$ et que $N = -N_1$. Alors il y a de nouveau trois cas à distinguer. Admettons d'abord que $P > 0$. Alors

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{N_1+\sqrt{N_1^2-MP}}{M}},$$
$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{N_1-\sqrt{N_1^2-MP}}{M}};$$

puisque $N_1^2 - MP > 0$ et que la valeur absolue du radical est inférieure à celle de la quantité N, nous en concluons que x_1 et x_2 sont des quantités réelles; en outre, $x_1^2 > x_2^2$. On a

$$Mx^4+2Nx^2+P = M(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2):$$

il est évident que le trinome considéré, étant positif au changement de x, de zéro à $\pm x_2$, devient négatif, x variant de $\pm x_2$ à $\pm x_1$, et, enfin, devient de nouveau positif, lorsque x varie de $\pm x_1$ à $\pm\infty$.

Admettons en second lieu que $P = 0$, alors

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{2N_1}{M}},$$
$$x_2 = 0,$$
$$Mx^4 + 2Nx^2 + P = M\left(x^2 - \frac{2N_1}{M}\right)x^2:$$

donc le trinome demeure positif, x variant de $\pm\sqrt{\frac{2N_1}{M}}$ à $\pm\infty$. Admettons que $N < 0$ et $P < 0$. En posant $N = -N_1$, $P = -P_1$, on trouve

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{N_1 + \sqrt{N_1^2 + MP_1}}{M}},$$
$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{N_1 - \sqrt{N_1^2 + MP_1}}{M}};$$

par conséquent x_1 est une quantité réelle, mais $x_2 = \pm\beta i$; on a

$$Mx^4 + 2Nx_2 + P = M(x^2 - x_1^2)(x^2 + \beta^2),$$

donc le trinome demeure négatif, quand x varie de zéro à $\pm x_1$, mais il devient positif, x variant de $\pm x_1$ à $\pm\infty$.

Supposons enfin qu'à la condition $N^2 - MP > 0$, on a $N = 0$; dans ce cas, de l'inégalité précédente, on trouve

$$-MP > 0,$$

donc $P < 0$. En posant $P = -P_1$, on obtient

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{MP_1}}{M}},$$

$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{-\sqrt{MP_1}}{M}} = \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{MP_1}}{M}} = \pm\alpha i;$$

donc

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P = M(x^2 - \alpha^2)(x^2 + \alpha^2) = M(x_4 - \alpha^4)$$

et le trinome sera positif, lorsque x varie de $\pm\alpha$ à $\pm\infty$

Ainsi l'on conclut que les courbes, correspondant à l'hypothèse $M > 0$, forment deux classes.

Première classe, $M > 0$, $N^2 - MP < 0$. — Cette classe contient trois groupes de courbes, conformément à trois systèmes des hypothèses

(I)	$N > 0$,	$P > 0$,
(II)	$N < 0$,	$P > 0$,
(III)	$N = 0$,	$P > 0$.

Seconde classe, $M > 0$, $N^2 - MP > 0$. — Cette classe renferme sept groupes de courbes, correspondant à sept systèmes des hypothèses

(I)	$N > 0$,	$P > 0$,
(II)	$N > 0$,	$P = 0$,
(III)	$N < 0$,	$P < 0$,
(IV)	$N < 0$,	$P > 0$,
(V)	$N < 0$,	$P = 0$,
(VI)	$N < 0$,	$P < 0$,
(VII)	$N = 0$,	$P < 0$.

10. Supposons, enfin, que $M = 0$. Alors le trinome

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P$$

se réduit au binome

$$2Nx^2 + P.$$

Nous distinguerons plusieurs cas.

Remarquons d'abord que N et P ne peuvent pas être nulles simultanément, car dans ces deux cas l'équation de la courbe se réduit à celle du second degré.

Supposons que $N < 0$. En admettant, d'ailleurs, $P > 0$ et en posant $N = -N_1$, on obtient

$$\begin{aligned} 2Nx^2 + P &= -2N_1x^2 + P \\ &= -2N_1\left(x^2 - \frac{P}{2N_1}\right) = 2N_1\left(\frac{P}{2N_1} - x^2\right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire le binome

$$2Nx^2+P$$

demeure positif, lorsque x varie de o à $\pm\sqrt{\frac{P}{2N_1}}$; le binome devient négatif en dehors de l'intervalle indiqué.

Admettons, en second lieu, que $N<o$ et $P<o$; en posant $N=-N_1$, $P=-P_1$, on trouve

$$2Nx^2+P=-2N_1x^2-P_1=-(2N_1x^2+P_1);$$

puisque cette dernière quantité demeure négative, x variant de $-\infty$ à $+\infty$; on en conclut que le lieu géométrique, dans le cas considéré, est imaginaire.

Soit, ensuite, $N>o$, $P>o$. Alors

$$2Nx^2+P=2N\left(x^2+\frac{P}{2N}\right),$$

c'est-à-dire le binome reste positif pour toutes les valeurs de x.

Or, si $N>o$, $P<o$, on obtient,

$$2Nx^2+P=2Nx^2-P_1=2N\left(x^2-\frac{P_1}{2N}\right),$$

où $P=-P_1$. Donc le binome demeure positif, quand x varie de $\pm\sqrt{\frac{P_1}{2N}}$ à $\pm\infty$ et les points du lieu géométrique sont réels, x variant de $\pm\sqrt{\frac{P_1}{2N}}$ à $\pm\infty$.

Dans ce dernier cas, la courbe ne peut pas être conjuguée par rapport au centre, parce que, si $E^2-4CF<o$, la quantité F ne peut pas être nulle.

Ainsi l'on conclut que, si $M=o$, on ne doit examiner que les cas suivants

(I)	$N<o$,	$P>o$,
(II)	$N>o$,	$P>o$,
(III)	$N>o$,	$P<o$.