WORONTZOFF

Sur le développement en séries des fonctions implicites

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 167-184

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__167_1>

SUR LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DES FONCTIONS IMPLICITES;

PAR M. WORONTZOFF.

1. Soient

$$f_0(y), \quad f_1(y), \quad f_2(y), \quad \ldots, \quad f_m(y)$$

des fonctions algébriques ou transcendantes bien déterminées, r une racine simple de l'équation $f_0(y) = 0$ et

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} y = a + a_1 x + \frac{a_2}{1.2} x^2 + \frac{a_3}{1.2.3} x^3 + \ldots \\ + \frac{a_n}{1.2.3\ldots n} x^n + \mathrm{R} = a + \mathrm{X} \end{aligned} \right.$$

une racine commune des équations

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} f_0(y) + x f_1(y) + x^2 f_2(y) \\ + x^3 f_3(y) + \ldots + x^m f_m(y) = 0 \end{aligned} \right.$$

et

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} y - r + x \mathrm{F}_1(y) + x^2 \mathrm{F}_2(y) \\ + x^3 \mathrm{F}_3(y) + \ldots + x^m \mathrm{F}_m(y) = 0, \end{aligned} \right.$$

où

$$\mathrm{F}_1(y) = \frac{f_1(y)}{\Phi(y)}, \qquad \mathrm{F}_2(y) = \frac{f_2(y)}{\Phi(y)},$$

$$\mathrm{F}_3(y) = \frac{f_3(y)}{\Phi(y)}, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{F}_m(y) = \frac{f_m(y)}{\Phi(y)},$$

$$\Phi(y) = \frac{f_0(y)}{y - r}, \qquad \Phi(r) = f_0'(r), \qquad \Phi^n(r) = \frac{f_0^{(n+1)}(r)}{n+1}.$$

Nous nous proposons ici de déterminer les coefficients

$$a, \quad \frac{a_1}{1!}, \quad \frac{a_2}{2!}, \quad \ldots, \quad \frac{a_n}{n!},$$

dans la série (1).

2. Si $\mathrm{F}(u)$, $\mathrm{F}'(u)$, $\ldots$, $\mathrm{F}^{(n+1)}(u)$, pour les valeurs de u comprises entre $u_0 = f(\xi)$ et $u = f(\xi + z)$, et $f(t)$, $f'(t)$, $\ldots$, $f^{(n+1)}(t)$, pour les valeurs de t comprises entre $t_0 = \xi$ et $t = \xi + z$, sont des fonctions finies et continues, on a

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{F}[f(\xi + z)] \\ & = \left\{ \mathrm{F}(u_0) + \frac{(u - u_0)}{1} \mathrm{F}'(u_0) + \ldots \right. \\ & \quad + \frac{(u - u_0)^n}{1.2\ldots n} \mathrm{F}^{(n)}(u_0) \\ & \quad \left. + \frac{(u - u_0)^{n+1}}{1.2\ldots(n-1)} \mathrm{F}^{(n+1)}[u_0 + \theta(u - u_0)] \right\}_{u = f(\xi + z),\ u_0 = f(\xi)}. \end{aligned} \right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &f(\xi+z)\\ &\quad = f(\xi)+zf'(\xi)+z^2\frac{f''(\xi)}{2!}+\ldots\\ &\qquad + z^n\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}+z^{n+1}f^{(n+1)}\frac{(\xi+\theta_1 z)}{(n+1)!}\\ &\quad = C+C_1 z+\frac{C_2}{2!}z^2+\frac{C_3}{3!}z^3+\ldots\\ &\qquad + \frac{C_n}{n!}z^n+z^{n+1}f^{(n+1)}\frac{(\xi+\theta_1 z)}{(n+1)!},\end{aligned}\right.$$

où

$$C = f(\xi),\qquad C_n = f^{(n)}(\xi).$$

En remplaçant, dans le second membre de l'égalité (4), $f(\xi+z)$ par la série (5), on obtient

$$F[f(\xi+z)] = F[f(\xi)]+q_1 z+q_2 z^2+q_3 z^3+\ldots+q_n z^n+\ldots$$

et

$$\frac{\left\{D_z^n F[f(\xi+z)]\right\}_{z=0}}{1.2\ldots n} = q_n = \sum \frac{F^{(i)}(c)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!}\left(\frac{c_1}{1!}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{c_2}{2!}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{c_3}{3!}\right)^{\alpha_3}\cdots\left(\frac{c_n}{n!}\right)^{\alpha_n},$$

le signe sommatoire s'étendant à toutes les solutions entières positives des équations

$$1\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\ldots+n\alpha_n = n,$$
$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n = i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Mais

$$D_z^n F[f(\xi+z)] = D_\xi^n F[f(\xi+z)].$$
$$\left\{D_z^n F[f(\xi+z)]\right\}_{z=0} = \left\{D_\xi^n F[f(\xi+z)]\right\}_{z=0} = D_\xi^n F[f(\xi)];$$

par conséquent

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &D_\xi^n F[f(\xi)]\\ &\quad = n!\sum\frac{F^{(i)}[f(\xi)]}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots\alpha_n!}\\ &\qquad\times\left[\frac{f'(\xi)}{1!}\right]^{\alpha_1}\left[\frac{f''(\xi)}{2!}\right]^{\alpha_2}\left[\frac{f'''(\xi)}{3!}\right]^{\alpha_3}\cdots\left[\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\right]^{\alpha_n}\\ &\quad = n!\sum\frac{F^{(i)}(c)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha!\ldots\alpha_n!}\\ &\qquad\qquad\times\left(\frac{c_1}{1!}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{c_2}{2!}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{c_3}{3!}\right)^{\alpha_3}\cdots\left(\frac{c_n}{n!}\right)^{\alpha_n} = D_\xi^n F(c),\end{aligned}\right.$$

où

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + n\alpha_n = n,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n = i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$$

(J. Bertrand, *Calcul différentiel*, p. 308).

3. Maintenant substituons $a + \mathrm{X}$ au lieu de y, dans les équations (2) et (3), et supposons que les fonctions $f_0(a+\mathrm{X})$, $f_1(a+\mathrm{X})$, $f_2(a+\mathrm{X})$, $\ldots$, $f_m(a+\mathrm{X})$, $\mathrm{F}_1(a+\mathrm{X})$, $\mathrm{F}_2(a+\mathrm{X})$, $\ldots$, $\mathrm{F}_m(a+\mathrm{X})$ soient développables suivant les puissances croissantes de X ; on obtient alors, au moyen de la formule de Taylor,

$$f_0(a) + \mathrm{X}f_0'(a) + \frac{\mathrm{X}^2}{2!}f_0''(a) + \ldots + \frac{\mathrm{X}^n}{n!}f_0^{(n)}(a) + \mathrm{R}_1$$

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
&+ x\left[f_1(a) + \mathrm{X}f_1'(a) + \frac{\mathrm{X}^2}{2!}f_1''(a) + \ldots \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\mathrm{X}^{n-1}}{(n-1)!}f_1^{(n-1)}(a) + \mathrm{R}_2\right]\\
&+ x^2\left[f_2(a) + \mathrm{X}f_2'(a) + \frac{\mathrm{X}^2}{2!}f_2''(a) + \ldots \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\mathrm{X}^{n-2}}{(n-2)!}f_2^{(n-2)}(a) + \mathrm{R}_3\right]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ x^{m-2}\left[f_{m-2}(a) + \mathrm{X}f'_{m-2}(a) + \frac{\mathrm{X}^2}{2!}f''_{m-2}(a) + \ldots \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\mathrm{X}^{n-m+2}}{(n-m+2)!}f^{(n-m+2)}(a) + \mathrm{R}_{m-1}\right]\\
&+ x^{m-1}\left[f_{m-1}(a) + \mathrm{X}f'_{m-1}(a) + \frac{\mathrm{X}^2}{2!}f''_{m-1}(a) + \ldots \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\mathrm{X}^{n-m+1}}{(n-m+1)!}f_{m-1}^{(n-m+1)}(a) + \mathrm{R}_m\right]\\
&+ x^m\left[f_m(a) + \mathrm{X}f'_m(a) + \frac{\mathrm{X}^2}{2!}f''_m(a) + \ldots \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\mathrm{X}^{n-m}}{(n-m)!}f_m^{(n-m)}(a) + \mathrm{R}_{m+1}\right] = 0\ (n > m)
\end{aligned}\right.$$

et

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
& a - r + X + x\Big[F_1(a) + X\,F'_1(a) + \frac{X^2}{2!}\,F''_1(a) + \ldots \\
& \qquad\qquad + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!}\,F_1^{(n-1)}(a) + R'_1\Big] \\
& + x^2\Big[F_2(a) + X\,F'_2(a) + \frac{X^2}{2!}\,F''_2(a) + \ldots \\
& \qquad\qquad + \frac{X^{n-2}}{(n-2)!}\,F_2^{(n-2)}(a) + R'_2\Big] \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + x^{m-2}\Big[F_{m-2}(a) + X\,F'_{m-2}(a) \\
& \qquad + \frac{X^2}{2!}\,F''_{m-2}(a) + \ldots \\
& \qquad + \frac{X^{n-m+2}}{(n-m+2)!}\,F_{m-2}^{(n-m+2)}(a) + R'_{m-2}\Big] \\
& + x^{m-1}\Big[F_{m-1}(a) + X\,F'_{m-1}(a) \\
& \qquad + \frac{X^2}{2!}\,F''_{m-1}(a) + \ldots \\
& \qquad + \frac{X^{n-m+1}}{(n-m+1)!}\,F_{m-1}^{(n-m+1)}(a) + R'_{m-1}\Big] \\
& + x^m\Big[F_m(a) + X\,F'_m(a) + \frac{X^2}{2!}\,F''_m(a) + \ldots \\
& \qquad\qquad + \frac{X^{n-m}}{(n-m)!}\,F_m^{(n-m)}(a) + R'_m\Big] = 0 \; (n > m),
\end{aligned}
\right.
$$

où

$$
X = a_1 x + \frac{a_2}{2!}\,x^2 + \frac{a_3}{3!}\,x^3 + \ldots + \frac{a_n}{n!}\,x^n + R.
$$

De l'identité (7), en y égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x, on déduit

$$
\begin{aligned}
& f_0(a) = 0, \\
& a_1 f'_0(a) + f_1(a) = 0, \\
& \frac{a_2}{1.2}\,f'_0(a) + \frac{a_1^2}{1.2}\,f''_0(a) + a_1 f'_1(a) + f_2(a) = 0, \\
& \frac{a_3}{1.2.3}\,f'_0(a) + \frac{a_1 a_2}{1.2}\,f''_0(a) + \frac{a_1^3}{1.2.3}\,f'''_0(a) \\
& \quad + \frac{a_2}{1.2}\,f'_1(a) + \frac{a_1^2}{1.2}\,f''_1(a) + a_1 f'_2(a) + f_3(a) = 0, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

en considérant a comme fonction d'une variable fictive ξ, dont les dérivées successives seraient a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... et en ayant égard à la formule (6), on a généralement

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &D_\xi^p \frac{f_0(a)}{p!} + D_\xi^{p-1} \frac{f_1(a)}{(p-1)!} + D_\xi^{p-2} \frac{f_2(a)}{(p-2)!} + \dots \\ &\qquad + D_\xi^2 \frac{f_{p-2}(a)}{2!} + D_\xi f_{p-1}(a) + f_p(a) = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &D_\xi^n \frac{f_0(a)}{n!} + D_\xi^{n-1} \frac{f_1(a)}{(n-1)!} + \dots \\ &\qquad + D_\xi^{n-m+1} \frac{f_{m-1}(a)}{(n-m+1)!} + D_\xi^{n-m} \frac{f_m(a)}{(n-m)!} = 0, \end{aligned}\right.$$

où

$$p \leqq m, \qquad n \geqq m$$

et

$$D_\xi^k \frac{f_h}{k!}(a) = \sum \frac{f_h^{(i)}(a)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\dots\,\alpha_k!} \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{a_k}{k!}\right)^{\alpha_k},$$

le signe sommatoire s'étendant à toutes les solutions entières positives des équations

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k = k,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = i = 1, 2, 3, \dots, k.$$

L'identité (8) donne

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &a - r = 0, \\ &a_1 - F_1(a) = 0, \\ &\frac{a_2}{1.2} + a_1 F_1'(a) + F_2(a) = 0, \\ &\frac{a_3}{1.2.3} + \frac{a_2}{1.2} F_1'(a) + \frac{a_1^2}{1.2} F_1''(a) + a_1 F_2'(a) + F_3(a) = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &\frac{a_p}{p!} + D_\xi^{p-1} \frac{F_1(a)}{(p-1)!} + D_\xi^{p-2} \frac{F_2(a)}{(p-2)!} + \dots \\ &\qquad + D_\xi^2 \frac{F_{p-2}(a)}{2!} + D_\xi F_{p-1}(a) + F_p(a) = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &\frac{a_n}{n!} + D_\xi^{n-1} \frac{F_1(a)}{(n-1)!} + D_\xi^{n-2} \frac{F_2(a)}{(n-2)!} + \dots \\ &\qquad + D_\xi^{n-m+1} \frac{F_{m-1}(a)}{(n-m+1)!} + D_\xi^{n-m} \frac{F_m(a)}{(n-m)!} = 0, \end{aligned}\right.$$

où

$$0 < p \leqq m, \qquad n \geqq m$$

et

$$D_\xi^k \frac{F_h(a)}{k!} = \sum \frac{F_h^{(i)}(a)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_k!}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{a_k}{k!}\right)^{\alpha_k}$$

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + k\alpha_k = k,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = i = 1, 2, 3, \ldots, k.$$

Des égalités précédentes on tire

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
a &= r,\\
a_1 &= -\left[\frac{f_1(a)}{f_0'(a)}\right]_{a=r} = -[F_1(a)]_{a=r},\\
\frac{a_2}{1.2} &= -\left\{\frac{1}{f_0'(a)}\left[\frac{a_1^2}{1.2} f_0''(a) + a_1 f_1'(a) + f_2(a)\right]\right\}_{a=r}\\
&= -[a_1 F_1'(a) + F_2(a)]_{a=r},\\
\frac{a_3}{1.2.3} &= -\left\{\frac{1}{f_0(a)}\left[\frac{a_1 a_2}{1.2} f_0''(a) + \frac{a_1^3}{1.2.3} f_0'''(a)\right.\right.\\
&\qquad + \frac{a_2}{1.2} f_1'(a) + \frac{a_1^2}{1.2} f_1''(a)\\
&\qquad \left.\left. + a_1 f_2'(a) + f_3(a)\right]\right\}_{a=r}\\
&= -\left[\frac{a_2}{1.2} F_1'(a) + \frac{a_1^2}{1.2} F_1''(a) + a_1 F_2'(a) + F_3(a)\right]_{a=r},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{a_p}{1.2\ldots p} &= -\left(\frac{1}{f_0'(a)}\left\{\sum \frac{f_0^{(j)}(a)}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_{p-1}!}\right.\right.\\
&\qquad \times\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\beta_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\beta_2}\cdots\left[\frac{a_{p-1}}{(p-1)!}\right]^{\beta_{p-1}}\\
&\qquad + D_\xi^{p-1}\frac{f_1(a)}{(p-1)!} + D_\xi^{p-2}\frac{f_2(a)}{(p-2)!} + \ldots\\
&\qquad \left.\left. + D_\xi^2 \frac{f_{p-2}(a)}{2!} + D_\xi f_{p-1}(a) + f_p(a)\right\}\right)_{a=r}\\
&= -\left[D_\xi^{p-1}\frac{F_1(a)}{(p-1)!} + D_\xi^{p-2}\frac{F_2(a)}{(p-2)!} + \ldots\right.\\
&\qquad \left. + D_\xi^2 \frac{F_{p-2}(a)}{2!} + D_\xi F_{p-1}(a) + F_p(a)\right]_{a=r}\\
&= -\left[\sum_{k=1}^{k=p} D_\xi^{p-k}\frac{F_k(a)}{(p-k)!}\right]_{a=r}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.$$

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{a_n}{1.2\ldots n} &= -\left\{ \frac{1}{f_0'(a)} \left[\sum \frac{f_0^{(j)}(a)}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_{n-1}!} \right.\right. \\
&\qquad \times \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\beta_1} \left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\beta_2} \cdots \left[\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\right]_{\beta_{n-1}} \\
&\qquad + D_\xi^{n-1} \frac{f_1(a)}{(n-1)!} + D_\xi^{n-2} \frac{f_2(a)}{(n-2)!} + \ldots \\
&\qquad + D_\xi^{n-m+1} \frac{f_{m-1}(a)}{(n-m+1)!} \\
&\qquad\qquad \left.\left. + D_\xi^{n-m} \frac{f_m(a)}{(n-m)!} \right] \right\}_{a=r} \\
&= -\left[D_\xi^{n-1} \frac{F_1(a)}{(n-1)!} + D_\xi^{n-2} \frac{F_2(a)}{(n-2)!} + \ldots \right. \\
&\qquad \left. + D_\xi^{n-m+1} \frac{F_{m-1}(a)}{(n-m+1)!} + D_\xi^{n-m} \frac{F_m(a)}{(n-m)!} \right]_{a=r} \\
&= -\left[\sum_{k=1}^{k=m} D_\xi^{n-k} \frac{F_k(a)}{(n-k)!} \right]_{a=r}
\end{aligned}
\right.
$$

où

$$n > m \geqq p > 0$$

et

$$
\begin{gathered}
1\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + (p-1)\beta_{p-1} = p. \\
\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{p-1} = j = 2, 3, \ldots, p, \\
1\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + (n-1)\beta_{n-1} = n, \\
\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-1} = j = 2, 3, \ldots, n.
\end{gathered}
$$

Par conséquent on a

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
y = r - \frac{1}{f_0'(r)} \Bigg\{ & x f_1(r) + x^2 \left[S_2 + \sum_{k=1}^{k=2} D_\xi^{2-k} \frac{f_k(a)}{(2-k)!} \right]_{a=r} \\
& + x^3 \left[S_3 + \sum_{k=1}^{k=3} D_\xi^{3-k} \frac{f_k(a)}{(3-k)!} \right]_{a=r} + \ldots \\
& + x^p \left[S_p + \sum_{k=1}^{k=p} D_\xi^{p-k} \frac{f_k(a)}{(p-k)!} \right]_{a=r} + \ldots \\
& + x^n \left[S_n + \sum_{k=1}^{k=m} D_\xi^{n-k} \frac{F_k(a)}{(n-k)!} \right]_{a=r} + \ldots \Bigg\}
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
y = r - x\,\mathrm{F}_1(r) - x^2 & \left[\sum_{k=1}^{k=2} \mathrm{D}_\xi^{2-k}\,\frac{\mathrm{F}_k(a)}{(2-k)!}\right]_{a=r} \\
& - x^3\left[\sum_{k=1}^{k=3} \mathrm{D}_\xi^{3-k}\,\frac{\mathrm{F}_k(a)}{(3-k)!}\right]_{a=r} - \ldots \\
& - x^p\left[\sum_{k=1}^{k=p} \mathrm{D}_\xi^{p-k}\,\frac{\mathrm{F}_k(a)}{(p-k)!}\right]_{a=r} - \ldots \\
& - x^m\left[\sum_{k=1}^{k=m} \mathrm{D}_\xi^{m-k}\,\frac{\mathrm{F}_k(a)}{(m-k)!}\right]_{a=r} - \ldots \\
& - x^n\left[\sum_{k=1}^{k=m} \mathrm{D}_\xi^{n-k}\,\frac{\mathrm{F}_k(a)}{(n-k)!}\right]_{a=r} - \ldots,
\end{aligned}
\right.
$$

où

$$n \geqq m, \qquad m \geqq p > 1,$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S}_k &= \sum \frac{f_0^{(j)}(a)}{\beta_1!\,\beta!\,\ldots\,\beta_{k-1}!} \\
&\quad \times \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\beta_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\beta_2}\cdots\left[\frac{a_{k-1}}{(k-1)!}\right]^{\beta_{k-1}} \\
&= \frac{1}{k!}\left[\mathrm{D}_\xi^k f_0(a) - a_k f_0'(a)\right],
\end{aligned}
$$

$$1\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + (k-1)\beta_{k-1} = k,$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{k-1} = j = 2, 3, \ldots, k;$$

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{D}_\xi^k \mathrm{F}_h(a) &= \mathrm{D}_\xi^k \frac{f_h(a)}{\Phi(a)} = \mathrm{D}_\xi^k \frac{f_h(a)}{\left[\dfrac{f_0(a)}{a-r}\right]} \\
&= k!\sum \frac{\mathrm{D}_a^i \mathrm{F}_h(a)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\ldots\,\alpha_k!}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{a_k}{k!}\right)^{\alpha_k}, \\
\Phi^{(k)}(r) &= \frac{f_0^{(k+1)}(r)}{k+1},
\end{aligned}
\right.
$$

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + k\alpha_k = k,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = i = 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad k.$$

En généralisant la première formule (12), on obtient

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} F(y) = F(r) &+ \frac{x}{1}[D_\xi F(a)]_{a=r} \\ &+ \frac{x^2}{1.2}\left[D_\xi^2 F(a)\right]_{a=r} + \frac{x^3}{1.2.3}\left[D_\xi^3 F(a)\right]_{a=r} + \ldots \\ &+ \frac{x^q}{1.2\ldots q}\left[D_\xi^q F(a)\right]_{a=r} + \ldots \text{ (1)}. \end{aligned}\right.$$

4. Considérons quelques cas particuliers :

1° Si l'on pose

$$f_0(y) = r - y, \qquad f_1(y) = f(y),$$
$$f_2(y) = 0, \qquad f_3(y) = 0, \qquad \ldots, \qquad f_m(y) = 0,$$

on a

$$y = r + x f(y)$$

ou

$$x = \frac{y - r}{f(y)} = \varphi(y), \qquad F_1(y) = -f(y)$$

et

$$y = \Big[a + x f(a) + \frac{x^2}{1} D_\xi f(a) + \frac{x^3}{1.2} D_\xi^2 f(a) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots(n-1)} D_\xi^{n-1} f(a) + \ldots\Big]_{a=r}.$$

La formule de Lagrange, démontrée rigoureusement, dans ces derniers temps, par M. Rouché (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XXXIX, et *Cours d'Algèbre supérieure* par J.-A. Serret, 1885, t, I, p. 466),

(1) Les relations (9) et (10) peuvent être déduites des équations (2) et (3) aussi à l'aide de cette formule, en prenant

$$y = a + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{1.2} + \ldots.$$

donne

$$y = \Big\{ a + x f(a) + \frac{x^2}{1.2} \mathrm{D}_a [f(a)]^2$$

$$+ \frac{x^3}{1.2.3} \mathrm{D}_a^2 [f(a)]^3 + \ldots$$

$$+ \frac{x^n}{1.2 \ldots n} \mathrm{D}_a^{n-1} [f(a)]^n + \ldots \Big\}_{a=r}$$

$$= r + x f(r) + \frac{x^2}{1.2} \mathrm{D}_r [f(r)]^2$$

$$+ \frac{x^3}{1.2.3} \mathrm{D}_r^2 [f(r)]^3 + \ldots + \frac{x^n}{1.2 \ldots n} \mathrm{D}_r^{n-1} [f(r)]^n + \ldots.$$

On a aussi (*Nouvelles Annales*, p. 362; 1888)

$$y = \Big\{ a + x \left[\frac{1}{\varphi'(a)} \mathrm{D}_a \right] a + \frac{x^2}{1.2} \left[\frac{1}{\varphi'(a)} \mathrm{D}_a \right]^2 a + \ldots$$

$$+ \frac{x^n}{1.2 \ldots n} \left[\frac{1}{\varphi'(a)} \mathrm{D}_a \right]^n a + \ldots \Big\}_{a=r}.$$

Par conséquent

$$\frac{a_n}{n!} = \left[\mathrm{D}_\xi^{n-1} \frac{f'(a)}{(n-1)!} \right]_{a=r}$$

$$= \Big\{ \sum \frac{f^{(i)}(a)}{\alpha_1! \, \alpha_2! \ldots \alpha_{n-1}!} \left(\frac{a_1}{1!} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{a_2}{2!} \right)^{\alpha_2} \cdots \left[\frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \right]^{\alpha_{n-1}} \Big\}_{a=r,\, n-1}$$

$$= \Big\{ \mathrm{D}_a^{n-1} \frac{[f(a)]^n}{n!} \Big\}_{a=r}$$

$$= \sum (n-1)! \left[\frac{f(r)}{(n-i)! \, \alpha_1! \, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}!} \right]^{n-i}$$

$$\times \left[\frac{f'(r)}{1!} \right]^{\alpha_1} \left[\frac{f''(r)}{2!} \right]^{\alpha_2} \cdots \left[\frac{f^{(n-1)}(r)}{(n-1)!} \right]_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$$

$$= \frac{1}{n!} \Big\{ \left[\frac{1}{\varphi'(a)} \mathrm{D}_a \right]^n a \Big\}_{a=r},$$

où

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (n-1)\alpha_{n-1} = n-1.$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} = i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

2° Prenons

$$f_0(y) = f(y), \qquad f_1(y) = -1,$$

$$f_2(y) = 0, \qquad \ldots, \qquad f_m(y) = 0;$$

alors

$$f(y) = x, \qquad y = r + x\left[\frac{1}{\Phi(y)}\right], \qquad F_1(y) = -\frac{1}{\Phi(y)},$$

$$\Phi(y) = \frac{f(y)}{y-r},\ f(r) = 0,$$

$$\Phi(r) = f'(r),\ \Phi^k(r) = \frac{f^{(k+1)}(r)}{k+1},$$

et

$$y = \left[a + x\frac{1}{\Phi(a)} + \frac{x^2}{1}\mathrm{D}_\xi\frac{1}{\Phi(a)} + \frac{x^3}{1.2}\mathrm{D}_\xi^2\frac{1}{\Phi(a)} + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{x^n}{1.2\ldots(n-1)}\mathrm{D}_\xi^{n-1}\frac{1}{\Phi(a)} + \ldots\right]_{a=r}.$$

La formule de Lagrange donne

$$y = \left\{ a + x[\Phi(a)]^{-1} + \frac{x^2}{1.2}\mathrm{D}_a[\Phi(a)]^{-2} \right.$$

$$+ \frac{x^3}{1.2.3}\mathrm{D}_a^2[\Phi(a)]^{-3} + \ldots$$

$$\left. + \frac{x^n}{1.2\ldots n}\mathrm{D}_a^{n-1}[\Phi(a)]^{-n} + \ldots \right\}_{a=r}.$$

On a aussi

$$y = \left\{ a + x\left[\frac{1}{f'(a)}\mathrm{D}_a\right]a + \frac{x^2}{1.2}\left[\frac{1}{f'(a)}\mathrm{D}_a\right]^2 a + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{x^n}{1.2\ldots n}\left[\frac{1}{f'(a)}\mathrm{D}_a\right]^n a + \ldots \right\}_{a=r}.$$

Par suite

$$\frac{a_n}{n!} = \left\{ \mathrm{D}_\xi^{n-1}\frac{[\Phi(a)]^{-1}}{(n-)!} \right\}_{a=r}$$

$$= -\left\{ \frac{1}{f'(a)}\sum\frac{f^{(j)}(a)}{\beta_1!\beta_2!\ldots\beta_{n-1}}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\beta_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\beta_2}\cdots\left[\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\right]^{\beta_{n-1}} \right\}_{a=r,\,n>1}$$

$$= \left\{ \mathrm{D}_a^{n-1}\frac{[\Phi(a)]^{-n}}{n!} \right\}_{a=r} = \sum\frac{(-1)^i(n+i-1)![f'(r)]^{-(n+i)}}{n!\,\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_{n-1}!}$$

$$\times\left[\frac{f''(r)}{2!}\right]^{\alpha_1}\left[\frac{f'''(r)}{3!}\right]^{\alpha_2}\cdots\left[\frac{f_n(r)}{n!}\right]^{\alpha_{n-1}}_{n>1} = \frac{1}{n!}\left\{\left[\frac{1}{f'(a)}\mathrm{D}_a\right]^n a\right\}_{a=r},$$

où

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (n-1)\alpha_{n-1} = n-1,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} = i = 1, 2, 3, \ldots, n-1,$$
$$1\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + (n-1)\beta_{n-1} = n,$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-1} = j = 2, 3, \ldots, n.$$

3° Soit

$$f(x, y) = \mathrm{P}_0(y) + x\,\mathrm{P}_1(y) + x_2\,\mathrm{P}_2(y) + \ldots + x^{m-1}\,\mathrm{P}_{m-1}(y) + x^m\,\mathrm{P}_m(y) = 0,$$

où

$$\mathrm{P}_0(y) = \mathrm{A}_0 y^m + \mathrm{B}_0 y^{m-1} + \mathrm{C}_0 y^{m-2} + \ldots + \mathrm{K}_0 y^2 + \mathrm{L}_0 y + \mathrm{M}_0,$$
$$\mathrm{P}_1(y) = \mathrm{A}_1 y^{m-1} + \mathrm{B}_1 y^{m-2} + \mathrm{C}_1 y^{n-3} + \ldots + \mathrm{K}_1 y + \mathrm{L}_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mathrm{P}_{m-1}(y) = \mathrm{A}_{m-1} y + \mathrm{B}_{m-1},\quad \mathrm{P}_m(y) = \mathrm{A}_m.$$

Alors, en faisant $\frac{y}{x} = u$ et $\frac{1}{x} = z$, on a aussi

$$x^m[\mathrm{Q}_0(u) + z\,\mathrm{Q}_1(u) + z^2\,\mathrm{Q}_2(u) + \ldots + z^{m-1}\,\mathrm{Q}_{m-1}(u) + z^m\,\mathrm{Q}_m(u)] = 0,$$
$$\mathrm{Q}_0(u) + z\,\mathrm{Q}_1(u) + z^2\,\mathrm{Q}_2(u) + \ldots + z^{m-1}\,\mathrm{Q}_{m-1}(u) + z^m\,\mathrm{Q}_m(u) = 0,$$

où

$$\mathrm{Q}_0(u) = \mathrm{A}_0 u^m + \mathrm{A}_1 u^{m-1} + \mathrm{A}_2 u^{m-2} + \ldots + \mathrm{A}_{m-1} u + \mathrm{A}_m,$$
$$\mathrm{Q}_1(u) = \mathrm{B}_0 u^{m-1} + \mathrm{B}_1 u^{m-2} + \mathrm{B}\, u^{m-3} + \ldots + \mathrm{B}_{m-2} u + \mathrm{B}_{m-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mathrm{Q}_{m-1}(u) = \mathrm{L}_0 u + \mathrm{L}_1,\quad \mathrm{Q}_m(u) = \mathrm{M}_0.$$

Par suite, nous pouvons obtenir, dans ce cas, les séries suivantes

$$y = a + a_1 x + \frac{a_2}{1.2}x^2 + \frac{a_3}{1.2.3}x^3 + \ldots + \frac{a_n}{1.2\ldots n}x^n + \ldots,$$
$$u = b + b_1 z + \frac{b_2}{1.2}z^2 + \frac{b_3}{1.2.3}z^3 + \ldots + \frac{b_n}{1.2\ldots n}z^n + \ldots$$

et

$$y = xu = bx + b_1 + \frac{b_2}{1.2.x} + \frac{b_3}{1.2.3.x^2} + \ldots + \frac{b_n}{1.2\ldots n x^{n-1}} + \ldots,$$

où les coefficients a, a_1, ..., $\frac{a_n}{n!}$ et b, b_1, ..., $\frac{b_n}{n!}$ se détermineront au moyen des formules (11), en y remplaçant respectivement

$$f'_0(r),\quad f''_0(r),\quad \ldots,\quad f_k(r),\quad f'_k(r),\quad f''_k(r),\quad \ldots,$$

par

$$P'_0(r),\quad P''_0(r),\quad \ldots,\quad P_k(r),\quad P'_k(r),\quad P''_k(r),\quad \ldots,$$

et par

$$Q'_0(r_1),\quad Q''_0(r_1),\quad \ldots,\quad Q_k(r_1),\quad Q'_k(r_1),\quad Q''_k(r_1),\quad \ldots,$$

et en supposant que r, r_1 soient des racines simples des équations $P_0(y) = 0$, $Q_0(u) = 0$ respectivement (J.-A. Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, 1885, t. I, p. 610).

4° Enfin, posons, dans l'équation (2), $f_0(y) = r - y$; on a alors

$$y = r + xf_1(y) + x^2 f_2(y) + x^3 f_3(y) + \ldots + x^m f_m(y)$$

et

$$\begin{aligned} y = r & \\ & + xf_1(r) + x^2\left[\sum_{k=1}^{k=2} \frac{D_\xi^{2-k} f_k(a)}{(2-k)!}\right]_{a=r} \\ & + x^3\left[\sum_{k=1}^{k=3} \frac{D_\xi^{3-k} f_k(a)}{(3-k)!}\right]_{a=r} + \ldots \\ & + x^p\left[\sum_{k=1}^{k=p} \frac{D_\xi^{p-k} f_k(a)}{(p-k)!}\right]_{a=r} + \ldots \\ & + x^m\left[\sum_{k=1}^{k=m} \frac{D_\xi^{m-k} f_k(a)}{(m-k)!}\right]_{a=r} + \ldots \\ & + x^n\left[\sum_{k=1}^{k=m} \frac{D_\xi^{n-k} f_k(a)}{(n-k)!}\right]_{a=r} + \ldots; \end{aligned}$$

ou, généralement,

$$F(y) = F(r) + \frac{x}{1}[D_\xi F(a)]_{a=r}$$
$$+ \frac{x_2}{1.2}\left[D_\xi^2 F(a)\right]_{a=r}$$
$$+ \frac{x_3}{1.2.3}\left[D_\xi^3 F(a)\right]_{a=r} + \ldots$$
$$+ \frac{x^q}{1.2\ldots q}\left[D_\xi^q F(a)\right]_{a=r} + \ldots,$$

où

$$\left[\frac{D_\xi^q F(a)}{q!}\right]_{a=r} = \sum \frac{F^{(i)}(r)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_q!}[f_1(r)]^{\alpha_1}$$
$$\times \left[\sum_{k=1}^{k=2} \frac{D_\xi^{2-k} f_k(a)}{(2-k)!}\right]_{a=r}^{\alpha_2} \ldots$$
$$\times \left[\sum_{k=1}^{k=p} \frac{D_\xi^{p-k} f_k(a)}{(p-k)!}\right]_{a=r}^{\alpha_p} \ldots$$
$$\times \left[\sum_{k=1}^{k=m} \frac{D_\xi^{q-k} f_k(a)}{(q-k)!}\right]_{a=r}^{\alpha_q},$$
$$(p \leqq m).$$

5. Soit

$$Y = \alpha + a_1 x + \frac{a_2}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{a_m}{1.2\ldots m}x^m + \ldots$$

une racine de l'équation générale (algébrique ou transcendante)

$$f(y, x) = 0.$$

Prenons la fonction de t

$$\Phi(t) = f(y, x, t) = f(y, z),$$

où $z = xt$ et les variables y, x ne dépendent pas de t, de sorte que

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^k f}{\partial t^k} = x^k \frac{\partial^k f}{\partial z^k},$$

et supposons que cette fonction, pour les valeurs de t

comprises entre o et 1, soit développable, par la formule de Maclaurin, suivant les puissances croissantes de t; on a alors

$$\begin{aligned} f(y, xt) = f(y, z) = \psi(t) &= \psi(o) + t\,\psi'(o) \\ &+ \frac{t^2}{1.2}\psi''(o) + \ldots + \frac{t^m}{1.2\ldots m}\psi^{(m)}(o) + \ldots \\ &= f(y, o) + tx[D_z f(y, z)]_{z=0} \\ &+ \frac{t^2x^2}{1.2}[D_z^2 f(y, z)]_{z=0} + \ldots \\ &+ \frac{t^m x^m}{1.2\ldots m}[D_z^m f(y, z)]_{z=0} + \ldots, \end{aligned}$$

en posant

$$f(y, o) = f_0(y), \qquad [D_z f(y, z)]_{z=0} = f_1(y),$$

$$\left[\frac{D_z^2 f(y, z)}{1.2}\right]_{z=0} = f_2(y), \qquad \ldots,$$

$$\left[\frac{D_z^m f(y, z)}{1.2\ldots m}\right]_{z=0} = f_m(y), \qquad \ldots,$$

on obtient, pour $t = 1$, $(z = x)$,

$$f(y, x) = f_0(y) + xf_1(y) + x^2 f_2(y) + \ldots + x^m f_m(y) + \ldots = o.$$

Par conséquent, en désignant par r une racine simple de l'équation $f(y, o) = o$ et en considérant a comme fonction d'une variable fictive ξ, dont les dérivées successives seraient $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$, on trouve à l'aide des formules (11), (12)

$$a = r,$$

$$a_1 = -\left[\frac{D_x f(a, x)}{D_a f(a, x)}\right]_{a=r,\, x=0},$$

$$\frac{a_2}{1.2} = -\left\{\frac{1}{D_a f(a, x)}\left[\frac{a_1^2}{1.2}D_a^2 f(a, x) + a_1 D_a D_x f(a, x) + \frac{D_x^2 f(a, x)}{1.2}\right]\right\}_{a=r,\, x=0},$$

. . . . ,

$$\frac{a_m}{1.2\ldots m} = -\left(\frac{1}{D_a f(a,x)}\left\{\sum \frac{D_a^j f(a,x)}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_{m-1}} \times\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\beta_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\beta_2}\cdots\left[\frac{a_{m-1}}{(m-1)!}\right]^{\beta_{m-1}} + \sum_{k=1}^{k=m}\frac{D_\xi^{m-k}\,D_x^k f(a,x)}{(m-k)!\,k!}\right\}\right)_{a=r,\ x=0}$$

et

$$\begin{aligned}y = r - \frac{1}{[D_a f(a,x)]_{\substack{a=r\\x=0}}}\Bigg\{ & x\,[D_x f(a,x)]_{\substack{a=r\\x=0}}\\
&+ x^2\left[S'_2 + \sum_{k=1}^{k=2}\frac{D_\xi^{2-k}\,D_x^k f(a,x)}{(2-k)!\,k!}\right]_{\substack{a=r\\x=0}}\\
&+ x^3\left[S'_3 + \sum_{k=1}^{k=3}\frac{D_\xi^{3-k}\,D_x^k f(a,x)}{(3-k)!\,k!}\right]_{\substack{a=r\\x=0}} + \ldots\\
&+ x^m\left[S'_m + \sum_{k=1}^{k=m}\frac{D_\xi^{m-k}\,D_x^k f(a,x)}{(m-k)!\,k!}\right]_{\substack{a=r\\x=0}} + \ldots\Bigg\},\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}S'_k &= \sum \frac{D_a^j f(a,x)}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_{k-1}!}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\beta_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\beta_2}\cdots\left[\frac{a_{k-1}}{(k-1)!}\right]^{\beta_{k-1}}\\
&= \frac{1}{k!}\left[D_\xi^k f(a,x) - a_k D_a f(a,x)\right],\end{aligned}$$

$$\frac{D_\xi^k\,D_x^h f(a,x)}{k!\,h!} = \sum \frac{D_a^i\,D_x^h f(a,x)}{h!\,\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_k!}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\alpha_2}\cdots\left[\frac{a_k}{k!}\right]^{\alpha_k},$$

$$\left\{\begin{aligned}&1\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + (k-1)\beta_{k-1} = k,\\
&\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{k-1} = j = 2, 3, \ldots, k,\\
&1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + k\alpha_k = k,\\
&\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = i = 1, 2, \ldots, k.\end{aligned}\right.$$

Aussi, en ayant égard à l'égalité

$$\frac{1}{k!}\left[D_\xi^k f_0(a) - a_k f'_0(a)\right]$$
$$= \sum \frac{f_0^{(j)}(a)}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_{k-1}!}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\beta_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\beta_2}\cdots\left[\frac{a_{k-1}}{(k-1)!}\right]^{\beta_{k-1}} = S_k,$$

nous pouvons exprimer une racine de l'équation $f(y, x) = 0$, et, par suite, celle de l'équation (2), de la manière suivante

$$\begin{aligned} y = r + x &\left[\frac{a_1}{1!} - \sum_{k=0}^{k=1} \frac{D_\xi^{1-k} f_k(a)}{(1-k)!\,f'_0(a)}\right]_{a=r} \\ + x^2 &\left[\frac{a_2}{1!} - \sum_{k=0}^{k=2} \frac{D_\xi^{2-k} f_k(a)}{(2-k)!\,f'_0(a)}\right]_{a=r} \\ + x^3 &\left[\frac{a_3}{1!} - \sum_{k=0}^{k=3} \frac{D_\xi^{3-k} f_k(a)}{(3-k)!\,f'_0(a)}\right]_{a=r} + \ldots \\ + x^m &\left[\frac{a_m}{m!} - \sum_{k=0}^{k=m} \frac{D_\xi^{m-k} f_k(a)}{(m-k)!\,f'_0(a)}\right]_{a=r} + \ldots. \end{aligned}$$