NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

AUDIBERT

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1893). Solution de la question d'analyse

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 22-27

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__22_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1895). SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE;

PAR M. AUDIBERT.

Nous convenons que, sur le chemin OBx, on ne rencontre aucun des points critiques $a_1, \ldots, a_8$ de la fonction $\frac{z^{p-1}}{y}$, et que, sur le parcours OCa_j, il ne s'en trouve qu'un, a_j, qui termine la trajectoire de z.

Cela posé, un parcours quelconque donné, pour lequel la valeur de l'intégrale est V, se ramènera, d'après un théorème connu, au parcours d'un certain nombre de *lacets* suivi du chemin OBx.

On entend par lacet relatif au pôle aj l'intégrale, prise le long de OCaj, d'un cercle infiniment petit enveloppant ce pôle, et du retour suivant ajCO. Un lacet n'enveloppe qu'un point critique.

Dans le cas considéré, l'intégrale sur le petit cercle est nulle; mais, quand z a contourné aj, le radical a changé de signe et la valeur du lacet est

$$\int_0^{aj} \frac{z^{p-1}\,dz}{y} + \int_{aj}^{0} \frac{z^{p-1}\,dz}{-y} = 2\,\mathrm{A}j.$$

Le radical supposé pris avec la valeur initiale $+y_0$, devient $-y_0$ quand z revient en O, après le parcours du lacet.

L'intégrale prise sur deux lacets successifs relatifs aux pôles aj et ai sera $2(\mathrm{A}j - \mathrm{A}i)$. Après ce parcours, la fonction reprendra la valeur et le signe qu'elle avait avant; $2(\mathrm{A}j - \mathrm{A}i)$ est une période.

Prise suivant un chemin composé de plusieurs lacets et du parcours OBx, l'intégrale

$$\mathrm{V} = 2\,\mathrm{A}_1 - 2\,\mathrm{A}_2 + \ldots \pm 2\,\mathrm{A}j \mp 2\,\mathrm{A}i \pm \mathrm{I}.$$

Le signe $-$ ou $+$ affectera I suivant que le parcours comprendra, en outre de OBx, un nombre impair ou pair de lacets, ou, ce qui revient au même, un nombre entier de périodes suivies ou non d'un lacet.

En désignant par φj une période et par mj un nombre entier positif ou négatif ou nul, on aura

$$\mathrm{V} = \Sigma\, mj\varphi j + \mathrm{I} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{V} = \Sigma\, mj\varphi j + 2\,\mathrm{A}j - \mathrm{I}.$$

En remplaçant dans cette seconde évaluation de V $2\,\mathrm{A}j$ par $2\,\mathrm{A}_1 - 2(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}j)$, elle devient

$$\mathrm{V} = \Sigma\, mj\varphi j + 2\,\mathrm{A}_1 - \mathrm{I}.$$

Le polynôme $R(z)$ a huit racines, mais on n'aura pas $\frac{8.7}{1.2}$ périodes distinctes. On peut d'abord ne laisser subsister dans $\Sigma m_j \varphi_j$ que les périodes de la forme

$$2(A_1 - A_j),$$

car on a

$$2(A_j - A_i) = 2(A_1 - A_i) - 2(A_1 - A_j).$$

A ce compte, il y aurait encore sept périodes; mais comme (même dans le cas de $p = 3$) l'intégrale V prise sur un cercle de rayon infini tracé de l'origine est nulle, et qu'on peut passer du parcours des huit lacets successifs au cercle infini, sans franchir de pôle,

$$2A_1 - 2A_2 + \ldots + 2A_7 - 2A_8 = 0,$$

et, par suite,

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4 + \varphi_5 - \varphi_6 + \varphi_7 = 0.$$

On pourra donc éliminer φ_7, par exemple, et écrire

$$(1) \qquad V = m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \ldots + m_6\varphi_6 + (\mathrm{I} \text{ ou } 2A_1 - \mathrm{I}).$$

Les périodes composées $\omega_1, \ldots, \omega_6$, définies dans l'énoncé, sont liées aux périodes simples φ par les relations

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \omega_1,\\
\varphi_2 &= \omega_1 + \omega_2,\\
\varphi_3 &= \omega_2 + \omega_3,\\
\varphi_4 &= \omega_2 + \omega_3 + \omega_4,\\
\varphi_5 &= \omega_2 + \omega_4 + \omega_5,\\
\varphi_6 &= \omega_2 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6.
\end{aligned}$$

En éliminant les φ dans (1), on arrive à l'expression

$$(2) \qquad V = m_1\omega_1 + \ldots + m_6\omega_6 + (\mathrm{I} \text{ ou } 2A_1 - \mathrm{I}).$$

1° On suppose que la fonction $R(z)$, dont α serait racine, se réduise à $z^8 + az^4 + 1$; ce trinôme s'annulera pour les huit valeurs de z

$$\alpha,\quad -\alpha,\quad \alpha\sqrt{-1},\quad -\alpha\sqrt{-1},\quad \frac{1}{\alpha},\quad \frac{-1}{\alpha},\quad \frac{-\sqrt{-1}}{\alpha},\quad \frac{\sqrt{-1}}{\alpha}.$$

Posons

$$A_1 = \int_0^{\alpha} \frac{dz}{y},\qquad A_2 = \int_0^{\frac{1}{\alpha}} \frac{dz}{y},$$

ces intégrales étant prises suivant les droites $O\alpha$ et $O\frac{1}{\alpha}$, à la condition toutefois que ces chemins d'intégration ne rencontrent que les pôles α et $\frac{1}{\alpha}$. S'il en était autrement, si deux racines de $R(z)$ avaient même argument, ces parcours devraient être un peu infléchis.

Les huit lacets de l'intégrale $\omega = \int_0^x \frac{dz}{y}$ seront respectivement

$$\begin{array}{llll} 2A_1, & -2A_1, & 2A_1\sqrt{-1}, & -2A_1\sqrt{-1}, \\ 2A_2, & -2A_2, & -2A_2\sqrt{-1}, & 2A_2\sqrt{-1}. \end{array}$$

Les six périodes suivantes s'en déduisent

$$\begin{array}{lll} 4A_1, & 2A_1(1-\sqrt{-1}), & 2A_1(1+\sqrt{-1}), \\ 4A_2, & 2A_2(1+\sqrt{-1}), & 2A_2(1-\sqrt{-1}). \end{array}$$

On voit qu'elles ne sont pas toutes distinctes, car, en les désignant par ordre, par les lettres $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, on a

$$\varphi_2 + \varphi_3 = \varphi_1,\qquad \varphi_5 + \varphi_6 = \varphi_4.$$

On peut donc en supprimer deux, φ_2 et φ_5, par exemple, dans l'évaluation de ω.

On a encore les relations

$$2\varphi_3 - \varphi_1 = 4A_1\sqrt{-1},\qquad \varphi_4 - 2\varphi_6 = 4A_2\sqrt{-1}.$$

Les seconds membres, qui sont d'ailleurs des périodes relatives aux pôles $\alpha\sqrt{-1}$, $-\alpha\sqrt{-1}$, $\frac{\sqrt{-1}}{\alpha}$, $\frac{-\sqrt{-1}}{\alpha}$, peuvent être substitués à φ_3 et φ_4.

Finalement, on peut adopter pour ω les quatre périodes suivantes :

(3) $\qquad 4A_1,\quad 4A_2,\quad 4A_1\sqrt{-1},\quad 4A_2\sqrt{-1}.$

2° Considérons en second lieu l'intégrale

$$\upsilon = \int_0^x \frac{z^2\,dz}{y}.$$

Le lacet relatif au pôle α

$$2\int_0^\alpha \frac{z^2\,dz}{y}$$

s'exprimera par l'intégrale

$$2\int_{\frac{1}{\alpha}}^\infty \frac{dz}{y}$$

après le changement de z en $\frac{1}{z}$.

Ce lacet est égal, au signe près, à l'intégrale ω prise sur un chemin qui part de l'infini (où les éléments de ω sont nuls) sur la droite $O\frac{1}{\alpha}$, va jusqu'au pôle $\frac{1}{\alpha}$ qu'il contourne sur un petit cercle, et retourne à l'infini sur la même droite, sans toutefois franchir d'autre point critique.

La valeur de cette intégrale ne changera pas si nous étendons son double parcours jusqu'en O, à la condition toujours de ne pas franchir de point critique, et sous cette réserve on aura

$$2\int_{\frac{1}{\alpha}}^\infty \frac{dz}{y} = 2\int_0^\infty \frac{dz}{y}.$$

D'autre part, si l'on prolonge à l'infini *dans les mêmes conditions* le lacet $2A_2$ de ω, on peut écrire

$$2A_2 = \int_0^{\frac{1}{\alpha}} \frac{dz}{y} = \int_0^{\infty} \frac{dz}{y}.$$

Donc un lacet de υ relatif à un pôle est égal au lacet de ω relatif au pôle de valeur inverse et réciproquement.

Nous connaissons les lacets de υ ; en les combinant deux à deux, nous formerons les périodes de cette intégrale

$$4A_1, \quad 4A_2\sqrt{-1}, \quad -4A_1\sqrt{-1}, \quad 4A_2$$

qui sont distinctes, et ont avec celles de ω (3) les relations indiquées dans l'énoncé.

3° Le lacet relatif au pôle α de l'intégrale $A\omega + B\upsilon$ est

$$2\left(A\int_0^{\alpha} \frac{dz}{y} + B\int_0^{\frac{1}{\alpha}} \frac{dz}{y}\right);$$

il s'ensuit qu'en adoptant pour ω les quatre périodes (3), celles de $A\omega + B\upsilon$ seront déterminées : elles auront les valeurs suivantes

$$\begin{gathered} 4(AA_1 + BA_2), \quad 4(AA_1 - BA_2)\sqrt{-1}, \\ 4(AA_2 + BA_1), \quad 4(AA_2 - BA_1)\sqrt{-1}. \end{gathered}$$

Elles sont distinctes, mais, si l'on fait $A = B\sqrt{-1}$, elles deviennent

$$\begin{gathered} 4B(A_2 + A_1\sqrt{-1}), \quad -4B(A_1 + A_2\sqrt{-1}), \\ 4B(A_1 - A_2\sqrt{-1}), \quad -4B(A_2 + A_1\sqrt{-1}), \end{gathered}$$

et il n'y en a plus que deux de distinctes.