Nouvelles annales de mathématiques

André Cazamian

Propriétés de la parabole et solution géométrique du problème du concours d'admission à l'École navale en 1893

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 316-322

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__316_1>

PROPRIÉTÉS DE LA PARABOLE ET SOLUTION GÉOMETRIQUE DU PROBLÈME DU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE EN 1893;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

THÉOREME. — A, B, C *désignant trois points d'une parabole,* D, E, F *les milieux des côtés du triangle* ABC, *l'hyperbole équilatère qui passe par les points* D, E *et qui a pour asymptote l'axe de la parallèle, passe par le point* F.

Soient K et I (*fig.* 1) les points de rencontre avec l'axe des droites DE et DF. Considérons l'hyperbole équilatère qui passe par D et E et qui est asymptote à l'axe de la parabole. En portant $EH = DK$ et en menant HP perpendiculaire sur l'axe, HP sera la seconde asymptote de cette hyperbole. Soit L le point de rencontre de DF avec l'asymptote HP. Si l'on a

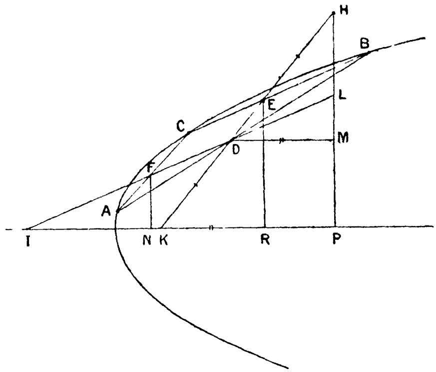
$$DL = FI,$$

l'hyperbole équilatère considérée passera aussi par le point F. En menant DM perpendiculaire sur HP, il suffira de prouver que $DM = IN$. Or les deux triangles rectangles HDM, EKR étant égaux par construction, on a

$$DM = KR;$$

il suffira, en définitive, de prouver l'égalité $KR = IN$.

Fig. 1.



Appelons (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées des points A, B, C de la parabole, on a

$$KR = \frac{ER}{\text{tang}\,EKR}.$$

Mais $ER = \frac{y_3 + y_2}{2}$, et l'angle EKR est égal à l'angle de AC avec l'axe de la parabole : donc

$$\text{tang}\,EKR = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_3^2 - y_1^2} = \frac{2p}{y_3 + y_1}.$$

Il en résulte que

$$KR = \frac{(y_3 + y_2)(y_3 + y_1)}{4p}.$$

On a de même

$$\mathrm{IN} = \frac{\mathrm{FN}}{\operatorname{tang}\mathrm{FIN}} = \frac{y_3+y_1}{2}\,\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}$$

$$= \frac{y_3+y_1}{2}\,\frac{y_2^2-y_3^2}{2p(y_2-y_3)} = \frac{(y_3+y_1)(y_2+y_3)}{4p},$$

donc

$$\mathrm{KR} = \mathrm{IN}.$$

Corollaires. — On sait que l'asymptote d'une hyperbole équilatère, circonscrite à un triangle, est droite de Simson du triangle. De là les corollaires suivants :

1. *Les perpendiculaires élevées aux points de rencontre avec l'axe, sur les côtés du triangle obtenu en joignant les milieux des côtés d'un triangle quelconque inscrit dans une parabole, sont concourantes.*

2. *L'axe d'une parabole circonscrite à un triangle est droite de Simson du triangle obtenu en joignant les milieux des côtés du premier.*

3. *L'enveloppe des axes des paraboles circonscrites à un triangle est une hypocycloïde à trois rebroussements dont le cercle inscrit à la courbe est le cercle des neuf points du triangle formé en joignant les milieux des côtés du premier.*

On sait, en effet, que l'enveloppe des droites de Simson d'un triangle est une hypocycloïde à trois rebroussements, dont le cercle inscrit à la courbe est le cercle des neuf points du triangle.

Nous ignorons si la propriété énoncée en dernier lieu est déjà connue. Ce qu'il y a de particulièrement remarquable, c'est que l'enveloppe des axes des paraboles circonscrites, des paraboles inscrites et des paraboles conjuguées à un triangle sont des hypocycloïdes à trois rebroussements. Le cercle inscrit dans la première courbe est le cercle des neuf points du triangle obtenu en joignant les milieux des côtés du triangle donné ; le cercle inscrit dans la seconde courbe est le cercle circonscrit au triangle, et le cercle inscrit dans la troisième courbe est le cercle des neuf points du triangle.

De ces théorèmes, dont deux au moins sont connus, et qui se ramènent tous à cette unique proposition : *L'enveloppe des droites de Simson d'un triangle est une hypocycloïde à trois rebroussements,* on déduit les conséquences suivantes :

L'axe d'une parabole, conjuguée à un triangle, est asymptote à une hyperbole équilatère circonscrite au triangle.

L'axe d'une parabole, circonscrite à un triangle, est asymptote à une hyperbole équilatère passant par les milieux des côtés du triangle.

L'axe d'une parabole, inscrite à un triangle, est asymptote à une hyperbole équilatère passant par les sommets du triangle obtenu en menant par chaque sommet du triangle donné la parallèle au côté opposé.

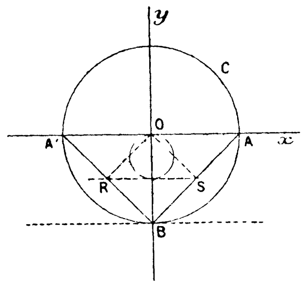
En faisant usage du corollaire (3), nous nous proposons de résoudre le problème donné au concours d'admission à l'École Navale, en 1893.

On considérait les paraboles passant par les trois sommets d'un triangle rectangle isoscèle ABA' et l'on demandait (*fig.* 2) :

1° Démontrer que, par chaque point du plan, passent deux de ces paraboles. Soit M un point quelconque du plan. Dans le faisceau des coniques passant par les quatre points ABA'M, il en existe toujours deux tangentes à la droite de l'infini, c'est-à-dire deux paraboles.

2° De distinguer les régions du plan pour lesquelles ces deux paraboles sont réelles. Pour que les deux paraboles du faisceau (A B A′M) soient réelles, il faut que la conique des neuf points du faisceau soit une hyperbole, ce qui exige que le quadrilatère A B A′M soit convexe. Le point M ne doit donc se trouver, ni dans l'in-

Fig. 2.



térieur du triangle A A′B, ni dans le prolongement des angles de ce triangle, au delà de chaque sommet.

3° De démontrer que le lieu des points M, pour lesquels les axes des deux paraboles correspondantes sont rectangulaires, est une circonférence (c). En effet, lorsque les axes des deux paraboles d'un faisceau (A B A′M) sont rectangulaires, les rayons doubles du faisceau involutif des directions asymptotiques de ces coniques, étant rectangulaires, sont conjugués par rapport aux directions isotropes : donc les directions isotropes sont directions asymptotiques d'une conique du faisceau, c'est-à-dire qu'il existe un cercle dans le faisceau, ce qui exige que le point M se trouve sur le cercle (c) circonscrit au triangle ABA′.

4° On demandait le lieu L des projections du point O sur les axes des paraboles circonscrites au triangle ABA′. C'est la podaire du point O relative à l'enveloppe des axes des paraboles. Or cette enveloppe, d'après ce que nous avons vu, est une hyperboloïde à trois rebroussements, admettant pour cercle inscrit le cercle des neuf points du triangle ORS, c'est-à-dire un cercle tangent en O à la droite AA' et passant par le milieu de OB. Donc la courbe L est une quartique ayant un point triple en O et ayant pour directions asymptotiques doubles les droites isotropes (*voir* notre solution du problème du Concours d'admission à l'Ecole Polytechnique, en 1887). Les trois tangentes à l'hypocycloïde issues de O étant la droite OB et les droites OR, OS, bissectrices de l'angle xOy (la première étant l'axe de la parabole qui a son sommet en B, les deux autres les axes des paraboles formées par les côtés AB, A'B du triangle AA'B et les parallèles à ces côtés menées respectivement par les sommets opposés), les tangentes à la courbe L, en son point triple O, seront les deux droites OR, OS et la droite AA'. De plus, la droite AA' et la parallèle menée par B constituant une parabole du système, dont l'axe est la parallèle équidistante passant par le milieu I de OB, le point I appartient à la courbe L. Il résulte de là, et sans aucun calcul, que la quartique L a pour équation

$$(x^2+y^2)^2+\frac{R}{2}y(y-x)(y+x)=0,$$

en posant, d'après l'énoncé,

$$OA = OA' = OB = R.$$

On construira géométriquement point par point ce trifolium en prenant les pieds des perpendiculaires menées de O sur les droites de Simson du triangle rectangle isoscèle ORS, lesquelles s'obtiennent bien simplement.

5° On demandait de prouver que, lorsque le point M décrit la circonférence (c), le point de rencontre des axes des deux paraboles, passant par ce point, décrit également une circonférence. Cela résulte immédiatement de la propriété bien connue de l'hypocycloïde à trois rebroussements : le lieu des sommets des angles droits circonscrits est le cercle inscrit à la courbe. Or, lorsque le point M décrit la circonférence (c), les axes des deux paraboles correspondantes sont rectangulaires; donc leur point de concours décrit le cercle des neuf points du triangle ORS, c'est-à-dire un cercle tangent en O à AA' et ayant pour rayon $\frac{R}{4}$.

6° On demandait enfin de prouver que l'hyperbole équilatère circonscrite au triangle ABA' et dont les axes sont parallèles aux axes des deux paraboles passant par un point M de la circonférence (c) passe par ce point M. Cela résulte immédiatement de ce qu'il existe une seule hyperbole équilatère dans un faisceau, et de ce que les coniques d'un faisceau (AA'BM), auquel appartient un cercle (c), ont leurs axes parallèles.