

PAUL APPELL

Courbes autopolaires

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 13
(1894), p. 206-210

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__206_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

COURBES AUTOPOLAIRES ;

PAR M. PAUL APPELL.

1^o *Coniques autopolaires.* — Soit S une conique fixe; une conique Σ est *autopolaire par rapport à S* ou simplement *autopolaire* quand elle coïncide avec sa polaire réciproque par rapport à S .

Soient a un point de Σ et B la tangente en ce point; la polaire A du point a est tangente à Σ et son point de contact est le pôle b de B . Le triangle de côtés A , B , ab est conjugué à S ; appelant $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ les équations des trois droites A , B et ab , les équations des coniques S et Σ seront de la forme

$$(S) \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = 0,$$

$$(\Sigma) \quad 2XY - \lambda Z^2 = 0.$$

Il reste à déterminer λ de façon que Σ soit autopolaire. Un calcul facile montre que la polaire réciproque de Σ par rapport à S est

$$2\lambda XY + Z^2 = 0;$$

comme elle doit coïncider avec Σ , on a

$$\lambda^2 = 1, \quad \lambda = \pm 1.$$

Ainsi il y a deux coniques tangentes en a et b à A et B autopolaires par rapport à S :

$$2XY + Z^2 = 0, \quad 2XY - Z^2 = 0.$$

Ces deux coniques sont bitangentes à S , les cordes de contact étant

$$X \pm Y = 0.$$

Cette dernière propriété est évidente géométriquement.

2° *Équation générale des coniques autopolaires par rapport à une conique donnée*

$$(S) \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = 0.$$

Toute conique autopolaire étant bitangente à S aura une équation de la forme

$$f(X, Y, Z) \equiv (uX + vY + wZ)^2 + \lambda(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0.$$

Les coordonnées du pôle de la tangente au point X , Y , Z sont

$$(1) \quad X' = \frac{1}{2}f'_X, \quad Y' = \frac{1}{2}f'_Y, \quad Z' = \frac{1}{2}f'_Z.$$

Pour avoir le lieu de ce pôle X' , Y' , Z' , quand X , Y , Z décrit la conique $f(X, Y, Z) = 0$, il faut éliminer X , Y , Z entre $f = 0$ et les équations (1). Le calcul est le même que pour former l'équation tangentielle de $f = 0$.

Si l'on écrit

$$f(X, Y, Z) = AX^2 + AY^2 + AZ^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY,$$

la polaire réciproque est

$$(2) \quad aX^2 + a'Y^2 + a''Z^2 + 2bYZ + 2b'ZX + 2b''XY = 0,$$

où a, a', a'', b, b', b'' sont les mineurs du discriminant

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix},$$

par rapport aux éléments A, A', \dots

$$a = A'A'' - B^2, \quad b'' = BB' - A''B, \quad \dots$$

Faisant le calcul, on trouve

$$\begin{aligned} a &= \lambda(v^2 + w^2 + \lambda), & b &= -\lambda vw, \\ a' &= \lambda(u^2 + w^2 + \lambda), & b' &= -\lambda wu, \\ a'' &= \lambda(u^2 + v^2 + \lambda), & b'' &= -\lambda uv. \end{aligned}$$

Pour que la conique (2) soit identique à $f(X, Y, Z)$, il faut et il suffit, comme on le voit immédiatement, que

$$u^2 + v^2 + w^2 - 2\lambda = 0.$$

L'équation générale des coniques Σ autopolaires à S est donc

$$(\Sigma) \quad 2(uX + vY + wZ)^2 - (u^2 + v^2 + w^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0.$$

Elle contient deux paramètres arbitraires, les rapports

$$\frac{u}{w} \text{ et } \frac{v}{w}.$$

Comme exercice, nous indiquerons la question inverse : *Étant donnée une conique, trouver les coniques par rapport auxquelles elle est autopolaire.*

3° *Courbes autopolaires.* — Une courbe quelconque est autopolaire par rapport à S si elle coïncide avec sa polaire réciproque par rapport à S.

Supposons que, dans l'équation générale des coniques Σ , on mette, pour u, v, w , des fonctions quelconques d'un paramètre t . Alors l'enveloppe des coniques (Σ), quand ce paramètre t varie, se compose d'abord de la conique donnée S, puis d'une courbe C qui est autopolaire. En effet, soient a un point de contact de C avec Σ , B la tangente commune en a ; si l'on prend la figure polaire réciproque, les polaires réciproques de C et Σ sont deux courbes C' et Σ' tangentes au point b qui est le pôle de B. Mais Σ' coïncide avec Σ ; l'enveloppe de la conique Σ est donc formée de la courbe C et de sa polaire réciproque C'. Si cette enveloppe ne se décompose pas en deux courbes distinctes, polaires réciproques l'une de l'autre, elle est donc autopolaire.

Exemple. — Soit $u = t, v = 0, w = 1$, la conique mobile (Σ) devient

$$\begin{aligned} 2(tX + Z)^2 - (t^2 + 1)(X^2 + Y^2 + Z^2) &= 0, \\ t^2(X^2 - Y^2 - Z^2) + 4tXZ + Z^2 - X^2 - Y^2 &= 0. \end{aligned}$$

L'enveloppe est alors, après réductions,

$$(X^2 + Z^2)^2 - Y^2 = 0.$$

Elle se décompose en la conique S et une conique

$$X^2 + Z^2 - Y^2 = 0,$$

qui est évidemment autopolaire.

Réciproquement, toute courbe autopolaire C peut être engendrée de cette façon.

En effet, soient a un point de C et B la tangente en ce

point; par hypothèse, la polaire A de a est tangente à C en un point b pôle de B. On peut alors tracer une conique autopolaire Σ tangente en a et b aux droites A et B, c'est-à-dire à la courbe C; on peut même en tracer deux, comme nous l'avons vu dans le premier paragraphe. La courbe C est l'enveloppe de ces coniques Σ qui la touchent chacune en deux points.

L'exemple le plus simple de cubique autopolaire est $y - 2x^3 = 0$, qui est autopolaire par rapport à

$$3x^2 - y^2 + 1 = 0.$$

4° Cette méthode, que j'ai indiquée sommairement dans le *Bulletin de la Société mathématique* (7 février 1894), est entièrement analogue à celle que M. Moutard a employée pour les courbes anallagmatiques; elle s'étend facilement à l'espace, elle s'étend également à la recherche des courbes laissées invariables par certaines transformations de Cremona; enfin elle est dans un rapport étroit avec la théorie de certaines équations aux dérivées partielles du premier ordre.

M. Koenigs a communiqué aussi à la Société mathématique, le 7 février 1894, une méthode permettant de trouver les cônes qui sont identiques à leurs supplémentaires : cette méthode donne évidemment une autre solution du problème que nous venons de traiter.

Enfin nous devons signaler sur un sujet analogue un article de M. Fouret *Sur les courbes planes ou surfaces qui sont leur propre polaire réciproque par rapport à une infinité de coniques* (*Bulletin de la Société philomathique*, p. 42-45; 1877). Dans cette Note, M. Fouret montre que les seules courbes possédant la propriété indiquée sont les courbes triangulaires signalées par MM. Klein et Lie.
