NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ROMUALD BLAZEIEVSKI

Sur un problème de géométrie plane

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 28-40

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__28_0>

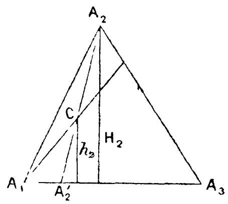
SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE PLANE;

PAR M. ROMUALD BLAZEIEVSKI.

RELATIONS ENTRE LES DISTANCES D'UN POINT DU PLAN AUX SOMMETS D'UN TRIANGLE.

Supposons qu'un point C (*fig.* 1) est joint aux sommets A_1, A_2, A_3 par les droites A_1C, A_2C, A_3C : dési-

Fig. 1.



gnons par w_1, w_2, w_3 les segments $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $A_3A'_3$, par z_1, z_2, z_3 les distances A_1C, ..., nous avons le théorème (Euler) exprimé par l'équation

$$(1)\qquad \frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2} + \frac{z_3}{w_3} = 2.$$

En effet, soient h_2, H_2 les hauteurs des triangles A_1CA_3, $A_1A_2A_3$ ayant A_1A_3 pour base, nous avons

$$\begin{aligned}&\text{surf. } A_1CA_3 : \text{surf. } A_1A_2A_3\\ &= h_2 : H_2 = CA'_2 : A_2A'_2 = w_2 - z_2 : w_2.\end{aligned}$$

De la même façon, eu égard aux triangles A_1CA_2, A_2CA_3,

$$\text{surf. } A_1CA_2 : \text{surf. } A_1A_2A_3 = w_3 - z_3 : w_3.$$
$$\text{surf. } A_2CA_3 : \text{surf. } A_1A_2A_3 = w_1 - z_1 : w_1.$$

La somme des premiers termes est égale à $A_1 A_2 A_3$; ainsi

$$1 = \frac{w_1 - z_1}{w_1} + \frac{w_2 - z_2}{w_2} + \frac{w_3 - z_3}{w_3},$$

et après quelques réductions nous avons l'équation (1). Si le triangle doit être réel, les z doivent satisfaire à une seconde condition. Nommons $\theta_1 = \widehat{A_2 C A_3}$, $\theta_2 = \widehat{A_3 C A_1}$, $\theta_3 = \widehat{A_1 C A_2}$, A le double de la surface du triangle, nous avons

$$\begin{aligned} w_1 z_2 \sin\theta_3 + w_1 z_3 \sin\theta_2 &= A, \\ w_2 z_1 \sin\theta_3 + w_2 z_3 \sin\theta_1 &= A, \\ w_3 z_1 \sin\theta_2 + w_3 z_2 \sin\theta_1 &= A, \end{aligned}$$

ou bien, en résolvant par rapport à $\sin\theta_1$,

$$\frac{D \sin\theta_1}{A} = \begin{vmatrix} 1 & w_1 z_3 & w_1 z_2 \\ 1 & 0 & w_2 z_1 \\ 1 & w_3 z_1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad D = \begin{vmatrix} 0 & w_1 z_3 & w_1 z_2 \\ w_2 z_3 & 0 & w_2 z_1 \\ w_3 z_2 & w_3 z_1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$D \sin\theta_1 = A(-z_1^2 w_2 w_3 + z_1 z_2 w_1 w_3 + z_1 z_3 w_1 w_2),$$

ou, d'après l'équation (1),

$$\begin{aligned} D \sin\theta_1 &= A \left(-\frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2} + \frac{z_3}{w_3} \right) z_1 w_1 w_2 w_3 \\ &= 2A\, w_1 w_2 w_3 z_1 \left(1 - \frac{z_1}{w_1} \right). \end{aligned}$$

Pour la réalité de θ_1, on doit avoir

$$\left| 2A\, w_1 w_2 w_3 z_1 \left(1 - \frac{z_1}{w_1} \right) \right| < |D|,$$

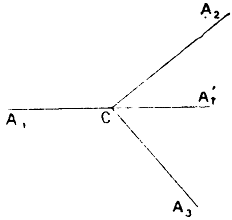
et deux autres inégalités doivent avoir lieu :

$$\left| 2A\, w_1 w_2 w_3 z_2 \left(1 - \frac{z_2}{w_2} \right) \right| < |D|,$$

$$\left| 2A\, w_1 w_2 w_3 z_1 \left(1 - \frac{z_3}{w_3} \right) \right| < |D|.$$

Les z choisis d'après les conditions exprimées par les inégalités et par l'équation (1) permettent de construire le triangle $A_1A_2A_3$. Faisons (*fig.* 2) $A_1C = z_1$, $\widehat{A_1CA_2} = \theta_3$, $A_1CA_3 = \theta_2$, $CA_2 = z_2$, $CA_3 = z_3$: pre-

Fig. 2.



nons $A_1A'_1$ pour l'axe des x, la perpendiculaire en C à $A_1A'_1$ pour l'axe des y. Nous avons, pour les coordonnées de A'_1, A_2, A_3,

A'_1	$w_1 - z_1$,	0,
A_2	$-z_2\cos\theta_3$,	$z_2\sin\theta_3$,
A_3	$-z_3\cos\theta_2$,	$-z_3\sin\theta_2$.

La surface du triangle $A_1A_2A_3$ sera la moitié de l'expression

$$\begin{vmatrix} 1 & w_1 - z_1 & 0 \\ 1 & -z_2\cos\theta_3 & z_2\sin\theta_3 \\ 1 & -z_3\cos\theta_2 & -z_3\sin\theta_2 \end{vmatrix}$$
$$-z_2z_3(\sin\theta_2\cos\theta_3 + \cos\theta_2\sin\theta_3)$$
$$+(w_1 - z_1)(z_2\sin\theta_3 + z_3\sin\theta_2),$$

ou bien

$$z_2z_3\sin(2\pi - \theta_1) + (w_1 - z_1)(z_2\sin\theta_3 + z_3\sin\theta_2).$$

D'après les valeurs des sinus des angles θ_1, θ_2, θ_3 données tout à l'heure, cette expression est proportionnelle à

$$-z_2z_3z_1\left(1 - \frac{z_1}{w_1}\right)$$
$$+(w_1 - z_1)\left[z_2z_1\left(1 - \frac{z_3}{w_3}\right) + z_3z_2\left(1 - \frac{z_2}{w_2}\right)\right].$$

Selon le théorème d'Euler cette quantité s'annule. Ainsi les points A_2, A_3, A'_1 sont situés sur une ligne droite. De même A'_1 est sur la droite A_2A_3, A'_3 sur A_1A_2. Parmi les triangles construits d'après cette méthode, il peut s'en rencontrer de tels que z_1, z_2, z_3 soient les bissectrices des angles A_1, A_2, A_3. En donnant cette condition, nous avons un problème déterminé : soient w_1, w_2, w_3 les bissectrices du triangle données en longueur, mais non en position, trouver le triangle.

THÉORÈMES SUR LES BISSECTRICES.

Théorème I. — *Décrivons le cercle circonscrit à* $A_1A_2A_3$, *soit* A''_2 *le milieu de l'arc* A_1A_3, *on a la relation*

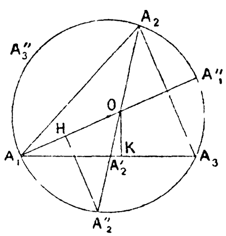
$$A_1A''_2 : A''_2O = A_2O : A_2A'_2.$$

En effet (*fig.* 3), d'après la construction,

$$\widehat{A_1A_2A''_2} = \widehat{A''_2A_1A_3}, \qquad \widehat{A_2A_1A''_1} = \widehat{A_3A_1A''_1},$$

$$\tfrac{1}{2}A''_2A_1 = \tfrac{1}{2}A''_2A_3, \qquad \tfrac{1}{2}A_3A''_1 = \tfrac{1}{2}A''_1A_2,$$

Fig. 3.



en désignant $A''_2A_1, \ldots$ les arcs $A''_2A_1, \ldots$; en ajoutant

$$\tfrac{1}{2}(A''_2A_1 + A_2A''_1) = \tfrac{1}{2}(A''_2A_3 + A_3A''_1),$$

c'est-à-dire les angles $A_1OA''_2$, A''_2A_1O sont égaux, et, par suite,

$$A_1A''_2 = A''_2O.$$

Les triangles $A_1A_2A''_2$, $A_1A'_2A''_2$ sont semblables, ayant

$$\widehat{A''_2A_1A_2} = \widehat{A_1A'_2A''_2},$$

et l'angle $A_1A''_2A'_2$ commun. Nous pouvons conclure la relation

$$A_1A''_2 : A_2A''_2 = A'_2A''_2 : A_1A''_2;$$

mais comme $A_1A''_2 = A''_2O$,

$$A''_2O : A_2A''_2 = A'_2A''_2 : A''_2O;$$

mais $A_2A''_2 = OA_2 + OA''_2$, $A'_2A''_2 = OA_2 + OA''_2 - A_2A'_2$, en désignant $A_1A''_2$ par ζ_2, OA_2 par z_2, $A_2A'_2$ par w_2, nous avons

$$(2)\quad \zeta_2 : z_2 + \zeta_2 = z_2 + \zeta_2 - w_2 : \zeta_2, \quad (2z_2 - w_2)\zeta_2 = z_2(w_2 - z_2).$$

Théorème II. — *Soit* D *le diamètre* 2OK *du cercle inscrit, nous avons*

$$OA''_2 : \tfrac{1}{2}A_1O = OA_3 : \tfrac{1}{2}D.$$

En effet, $\widehat{A_1A''_2O} = \widehat{A_1A_3A_2}$, car ces angles, inscrits dans le cercle, s'appuient sur le même arc A_1A_2; A''_2H est la hauteur du triangle équilatéral A''_2A_1O; les triangles rectangles A''_2HO, KOA_3, ayant égaux les angles aigus, sont semblables et nous avons la relation ci-dessus, qu'on peut écrire

$$(3)\qquad \zeta_2 = \frac{z_1z_3}{D}.$$

UNE MÉTHODE POUR S'ASSURER QUE LE PROBLÈME A DES SOLUTIONS RÉELLES, QUELLES QUE SOIENT LES VALEURS ARBITRAIRES w_1, w_2, w_3.

Faisant une substitution circulaire des indices dans (2) et (3), nous avons

$$(4)\qquad \zeta_2(2z_1 - w_1) = z_1(w_1 - z_1), \qquad D\zeta_1 = z_2z_3,$$

$$(5)\qquad \zeta_3(2z_3 - w_3) = z_3(w_3 - z_3), \qquad D\zeta_3 = z_1z_2.$$

Ces six équations et l'équation (1) déterminent les inconnues z, mais l'élimination est très laborieuse, comme nous verrons plus loin. Ainsi nous choisirons la méthode géométrique suivante. Supposons

$$m_1 = \frac{w_1}{w_2 w_3}, \qquad m_2 = \frac{w_2}{w_1 w_3}, \qquad m_3 = \frac{w_3}{w_1 w_2},$$

$$\frac{z_1}{w_1} = x_1, \qquad \frac{z_2}{w_2} = x_2, \qquad \frac{z_3}{w_3} = x_3,$$

$$\frac{\zeta_1}{w_1} = y_1, \qquad \frac{\zeta_2}{w_2} = y_2, \qquad \frac{\zeta_2}{w_3} = y_3;$$

alors les équations données par le théorème I prennent la forme

$$y(2x - 1) = x(1 - x),$$

c'est-à-dire les points $x_i, y_i (i = 1, 2, 3)$ sont sur une conique. En outre, nous avons

$$D m_1 y_1 = x_2 x_3, \qquad D m_2 y_2 = x_1 x_3,$$
$$D m_3 y_3 = x_1 x_2, \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2.$$

Introduisons une variable u déterminée par

$$x_1 x_2 x_3 = D u,$$
$$m_1 x_1 y_1 = u, \qquad m_2 x_2 y_2 = u, \qquad m_3 x_3 y_3 = u.$$

Le point x_1, y_1 est sur l'intersection de deux courbes du second degré,

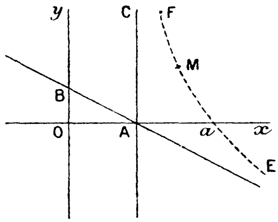
$$y(2x - 1) - x(1 - x) = 0, \qquad m_1 xy = u.$$

Laissant pour une autre occasion la discussion du cas où $x > 1$, remarquons cette propriété intéressante de ces courbes qu'elles ont un seul point d'intersection. En effet, la première est une hyperbole passant par l'origine et le point $x = 1$ dont les asymptotes sont les droites

$$x - \tfrac{1}{2} = 0, \qquad 4y + 2x - 1 = 0;$$

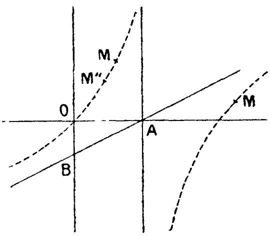
la seconde courbe est une hyperbole ayant pour asymptotes les axes des coordonnées (*fig.* 4). L'intersection de ces deux courbes peut être située seulement sur la

Fig. 4.



branche FME. Remarquons que pour $x > 1$ ou $x < \frac{1}{2}$ la première hyperbole a la forme de la *fig.* 5. Faisons varier u depuis o jusqu'à l'infini : pour $u = 0$ on a $y = 0$, $x = 1$; pour $u = \infty$, $x = \frac{1}{2}$. La somme des va-

Fig. 5.



leurs des x varie depuis le maximum 3 jusqu'à $\frac{3}{2}$. La condition $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ sera remplie pour de certaines valeurs des x renfermées entre les limites 1 et $\frac{1}{2}$, car la dérivée $\frac{dx}{du}$ reste négative pour toutes les valeurs réelles de u. Nous avons

$$m_1 \frac{x^2(1-x)}{2x-1} = u;$$

prenant la dérivée, on trouve

$$\frac{dx}{du} = \frac{(2x-1)^2}{m_1 x(-2+5x-4x^2)};$$

le dénominateur n'a pas d'autres racines réelles, excepté $x = 0$, mais cette valeur n'est pas renfermée dans les limites données pour la variation de x. Ainsi $x_1 + x_2 + x_3$, passant de la valeur 3 à la valeur $\frac{3}{2}$, prendra, pour une certaine valeur de u, la valeur 2, ce qui est la condition du problème.

SOLUTION ANALYTIQUE DU PROBLÈME.

Éliminant les y, nous avons

$$m_1 \mathrm{D} = \frac{(2x_1 - 1)x_2 x_3}{x_1(1 - x_1)}, \qquad m_2 \mathrm{D} = \frac{(2x_2 - 1)x_1 x_3}{x_2(1 - x_2)}.$$

$$m_3 \mathrm{D} = \frac{(2x_3 - 1)x_1 x_2}{x_3(1 - x_3)}, \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2.$$

Supposons que x_1, x_2, x_3 soient les racines d'une équation du troisième degré

$$t^3 - 2t^2 + yt - \frac{q}{z}(y - 1) = 0 :$$

y et z sont les nouvelles inconnues, q est une constante ; posons

$$h = m_1 + m_2 + m_3,$$
$$k = m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3.$$
$$l = m_1 m_2 m_3.$$

D'après la théorie des fonctions symétriques, on trouve

$$\text{(A)} \qquad \frac{f}{x} = 5 + \frac{z(y - 1)}{z - q} - \frac{y^2 z}{q(y - 1)},$$

$$\text{(B)} \qquad q - z = 4x^2(y - 1)(z - 2q) + qx^2,$$

$$\text{(C)} \qquad (q - z)z = (8q - 3z)x^3 + 4(z - 2q)yx^3,$$

en substituant au lieu de D la quantité

$$x - \frac{1}{\mathrm{D}\sqrt{k}},$$

et posant

$$hD = \frac{f}{x}, \qquad lD^3 = \frac{q}{x^3}, \qquad q_0 = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Retranchant l'équation (B) de (C) après avoir multiplié par x, nous avons $x^3 - x + z = 0$. Il est intéressant que x_1, x_2, x_3 peuvent être exprimés comme fonctions elliptiques de la même variable. Nous avons

$$m_1 q_0 x(1 - x_1) = x x_2 x_3 (2x_1 - 1),$$
$$m_2 q_0 x_2 (1 - x_2) = x x_1 x_3 (2x_2 - 1).$$

. . . .

Par une simple transformation, nous trouvons

$$m_1 q_0 x_1 (1 - x_1) - m_2 q_0 x_2 (1 - x_2)$$
$$= x x_3 (x_1 - x_2) = 2 x x_1 - x x_1^2 - (2 x x_2 - x x_2^2).$$

Ainsi le polynome

$$xF = m_i q_0 x_i (1 - x_i) - 2 x x_i + x x_i^2$$

n'éprouve aucun changement quand on permute les indices i: c'est une fonction symétrique de x_i. Répétant la méthode par laquelle nous avons trouvé l'équation (A), nous avons

$$\frac{f}{x} = 3 + \frac{1 + F}{z - q} z + \frac{Fyz}{q(y - 1)};$$

en comparant avec A, nous avons

$$\frac{Fz(yz - q)}{q(z - q)(y - 1)} = \frac{yz - 2q}{z - q} - \frac{y^2 z}{q(y - 1)};$$

mais la seconde partie de l'équation est divisible par $2z - q$, comme on peut le vérifier facilement. Ainsi

$$zF = q(y - 1) - y(z - q) - q.$$

A l'aide des équations (A), (B), (C), on a

$$F = 1 + \frac{q - x}{4x^3},$$

et nous avons l'équation

$$(x - m_1 q_0)x_1^2 + (m_1 q_0 - 2x)x_1 = x + \frac{q - x}{4x^2},$$

avec deux autres analogues. En résolvant par rapport à x_1, on trouve sous le radical un polynome du quatrième degré.

NOTE A L'ARTICLE PRÉCÉDENT.

Pour être bref, nous avons donné les résultats de la transformation des équations par les fonctions symétriques sans aucune preuve; pour remplir cette lacune reprenons les équations

$$m_1 D = \frac{(2x_1 - 1)x_2 x_3)}{x_1(1 - x_1)}, \qquad m_2 D = \frac{(2x_2 - 1)x_1 x_3}{x_2(1 - x_2)},$$

$$m_3 D = \ldots, \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2.$$

Les quantités x_2, x_3 sont racines de l'équation

$$t^2 + (x_1 - 2)t + x_1^2 - 2x_1 + y = 0,$$

c'est-à-dire

$$x_2 x_3 = x_1^2 - 2x_1 + y,$$

$$(1 - x_2)(1 - x_3) = x_1^2 - x_1 + y - 1.$$

La fonction de x_1 entrant dans $m_1 D$ peut être représentée par

$$\frac{2x_1 - 1}{x_1(1 - x_1)} = \frac{1}{1 - x_1} - \frac{1}{x_1}.$$

Ainsi

$$m_1 D = \frac{x_1^2 - 2x_1 + y}{1 - x_1} - \frac{x_1^2 - 2x_1 + y}{x_1} = 3 - 2x_1 + \frac{y - 1}{1 - x_1} - \frac{y}{x_1}.$$

Multipliant les numérateurs et les dénominateurs des fractions

$\dfrac{1}{1-x_1}$, $\dfrac{1}{x_1}$ par $(1-x_2)(1-x_3)$, x_2x_3 et remarquant que

$$(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=y-1-\frac{q}{z}(y-1)=(y-1)\left(1-\frac{q}{z}\right),$$

$$x_1x_2x_3=\frac{q}{z}(y-1),$$

nous avons

$$m_1\mathrm{D}=3-2x_1+\frac{x_1^2-x_1+y-1}{1-\dfrac{q}{z}}-\frac{y(x_1^2-2x_1+y)}{\dfrac{q}{z}(y-1)};$$

mais, d'après la théorie des équations,

$$\Sigma x_1^2=(\Sigma x_1)^2-2\Sigma x_1x_2=4-2y;$$

ainsi nous avons la formule (A)

$$(\mathrm{A})\qquad h\mathrm{D}=5+\frac{y-1}{1-\dfrac{q}{z}}-\frac{y^2}{\dfrac{q}{z}(y-1)}.$$

Le produit $m_3m_2\mathrm{D}^2$ est exprimé par

$$\frac{(2x_3-1)(2x_2-1)x_1^2}{(1-x_3)(1-x_2)}=\frac{(4x_1^2-6x_1+4y-3)x_1^2}{x_1^2-x_1+y-1}$$
$$=4x_1^2-(2x_1+1)+\frac{(2y-3)x_1+y-1}{x_1^2-x_1+y-1};$$

multipliant la fraction par $1-x_1$ et divisant par la même quantité, nous aurons au dénominateur

$$(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=(y-1)\left(1-\frac{q}{z}\right),$$

ainsi

$$m_2m_3\mathrm{D}^2=4x_1^2-(2x_1+1)+\frac{y-1+(y-2)x_1-(2y-3)x_1^2}{(y-1)\left(1-\dfrac{q}{z}\right)};$$

l'équation (B) de l'article précédent est

$$k\mathrm{D}^2=4(4-2y)-4-3+\frac{y-1+2(y-2)-(2y-3)(4-2y)}{(y-1)\left(1-\dfrac{q}{z}\right)},$$

$$k\mathrm{D}^2=9-8y+\frac{4y-7}{1-\dfrac{q}{z}}.$$

L'équation (C) est le résultat de la substitution de $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$ dans le premier membre de l'équation

$$t^3 - 2t^2 + yt - \frac{q}{z}(y-1) = 0 = ft,$$

$$m_1 m_2 m_3 D^3 = \frac{x_1 x_2 x_3 (2x_1 - 1)(2x_2 - 1)(2x_3 - 1)}{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)} = \frac{8f(0)f(\frac{1}{2})}{f(1)},$$

$$8f\left(\frac{1}{2}\right) = (1-2x_1)(1-2x_2)(1-2x_3) = 4\left(1 - 2\frac{q}{z}\right)y + 8\frac{q}{z} - 3,$$

$$f(1) = (y-1)\left(1 - \frac{q}{z}\right), \qquad f(0) = -\frac{q}{z}(y-1),$$

$$D^3 = -\frac{q}{q-z}\left[4y\left(1 - \frac{2q}{z}\right) + \frac{8q}{z} - 3\right].$$

Chassant les dénominateurs, on trouve l'équation (C).

Nous avons posé l'équation

$$m_1 q_0 x_1 (1 - x_1) - 2xx_1 + xx_1^2 = xF,$$

désignant par F une fonction symétrique des racines de l'équation $f(t) = 0$. Divisant par $xx_1(1-x_1)$, on trouve

$$\frac{m_1 q_0}{x} + \frac{x_1 - 2}{1 - x_1} = \frac{F}{x_1(1-x_1)},$$

$$\frac{m_1 q_0}{x} = 1 + \frac{1+F}{1-x_1} + \frac{F}{x_1}, \qquad \frac{q_0}{x} = D,$$

$$\Sigma m_1 D = 3 + (1 F)\Sigma \frac{1}{1-x_1} + F\Sigma\frac{1}{x_1}.$$

Par la théorie des fonctions symétriques, nous avons

$$\Sigma m_1 D = 3 + \frac{(1+F)z}{z-q} + \frac{Fyz}{q(y-1)};$$

mais nous avons pour $\Sigma m_1 D$ l'équation (A). Ainsi

$$3 + \frac{(1+F)z}{z-q} + \frac{Fyz}{q(y-1)} = 5 + \frac{(y-1)}{z-q} - \frac{y^2 z}{q(y-1)},$$

$$F\left[\frac{z}{z-q} + \frac{yz}{q(y-)}\right] = 2 + \frac{(y-2)z}{z-q} - \frac{y^2 z}{q(y-1)},$$

$$\frac{Fz(yz-q)}{q(z-q)(y-1)} = \frac{yz-2q}{z-q} - \frac{y^2 z}{q(y-1)}.$$

Il est facile de constater que $yz-q$ entre comme facteur dans le second membre de l'équation: chassant les dénominateurs et divisant par $yz-q$, on trouve

$$Fz=-2q(1-y)-zy.$$

Les équations (B), (C) donnent

$$4(2q-z)x^2y=(9q-4z)x^2+z-q, \qquad z=x-x^3,$$
$$4F(1-x^2)x^3=8qx^2-(9q-4z)x^2-z+q$$
$$=-qx^2+4x^2z-z+q.$$

Pour $x=1$, z s'annule; ainsi la seconde partie de l'équation est divisible par $1-x$, ainsi que par $1+x$. On a, après avoir divisé les deux membres de l'équation par $1-x^2$.

$$4Fx^3=q+\frac{(4x^2-1)z}{-x^2+1}=q+\frac{(4x^2-1)(x-x^3)}{-x^2+1}=q-x+4x^3.$$

L'inconnue x_1 est déterminée par l'équation

$$(x-m_1q_0)x_1^2+(m_1q_0-2x)x_1=x+\frac{q-x}{4x^2},$$

dont le discriminant est

$$(m_1q_0-2x)^2+4(x-m_1q_0)\left(x+\frac{q-x}{4x^2}\right);$$

désignons-le par

$$\frac{R(x)}{4x^2}.$$

$R(x)$ étant un polynome du quatrième degré, on a

$$2(m_1q_0-2x)x_1+m_1q_0-2x=\frac{1}{2x}\sqrt{R(x)}.$$

Si l'on introduit une variable u

$$u=\int\frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

on aura x_1 fonction doublement périodique de u.