NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

É. LEMOINE

Considérations sur la géométrographie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 155-160
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__155_1>

CONSIDÉRATIONS SUR LA GÉOMÉTROGRAPHIE;

PAR M. É. LEMOINE.

(Extrait d'une Lettre à M. ROUCHE.)

Dès que j'ai lu les observations que M. Soudée (voir *Nouvelles Annales*, 1893, p. 148) vous a écrites au sujet de l'examen fait par moi (voir *Nouvelles Annales*, 1892, p. 453) de la simplicité relative de diverses constructions du problème d'Apollonius, je me suis aperçu qu'elles portaient à côté de la méthode d'examen des constructions, méthode qui comprend aussi la façon de les diriger le plus simplement, que j'ai indiquée dans plusieurs Mémoires et, en particulier, d'une façon didactique, dans le Mémoire de l'Association française, Congrès de Pau, 1892, intitulé : *La Géométrographie* (1), mais qu'elles n'avaient pu être faites que parce que ce que j'avais exposé de la méthode dans ce journal, simplement pour rendre ma comparaison compréhensible aux lecteurs, n'était pas suffisant pour en donner connais-

(1) Chez Gauthier-Villars et fils, quai des Grands-Augustins, 55; 1892. Prix 2^{fr}.

sance et en faire comprendre l'esprit. J'écrivis immédiatement à M. Soudée en lui donnant les explications nécessaires et il reconnut très aimablement que j'avais raison, qu'il n'y avait plus lieu de faire des objections qui s'appliquaient, en réalité, à des choses que la *Géométrographie* ne disait nullement.

Comme, d'ailleurs, les mêmes objections se présenteraient à tout lecteur dans le même cas, je veux, non les réfuter en détail, il faudrait reproduire une partie de mon travail, mais faire quelques observations générales.

Je n'ai étudié jusqu'ici *en détail* que la *Géométrographie* de la Géométrie canonique des Grecs, c'est-à-dire de la droite et du cercle correspondant aux *constructions* faites avec la règle et le compas; l'équerre n'est pas admise, mais j'ai spécifié, dès l'origine de mes études sur cette matière (*Comptes rendus*, 1888) qu'il y avait une étude spéciale à faire pour le cas où l'on emploierait l'équerre, qui est indispensable en Géométrie descriptive, par exemple, et depuis j'ai montré qu'il y avait encore à étudier la *Géométrographie,* en admettant l'usage des règles divisées pour la statique graphique, etc.

La Géométrographie est toute spéculative, elle ne suit pas complètement la construction pratique, elle suppose la feuille d'épure infinie, les règles infinies, les compas aussi petits ou aussi grands qu'on le désire, etc., elle guide seulement la construction un peu comme la Mécanique rationnelle guide l'ingénieur.

J'ai choisi les mots coefficient de *simplicité,* coefficient d'*exactitude*, tout en ayant remarqué que coefficient de *complication* et coefficient d'*inexactitude* eussent été plus propres, mais comme ce que l'on recherche c'est la simplicité et l'exactitude, non la complication et l'inexactitude, j'ai accepté cette sorte d'antinomie dans les termes de même qu'on l'a acceptée en plusieurs cas dans la Science : ainsi le coefficient d'élasticité est d'autant plus petit que l'élasticité est plus grande.

Pour le géomètre, dès qu'une question est ramenée à des opérations qui peuvent s'effectuer avec la règle et le compas, le problème est considéré comme résolu et l'est effectivement à son point de vue. Il énonce l'*indication* d'une construction et s'arrête là. Il dira, par exemple :

On joint le centre radical P *de trois circonférences au centre* ω *du cercle inscrit au triangle formé par les trois polaires de* P *par rapport à ces trois circonférences*, aussi simplement qu'il dirait : *D'un point* K *de la droite* AB, *on abaisse une perpendiculaire* KH *sur la droite* CD *et l'on prolonge* KH, H *étant le pied de la perpendiculaire, d'une longueur égale à* KH, et parlera à l'occasion dans les mêmes termes de la simplicité ou de l'élégance de ces constructions. Or, le compas à la main, elles n'ont rien de comparable, la première exigeant environ 107 opérations élémentaires, la seconde en exigeant 12.

A la suite de la lettre de M. Soudée se trouve (*Nouvelles Annales*, p. 150; 1893) une lettre de M. Marchand à propos de ce même article; cette lettre, fort intéressante, montre que les solutions spéculatives examinées ont seulement des formes différentes, mais qu'au fond elles sont identiques, ce qui doit être vrai philosophiquement pour toutes les solutions d'une même question, et il montre le fil qui les relie. Je dois faire remarquer que, pour celui qui construit, elles sont essentiellement différentes, puisqu'il ne s'occupe précisément que de la forme à mettre à exécution.

Je crois alors utile de présenter ici un exemple plus simple, choisi au hasard, mais qui permettra de mettre en relief cette différence du point de vue où l'on s'est placé, *toujours jusqu'ici,* dans l'étude des questions géométriques, et de celui où je me place en Géométrographie, et qu'il est, à mon avis, indispensable de considérer *aussi*.

Je suppose que la solution d'un problème a été ramenée *finalement* à cette construction : *Diviser le diamètre* AB *d'un certain cercle au point* C' *tel que,* C *étant un point donné sur* AB, *on ait*

$$\frac{C'A}{BC'} = \frac{\overline{CA}^2}{\overline{BC}^2}.$$

Le géomètre s'arrêtera là, le problème est résolu.

Si on lui dit : Prenez le compas et exécutez la construction, il en choisira une à peu près quelconque, par exemple celle-ci :

Il tracera deux droites rectangulaires se coupant en C_1, prendra sur l'une $C_1A_1 = CA$, sur l'autre $C_1B_1 = CB$, joindra A_1B_1, projettera C_1 sur A_1B en γ, puis divisera AB en C' de telle sorte qu'on ait

$$\frac{A_1\gamma}{B_1\gamma} = \frac{AC'}{BC'},$$

C' sera placé ainsi par le géomètre au moyen d'une construction dont le symbole sera

$$\text{Op. : } (11\,R_1 + 7\,R_2 + 22\,C_1 + 13\,C_3),$$

et aura exigé 53 opérations élémentaires dont le tracé de 7 droites, de 13 cercles, probablement plus, s'il n'a pas opéré avec l'économie raisonnée qu'enseigne la *Géométrographie.*

Si, au contraire, on prend le problème au point où le géomètre l'avait considéré comme résolu, en cherchant méthodiquement la construction la plus simple du point C', on arrivera à la placer avec 17 opérations élémentaires, dont le tracé de 4 droites et de 2 cercles, en opérant ainsi : on place C_1 sur AB tel que $BC = AC_1$ et l'on trace la perpendiculaire élevée au milieu de AB, perpendiculaire qui coupe le cercle en K et en H, on trace KC_1 qui coupe le cercle en L, LC qui coupe le cercle en M, MH qui coupe AB en C'.

C' est alors obtenu simplement par le symbole

$$\text{Op.} : (8R_1 + 4R_2 + 3C_1 + 2C_3),$$

17 opérations élémentaires dont le tracé de 4 droites et de 2 cercles.

En effet, on a

$$L(CC_1AB) = H(C'OAB),$$

puisque les deux faisceaux qui partent de L ou de M et aboutissent aux quatre points M, K, A, B du cercle ont le même rapport anharmonique.

Or

$$(CC_1AB) = \frac{CA}{CB} : \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{\overline{CA}^2}{\overline{CB}^2}$$

et

$$(C'OAB) = \frac{C'A}{C'B} : \frac{OA}{OB} = \frac{C'A}{C'B},$$

donc

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{\overline{CA}^2}{\overline{CB}^2},$$

et, de quelque façon qu'on envisage la construction, il n'est pas possible de ne pas tenir compte de telles différences.

Rien ne dit d'ailleurs que ce soit le dernier mot des simplifications possibles à obtenir. Ainsi mon Mémoire de Pau sur la *Géométrographie,* cité plus haut, contenait l'examen de 63 constructions que j'avais déjà simplifiées par mes méthodes autant que je l'avais pu; 31 d'entre elles l'ont été encore davantage avec l'application plus étudiée de la même méthode par MM. Tarry, Bernès et par moi, et ces simplifications sont exposées dans un complément de mon Mémoire sur la Géométrographie, donné au Congrès de Besançon en 1893.