AURIC

Note sur le problème du billard circulaire

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 215-218
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__215_1>

NOTE SUR LE PROBLÈME DU BILLARD CIRCULAIRE [1];

PAR M. AURIC,

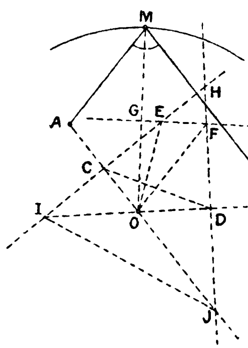
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Soient une circonférence O et deux points A et B; il s'agit de trouver sur la circonférence un point M tel que

$$\widehat{\mathrm{AMO}} = \widehat{\mathrm{OMB}};$$

Considérons les cercles circonscrits aux deux triangles AMO, OMB. Les centres E, F de ces cercles

Fig. 1.



se trouvent à l'intersection des perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés OA, OM, OB.

---

(1) Voir *Nouvelles Annales*, t. I, p. 36; 1842.

On a d'ailleurs

$$\widehat{CEO} = \widehat{AMO} = \widehat{OMB} = \widehat{OFD},$$

car l'angle inscrit est égal à la moitié de l'angle au centre correspondant. Les deux triangles rectangles CEO, OFD sont semblables, et l'on a

$$\frac{CE}{DF} = \frac{OC}{OD} = \frac{OA}{OB} = \text{const.}$$

Cette relation prouve que la droite EF enveloppe une parabole. En effet, considérons les droites CE, DF comme les projections horizontales de deux droites situées dans l'espace et telles que les deux couples de points (C, D) (E, F) aient la même cote verticale. Le lieu des droites EF ainsi considérées est un paraboloïde à plan directeur horizontal ayant comme directrices les deux droites CE, DF; par suite, toutes les droites EF sont tangentes au contour apparent de ce paraboloïde, qui est évidemment une parabole.

Parmi les positions particulières prises par la droite EF se trouvent : 1° la droite CE lorsque le point F coïncide avec H; 2° la droite DF lorsque le point E vient en H; 3° la droite CD; 4° la droite IJ obtenue par le prolongement des droites AO, BO. On a en effet, par la similitude des triangles COI, ODJ,

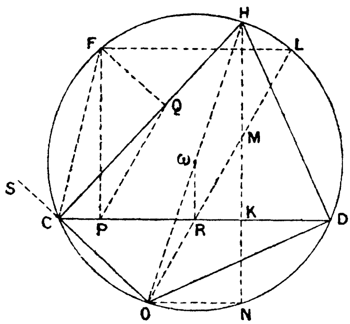
$$\frac{CI}{DJ} = \frac{OC}{OD} = \frac{OA}{OB}.$$

Rappelons que, lorsqu'un triangle est circonscrit à une parabole, le point de concours des hauteurs appartient à la directrice et le cercle circonscrit passe par le foyer.

Il en résulte que la directrice passe par O, point de concours des hauteurs du triangle HIJ, et que le foyer se trouve sur le cercle circonscrit à HCD, lequel est décrit sur HO comme diamètre.

Soient donc le triangle HCD, ω le cercle circonscrit décrit sur OH comme diamètre, M le point de concours des hauteurs.

Fig. 2.



On sait, d'après un théorème connu, que $KM = KN$; or l'angle $\widehat{HNO}$ est droit; il en résulte que ON et CD sont parallèles et que, par suite, la directrice OM passe par R milieu de CD.

Soient f le foyer de la parabole, P, Q ses projections sur les tangentes CD, CH ; la droite PQ est la tangente au sommet, et, par suite, est parallèle à OL; or le quadrilatère fCPQ est inscriptible; d'où

$$\widehat{fCQ} = \widehat{fPQ},$$

ou

$$\widehat{fCS} = \widehat{QPD} = \text{LON};$$

or

$$\widehat{LON} = \tfrac{1}{2}(\text{arc DL} + \text{arc DN}),$$

$$\widehat{fCS} = \tfrac{1}{2}(\text{arc} fC + \text{arc CO}),$$

comme arc CO $=$ arc DE; il en résulte que arc fC $=$ arc DL, c'est-à-dire que fL est parallèle à CD.

La parabole est donc entièrement déterminée; il suffit de construire le cercle circonscrit à OCD, de joindre O au milieu de CD et de mener Lf parallèle à CD; f est le foyer, OL la directrice.

Revenant à la figure primitive, on voit que EF est tangente à un cercle de centre O et de rayon $OG = \frac{1}{2}OM$. Par suite, les solutions cherchées seront les tangentes communes à la parabole et à ce cercle; il y aura quatre, trois ou deux solutions selon que le cercle est extérieur, tangent ou sécant à la parabole.

Lorsque le point O, centre du cercle, se trouve sur l'axe de la parabole, le problème s'achève avec la règle et le compas, car les solutions sont symétriques par rapport à cet axe; dans ce cas, l'angle fOL est droit, c'est-à-dire que fL est un diamètre du cercle circonscrit.

Les solutions trouvées ne sont pas toujours des solutions dans le véritable sens du mot; en d'autres termes, la bille ne pourrait pas toujours suivre matériellement le chemin qui lui est tracé; on s'en rend parfaitement compte en examinant quelques cas particuliers.