NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

TROISIÈME SÉRIE.

1894.

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

M. CH. BRISSE,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE CENTRALE ET AU LYCÉE CONDORCET,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

ET

M. E. ROUCHÉ,

EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS.

**Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem,
et continuée par MM. Gerono, Prouhet, Bourget et Brisse.**

TROISIÈME SÉRIE.

TOME TREIZIÈME.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1894

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

CONFÉRENCE FAITE AUX ÉLÈVES DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (COURS DE M. JORDAN), SUR LES « CHANGEMENTS DE VARIABLES »;

PAR M. LUCIEN LÉVY.

Le théorème dont je ferai surtout des applications est le suivant, démontré dans le Cours :

Si, par un procédé quelconque, on a trouvé une identité de la forme

$$(1) \qquad df(x, y) = \mathrm{A}\, dx + \mathrm{B}\, dy,$$

df, dx, dy étant des différentielles, on a identiquement

$$\mathrm{A} = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \mathrm{B} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

J'y ajouterai le théorème suivant qui se démontre de même :

Si, par un procédé quelconque, on a trouvé entre des différentielles premières et secondes une identité de la forme

$$(2) \quad d^2 u = \mathrm{A}\, dx^2 + 2\mathrm{B}\, dx\, dy + \mathrm{C}\, dy^2 + \mathrm{D}\, d^2 x + \mathrm{E}\, d^2 y,$$

on peut assurer que

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad B = \frac{d^2 u}{dx\, dy}, \qquad C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$D = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad E = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Pour démontrer ce dernier théorème, je remarque qu'on a toujours

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} d^2 u = {} & \frac{d^2 u}{dx^2}\, dx^2 + 2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\, dy^2 \\ & + \frac{\partial u}{\partial x}\, d^2 x + \frac{\partial u}{\partial y}\, d^2 y, \end{aligned} \right.$$

et je donne d'abord aux variables des accroissements tels qu'on ait

$$dx = \lambda\, dy, \qquad d^2 y = 0, \qquad \text{d'où} \qquad d^2 x = 0;$$

l'identité des deux valeurs de $d^2 u$ exige alors qu'on ait, quel que soit le paramètre λ,

$$\left(A - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\lambda^2 + 2\left(B - \frac{\partial^2 u}{\partial x\, dy}\right)\lambda + \left(C - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0,$$

ce qui entraîne

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad B = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}, \qquad C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Choisissons maintenant des accroissements tels que

$$dx = \lambda\, dy$$

sans qu'on ait $d^2 y = 0$.

La même identité entre les deux formes du $d^2 u$ donnera

$$\left(D - \frac{\partial u}{\partial x}\right)\lambda + E - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

d'où, puisque λ est arbitraire,

$$D = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad E = \frac{\partial u}{\partial y}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Exemple (¹). — *Intégrer l'équation aux dérivées partielles des fonctions homogènes*

$$mu = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Si l'intégrale est toujours une fonction homogène, on le reconnaîtra plus facilement en prenant comme nouvelles variables x, $Y = \frac{y}{x}$, $Z = \frac{z}{x}$.

Proposons-nous d'obtenir une relation de la forme

$$du = A\,dx + B\,dy + C\,dz,$$

en partant d'une égalité de même nature où figurent les dérivées de u par rapport aux nouvelles variables. Cette dernière égalité est évidemment

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial u}{\partial Y}\,dY + \frac{\partial u}{\partial Z}\,dZ,$$

en désignant par $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ la dérivée partielle de u par rapport à x dans ce nouveau système pour la distinguer de celle, $\frac{\partial u}{\partial x}$, qui figure dans l'équation donnée.

Or

$$dY = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}, \qquad dZ = \frac{x\,dz - z\,dx}{x^2},$$

donc

$$du = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial Y} - \frac{z}{x^2}\frac{\partial u}{\partial Z}\right]dx + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial Y}\,dY + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial Z}\,dZ.$$

(¹) Cet exemple et le suivant sont empruntés au Cours d'Analyse de M. Bertrand, fait aux élèves de l'École Polytechnique.

On déduit de là, en appliquant le théorème du début,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial Y} - \frac{z}{x^2}\frac{\partial u}{\partial Z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial Y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial Z},$$

et l'équation différentielle devient

$$mu = x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

ou

$$\frac{\partial \log u}{\partial x} = \frac{m}{x}.$$

On peut l'intégrer immédiatement

$$\log u = m \log x + \log f(Y, Z)$$

ou

$$u = x^m f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

L'intégrale est donc bien la fonction homogène la plus générale du degré m d'homogénéité.

Remarque. — Insistons de nouveau sur ce fait que la dérivée partielle d'une même fonction par rapport à une même variable a des valeurs différentes lorsqu'on prend pour les autres variables des systèmes différents de variables. La chose est évidente; il suffit de l'avoir signalée.

Autre exemple (portant sur des différentielles du second ordre). — On voit facilement que l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées à plan directeur est

$$(1) \qquad p^2 t - 2pqs + q^2 r = 0,$$

lorsqu'on prend pour plan directeur le plan xOy. p, q, r, s, t représentent respectivement $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Pour obtenir cette équation, il suffirait d'éliminer les fonctions arbitraires dans l'équation de ces surfaces,

$$x\varphi(z)+y\psi(z)=1. \tag{2}$$

Nous nous proposons de retrouver l'équation (2) en partant de l'équation (1). La forme de l'équation (2), linéaire en x et y, montre que les dérivées seraient plus simples si l'on prenait l'une de ces deux quantités comme fonction. Prenons y, et soient x et z les nouvelles variables; d'après la méthode indiquée au début de la Conférence, nous devons, pour calculer p, q, r, s, t en fonction des nouvelles dérivées, nous efforcer de trouver une relation de la forme

$$d^2 z = \mathrm{A}\,dx^2 + 2\mathrm{B}\,dx\,dy + \mathrm{C}\,dy^2 + \mathrm{D}\,d^2 x + \mathrm{E}\,d^2 y$$

en partant d'une identité qui contient ces nouvelles dérivées. L'identité en question est évidemment

$$d^2 y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dz + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\,dz^2 + \frac{\partial y}{\partial x}\,d^2 x + \frac{\partial y}{\partial z}\,d^2 z.$$

On en tire immédiatement

$$\begin{aligned} d^2 z = &-\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} : \frac{\partial y}{\partial z}\right) dx^2 - \left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} : \frac{\partial y}{\partial z}\right) dz^2 \\ &- 2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial y} : \frac{\partial y}{\partial z}\right) dx\,dz \\ &- \left(\frac{\partial y}{\partial x} : \frac{\partial y}{\partial z}\right) d^2 x + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^{-1} d^2 y. \end{aligned}$$

Remplaçons-y dz par sa valeur $p\,dx + q\,dy$ et ordonnons par rapport à dx, dy, $d^2 x$, $d^2 y$, nous aurons une égalité de la forme demandée et, par suite, nous obtenons les valeurs

$$p = -\frac{\dfrac{\partial y}{\partial x}}{\dfrac{\partial y}{\partial z}},$$

$$q = \frac{1}{\dfrac{\partial y}{\partial z}},$$

$$r = -\frac{p^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2} + 2p \dfrac{\partial^2 y}{\partial x \, \partial z} + \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial y}{\partial z}},$$

$$t = -\frac{q^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2}}{\dfrac{\partial y}{\partial z}};$$

$$s = -q \frac{p \dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 y}{\partial x \, \partial z}}{\dfrac{\partial y}{\partial z}},$$

et il faut encore remplacer p et q par leurs valeurs dans r, s, t. Il n'y a plus qu'à substituer dans l'équation (1) qui devient ainsi

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$$

d'où

$$y = \mathrm{A}x + \mathrm{B},$$

A et B étant des fonctions de z. C'est bien la forme (2).

Remarque. — J'ai tenu à donner un calcul complet comme application du théorème général, mais il est clair qu'ici il valait mieux calculer simplement $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, puisqu'on avait prévu que cette dérivée serait nulle. Voici comment on peut y parvenir.

Dans l'équation de la surface

$$z = f(x, y),$$

concevons qu'on ait remplacé y par sa valeur tirée de cette même équation; nous obtenons alors une identité et les dérivées des deux membres, par rapport à x, doivent être égales

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x},$$

ou

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{p}{q}.$$

On a alors

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d\frac{\partial y}{\partial x}}{dx} = \frac{p\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) - q\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)}{q^2}.$$

$\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)$ contient x de deux manières, explicitement et par l'intermédiaire de y : donc

$$\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = s - t\frac{p}{q}.$$

De même,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = r - s\frac{p}{q}.$$

On a donc finalement

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{-p^2 t + 2pqs - q^2 r}{q^3},$$

et cette expression est nulle en vertu de l'équation (1).

Dans les exemples suivants, les changements de variables seront plus compliqués : les nouvelles variables dépendront non seulement des anciennes, mais encore des dérivées de la fonction par rapport à ces variables.

Transformation de Legendre. — Cette transformation consiste à remplacer les variables x, y et la fonction z par les nouvelles variables X, Y, Z, dont voici la définition

$$(1)\qquad X = \frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad Y = \frac{\partial z}{\partial y} = q, \qquad Z = px + qy - z.$$

Je me propose de calculer les dérivées premières et secondes de la nouvelle fonction Z par rapport aux nouvelles variables.

1° *Dérivées premières de Z.* — D'après la méthode indiquée, il faut chercher une relation de la forme

$$dZ = P\,dX + Q\,dY,$$

et l'on aura alors

$$P = \frac{\partial Z}{\partial X}, \qquad Q = \frac{\partial Z}{\partial Y}.$$

Or la troisième équation (1) différentiée donne immédiatement

$$dZ = p\,dx + q\,dy - dz + x\,dp + y\,dq,$$

ou, en tenant compte des autres équations (1) et de ce que les trois premiers termes de la dernière égalité disparaissent en vertu de l'égalité qui définit p et q $(dz = p\,dx + q\,dy)$,

$$dZ = x\,dX + y\,dY.$$

Donc

$$(2)\qquad P = x, \qquad Q = y.$$

2° *Dérivées secondes de Z.*

$$R = \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial x}{\partial X}, \qquad S = \frac{\partial^2 Z}{\partial X\,\partial Y} = \frac{\partial P}{\partial Y} = \frac{\partial Q}{\partial X} = \frac{\partial x}{\partial Y} = \frac{\partial y}{\partial X},$$

$$T = \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = \frac{\partial Q}{\partial Y} = \frac{\partial y}{\partial Y}.$$

Nous avons donc à calculer les dérivées de x et y par rapport aux nouvelles variables, c'est-à-dire à trouver des équations de la forme

$$\begin{aligned} dx &= A\ dX + B\ dY, \\ dy &= A'\, dX + B'\, dY. \end{aligned}$$

Or r, s, t sont définies par les identités suivantes

$$\begin{aligned} dp &= r\,dx + s\,dy, \\ dq &= s\,dx + t\,dy, \end{aligned}$$

qui peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} dX &= r\,dx + s\,dy, \\ dY &= s\,dx + t\,dy. \end{aligned}$$

On en tire

$$\begin{aligned} dx &= \frac{t}{rt - s^2}\,dX - \frac{s}{rt - s^2}\,dY, \\ dy &= \frac{-s}{rt - s^2}\,dX + \frac{r}{rt - s^2}\,dY. \end{aligned}$$

Donc

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial X} = R &= \frac{t}{rt - s^2}, \\ S &= \frac{-s}{rt - s^2}, \\ T &= \frac{r}{rt - s^2}. \end{aligned}$$

Remarque. — Les anciennes variables s'obtiennent en fonction des nouvelles par des formules analogues

$$\begin{gathered} x = P, \qquad y = Q, \qquad z = PX + QY - Z, \\ p = X, \qquad q = Y, \\ r = \frac{T}{RT - S^2}, \qquad s = \frac{-S}{RT - S^2}, \qquad t = \frac{R}{RT - S^2}. \end{gathered}$$

Interprétation géométrique. — *La transformation de Legendre revient à remplacer une surface par sa polaire réciproque par rapport à un certain paraboloïde.*

Soit, en effet,

$$z = f(x, y)$$

l'équation d'une surface, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, et soit

$$x^2 + y^2 = 2z$$

celle d'un paraboloïde. Cherchons la polaire réciproque de la surface par rapport au paraboloïde : un point de cette polaire réciproque ayant pour coordonnées X, Y, Z, son plan polaire par rapport au paraboloïde,

$$Xx + Yy - z - Z = 0,$$

doit se confondre avec le plan tangent à la surface au point x_0, y_0, z_0,

$$z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0).$$

On a donc

$$\frac{X}{p_0} = \frac{Y}{q_0} = 1 = \frac{Z}{p_0 x_0 + q_0 y_0 - z_0},$$

ou

$$X = p_0, \qquad Y = q_0, \qquad Z = p_0 x_0 + q_0 y_0 - z_0;$$

ce sont les formules de Legendre.

Transformations de contact. — Les formules que nous venons de donner ont un caractère remarquable : elles permettent d'exprimer non seulement X, Y, Z, mais encore les dérivées $P = \frac{\partial Z}{\partial X}$, $Q = \frac{\partial Z}{\partial Y}$ en fonction de x, y, z, p, q. De pareilles transformations s'appellent des *transformations de contact*. Il est facile de voir que cela n'est pas possible, en général.

Soient, en effet, les trois formules dont la dernière résulte des deux autres,

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= f(x, y, z, p, q), \\ Y &= f_1(x, y, z, p, q), \\ Z &= f_2(x, y, z, p, q). \end{aligned}\right.$$

Pour avoir P et Q, cherchons une relation de la forme

$$\partial Z = A\, dX + B\, dY,$$

et pour cela différentions les équations (α) :

$$(\beta)\quad \left\{ \begin{aligned} dX &= \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{dy}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz + \frac{\partial f}{\partial p}\, dp + \frac{\partial f}{\partial q}\, dq, \\ dY &= \frac{\partial f_1}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dy + \frac{df_1}{\partial z}\, dz + \frac{df_1}{\partial p}\, dp + \frac{df_1}{\partial q}\, dq, \\ dZ &= \frac{\partial f_2}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}\, dz + \frac{df_2}{\partial p}\, dp + \frac{\partial f_2}{\partial q}\, dq; \end{aligned} \right.$$

comme

$$\begin{aligned} dz &= p\, dx + q\, dy, \\ dp &= r\, dx + s\, dy, \\ dq &= s\, dx + t\, dy, \end{aligned}$$

en portant ces valeurs dans les équations (β), on pourra éliminer dx, dy et le résultat de l'élimination sera évidemment de la forme

$$dZ = A\, dX + B\, dY.$$

Mais A et B, et par suite P et Q, contiendront r, s, t, ce qui démontre le théorème.

La transformation de Legendre jouit donc d'une propriété spéciale. Géométriquement voici ce que cela veut dire : p, q et -1 sont, comme on l'a vu, proportionnels aux cosinus directeurs de la normale au point x, y, z; de même P, Q, -1 sont proportionnels aux cosinus directeurs de la normale au point X, Y, Z. Les transformations de contact sont donc celles qui font dépendre les points et plans tangents de la nouvelle surface exclusivement de la connaissance des points et plans tangents de la première surface.

C'est bien une propriété de la transformation par polaires réciproques; c'est aussi, évidemment, une propriété de toutes les transformations qui font correspondre les deux surfaces points par points (inversion, homographie); car, à trois points infiniment voisins qui déterminent le plan tangent à la première surface correspondent trois points infiniment voisins déterminant le plan tangent à la deuxième surface.

La correspondance entre une surface et sa podaire est encore une transformation de contact.

Soit, en effet,

$$z = f(x, y)$$

l'équation d'une surface,

$$z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0)$$

l'équation de son plan tangent au point $M(x_0, y_0, z_0)$, et cherchons la podaire par rapport à l'origine O. La perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan aura pour équations

$$\frac{x}{p_0} = \frac{y}{q_0} = \frac{z}{-1}.$$

Les coordonnées du point $\mu(X, Y, Z)$ de la podaire seront, en effaçant les indices zéro, données par les équations

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} X + pZ = 0, \\ Y + qZ = 0, \\ Z - z = p(X - x) + q(Y - y). \end{cases}$$

Calculons maintenant P et Q, et, pour cela, différentions les trois équations précédentes,

$$dX + p\,dZ + Z\,dp = 0,$$
$$dY + q\,dZ + Z\,dq = 0,$$
$$dZ - \overline{dz} = p\,dX - \overline{p\,dx} + q\,dY - \overline{q\,dy} + (X - x)\,dp + (Y - y)\,dq.$$

Les trois termes surmontés d'un trait se détruisent parce que x, y, z est un point de la surface donnée, et l'on peut alors éliminer dp et dq entre les trois dernières équations, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} dX + p\,dZ & Z & 0 \\ dY + q\,dZ & 0 & Z \\ p\,dX + q\,dY - dZ & X - x & Y - y \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{aligned}[pZ - (X - x)]\,dX + [qZ - (Y - y)]\,dY \\ = [p(X - x) + q(Y - y) + Z]\,dZ,\end{aligned}$$

ou encore

$$(\delta)\qquad (x - 2X)\,dX + (y - 2Y)\,dY + (z - 2Z)\,dZ = 0.$$

Si l'on résout cette dernière équation par rapport à dZ, les coefficients de dX, dY seront P et Q et ne dépendent que de x, y, z, p, q, ce que nous voulions démontrer.

Remarque. — L'équation (δ) exprime la propriété suivante : *La droite qui joint le point* μ *au milieu de* OM *est perpendiculaire à tous les déplacements* dX, dY, dZ, *en d'autres termes est la normale à la seconde surface au point* μ. C'est la construction connue du plan tangent au point μ.

Réciprocité des transformations de contact. — Nous allons établir pour toutes ces transformations une certaine réciprocité. Entre les équations (α) éliminons p et q, considérées comme variables indépendantes. Nous obtiendrons une équation

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0,$$

qui représentera deux surfaces Σ ou Σ' suivant que l'on y considérera x, y, z ou X, Y, Z comme les coordonnées courantes. *La surface* Σ *enveloppe le lieu* S' *du point* X, Y, Z *et la surface* Σ' *le lieu* S *du point* x, y, z.

Pour le démontrer, soient M, M_1, M_2 trois points infiniment voisins de S auxquels correspondent trois surfaces Σ, Σ_1, Σ_2 se coupant deux à deux suivant des courbes distinctes : soit par exemple γ_1 la courbe commune à Σ et Σ_1, et γ_2 celle commune à Σ et à Σ_2; le point μ de l'enveloppe S' est la limite du point d'intersection de γ_1 et γ_2. Cela posé, je considère encore la courbe C_1 d'intersection de S' et de Σ_1 et la courbe C_2 d'intersection de S' et de Σ_2; ces deux courbes se coupent en un point μ_1 infiniment voisin de μ, parce que les deux surfaces S' et Σ sont tangentes en μ. De plus, et pour la même raison, un point μ' pris sur γ_1 et un point μ'_1 pris sur C_1, dans le voisinage immédiat de μ, sont à une distance $\mu'\mu'_1$ infiniment petite du deuxième ordre l'un de l'autre; de même $\mu''\mu''_1$ est infiniment petit du deuxième ordre, μ'' et μ''_1 étant pris dans les mêmes conditions sur γ_2 et C_2. Donc enfin le plan tangent en μ à Σ, ou à S', est la limite, soit du plan $\mu\mu'\mu''$, soit du plan $\mu\mu'_1\mu''_1$. Cherchons maintenant l'enveloppe de la surface Σ' : nous devons considérer trois surfaces Σ', Σ'_1, Σ'_2 correspondant à trois points de S' infiniment voisins μ, μ'_1, μ''_1 ou, ce qui revient au même, à trois points μ, μ', μ'', puisque $\mu'\mu'_1$ et $\mu''\mu''_1$ sont du second ordre.

Mais alors Σ'_1 passe au point M_1 et Σ'_2 au point M_1; Σ'_1 et Σ'_2 coupent donc Σ' infiniment près du point M qui est un point de l'enveloppe de Σ'; comme MM_1M_2 a pour limite le plan tangent soit à S, soit à Σ', le théorème est entièrement démontré.

Exemple. — Revenons aux équations (γ) du problème des podaires. Le résultat de l'élimination de p et de q entre ces équations est

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - Xx - Yy - Zz = 0.$$

Si x, y, z sont considérés comme des paramètres, l'équation précédente représente une sphère décrite sur OM comme diamètre : la podaire est l'enveloppe de cette sphère.

Si X, Y, Z sont des paramètres, la même équation représente un plan passant au point μ et perpendiculaire sur $O\mu$: c'est le plan tangent à la surface donnée, il enveloppe cette surface.

RECHERCHE DES TRANSFORMATIONS DE CONTACT.

Théorème général. — *Si l'on appelle* X, Y, Z *les nouvelles variables, et* P, Q *les dérivées de* Z *par rapport à* X *et à* Y, *le problème qui consiste à rechercher dans quels cas ces cinq quantités s'expriment en fonction de* x, y, z, p, q *est le même que celui où l'on cherche cinq fonctions* X, Y, Z, P, Q *de cinq variables indépendantes* x, y, z, p, q *satisfaisant à l'équation différentielle*

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = \rho\,(dz - p\,dx - q\,dy),$$

où ρ *est une fonction de* x, y, z, p, q.

1° Je suppose trouvées cinq fonctions X, Y, Z, P, Q de x, y, z, p, q vérifiant l'équation précédente. Si en plus p et q désignent les dérivées de z par rapport à x et y, on aura

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

et, par suite,

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = 0,$$

ce qui veut dire que

$$P = \frac{\partial Z}{\partial X}, \qquad Q = \frac{\partial Z}{\partial Y}.$$

2° Réciproquement, si l'on a obtenu une transformation de contact, et si l'on suppose ensuite x, y, z,

p, q indépendantes, il existera une relation de la forme

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = \rho(dz - p\,dx - q\,dy).$$

Par hypothèse l'élimination de dx et dy indiquée (p. 15) entre les relations (β) a réussi, c'est-à-dire qu'on a pu trouver des multiplicateurs P, Q ne contenant pas r, s, t et tels qu'on ait identiquement

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = 0,$$

p, q étant jusqu'à présent $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$. Mais r, s, t ne figurent que dans dp et dq; il faut donc qu'en formant

$$dZ - P\,dX - Q\,dY$$

le coefficient de dp disparaisse ainsi que celui de dq.

Donc

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial f_2}{\partial p} - P\frac{\partial f}{\partial p} - Q\frac{\partial f_1}{\partial p} = 0,\\ &\frac{\partial f_2}{\partial q} - P\frac{\partial f}{\partial q} - Q\frac{\partial f_1}{\partial q} = 0.\end{aligned}\right.$$

De plus, les coefficients de dx, dy doivent être aussi nuls :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial f_2}{\partial x} + p\frac{\partial f_2}{\partial z} - P\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) - Q\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + p\frac{\partial f_1}{\partial z}\right) = 0,\\ &\frac{\partial f_2}{\partial y} + p\frac{\partial f_2}{\partial z} - P\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right) - Q\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + q\frac{\partial f_1}{\partial z}\right) = 0,\end{aligned}\right.$$

et ces conditions sont évidemment suffisantes.

Si l'on peut trouver des fonctions P et Q vérifiant ces quatre équations, le problème sera résolu. Les équations (2) feront connaître dX, dY, dZ, d'où X, Y, Z.

Cela posé, multiplions les quatre équations ci-dessus par dp, dq, dx, dy, et ajoutons : il vient, en considérant x, y, z, p, q comme des variables indépendantes,

$$\begin{aligned} df_2 - \frac{\partial f_2}{\partial z}(dz - p\,dx - q\,dy) &= \mathrm{P}\left[df - \frac{\partial f}{\partial z}(dz - p\,dx - q\,dy)\right] \\ &\quad + \mathrm{Q}\left[df_1 - \frac{\partial f_1}{\partial z}(dz - p\,dx - q\,dy)\right], \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$d\mathrm{Z} - \mathrm{P}\,d\mathrm{X} - \mathrm{Q}\,d\mathrm{Y} = \rho(dz - p\,dx - q\,dy),$$

en posant

$$\rho = \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z} - \mathrm{P}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z} - \mathrm{Q}\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z}.$$

Le théorème est donc démontré.

Application. — *Transformation d'Ampère.* — L'expression $dz - p\,dx - q\,dy$ peut s'écrire

$$d(z - qy) - p\,dx + y\,dq.$$

Posons

$$\mathrm{Z} = z - qy, \qquad \mathrm{X} = x, \qquad \mathrm{Y} = q;$$
$$\mathrm{P} = p, \qquad \mathrm{Q} = -y.$$

On voit que

$$d\mathrm{Z} - p\,d\mathrm{X} - \mathrm{Q}\,d\mathrm{Y} = dz - p\,dx - q\,dy,$$

par suite $\rho = 1$ et l'on a une transformation de contact, due à Ampère, et qui pourra être utilisée quand celle de Legendre sera illusoire, c'est-à-dire quand on aura

$$rt - s^2 = 0.$$

Il est facile de se rendre compte pourquoi, dans cette hypothèse, on ne peut prendre p et q comme variables indépendantes.

Choisissons en effet x et q comme variables (*voir* ci-dessus) et calculons $\frac{\partial p}{\partial x}$:

$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy;$$

d'où

$$dp = \left(r - \frac{s^2}{t}\right) dx + \frac{s}{t}\,dq,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{rt - s^2}{t}.$$

Donc, si $rt - s^2 = 0$, p ne dépend pas de x; il y a donc une relation entre p et q, ce qui empêche de les prendre comme variables indépendantes.

Remarque. — La transformation de Legendre résulte de même de l'identité

$$d(z - px - qy) - x\,dp - y\,dq = dz - p\,dx - q\,dy,$$

où l'on peut poser

$$X = p, \qquad Y = q, \qquad Z = z - px - qy,$$
$$P = x, \qquad Q = y.$$

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1893). SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE;

Par M. AUDIBERT.

Nous convenons que, sur le chemin OBx, on ne rencontre aucun des points critiques $a_1, \ldots, a_8$ de la fonction $\frac{z^{p-1}}{y}$, et que, sur le parcours OCa_j, il ne s'en trouve qu'un, a_j, qui termine la trajectoire de z.

Cela posé, un parcours quelconque donné, pour lequel la valeur de l'intégrale est V, se ramènera, d'après un théorème connu, au parcours d'un certain nombre de *lacets* suivi du chemin OBx.

On entend par lacet relatif au pôle aj l'intégrale, prise le long de OCaj, d'un cercle infiniment petit enveloppant ce pôle, et du retour suivant ajCO. Un lacet n'enveloppe qu'un point critique.

Dans le cas considéré, l'intégrale sur le petit cercle est nulle; mais, quand z a contourné aj, le radical a changé de signe et la valeur du lacet est

$$\int_0^{aj} \frac{z^{p-1}\,dz}{y} + \int_{aj}^{0} \frac{z^{p-1}\,dz}{-y} = 2\,\mathrm{A}j.$$

Le radical supposé pris avec la valeur initiale $+y_0$, devient $-y_0$ quand z revient en O, après le parcours du lacet.

L'intégrale prise sur deux lacets successifs relatifs aux pôles aj et ai sera $2(\mathrm{A}j - \mathrm{A}i)$. Après ce parcours, la fonction reprendra la valeur et le signe qu'elle avait avant; $2(\mathrm{A}j - \mathrm{A}i)$ est une période.

Prise suivant un chemin composé de plusieurs lacets et du parcours OBx, l'intégrale

$$\mathrm{V} = 2\,\mathrm{A}_1 - 2\,\mathrm{A}_2 + \ldots \pm 2\,\mathrm{A}j \mp 2\,\mathrm{A}i \pm \mathrm{I}.$$

Le signe $-$ ou $+$ affectera I suivant que le parcours comprendra, en outre de OBx, un nombre impair ou pair de lacets, ou, ce qui revient au même, un nombre entier de périodes suivies ou non d'un lacet.

En désignant par φj une période et par mj un nombre entier positif ou négatif ou nul, on aura

$$\mathrm{V} = \Sigma\, mj\varphi j + \mathrm{I} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{V} = \Sigma\, mj\varphi j + 2\,\mathrm{A}j - \mathrm{I}.$$

En remplaçant dans cette seconde évaluation de V $2\,\mathrm{A}j$ par $2\,\mathrm{A}_1 - 2(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}j)$, elle devient

$$\mathrm{V} = \Sigma\, mj\varphi j + 2\,\mathrm{A}_1 - \mathrm{I}.$$

Le polynôme $R(z)$ a huit racines, mais on n'aura pas $\frac{8.7}{1.2}$ périodes distinctes. On peut d'abord ne laisser subsister dans $\Sigma m j \varphi j$ que les périodes de la forme

$$2(A_1 - Aj),$$

car on a

$$2(Aj - Ai) = 2(A_1 - Ai) - 2(A_1 - Aj).$$

A ce compte, il y aurait encore sept périodes; mais comme (même dans le cas de $p = 3$) l'intégrale V prise sur un cercle de rayon infini tracé de l'origine est nulle, et qu'on peut passer du parcours des huit lacets successifs au cercle infini, sans franchir de pôle,

$$2A_1 - 2A_2 + \ldots + 2A_7 - 2A_8 = 0,$$

et, par suite,

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4 + \varphi_5 - \varphi_6 + \varphi_7 = 0.$$

On pourra donc éliminer φ_7, par exemple, et écrire

$$(1) \qquad V = m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \ldots + m_6\varphi_6 + (I \text{ ou } 2A_1 - I).$$

Les périodes composées $\omega_1, \ldots, \omega_6$, définies dans l'énoncé, sont liées aux périodes simples φ par les relations

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \omega_1, \\
\varphi_2 &= \omega_1 + \omega_2, \\
\varphi_3 &= \omega_2 + \omega_3, \\
\varphi_4 &= \omega_2 + \omega_3 + \omega_4, \\
\varphi_5 &= \omega_2 + \omega_4 + \omega_5, \\
\varphi_6 &= \omega_2 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6.
\end{aligned}$$

En éliminant les φ dans (1), on arrive à l'expression

$$(2) \qquad V = m_1\omega_1 + \ldots + m_6\omega_6 + (I \text{ ou } 2A_1 - I).$$

1° On suppose que la fonction $R(z)$, dont α serait racine, se réduise à $z^8 + az^4 + 1$; ce trinôme s'annulera pour les huit valeurs de z

$$\alpha,\quad -\alpha,\quad \alpha\sqrt{-1},\quad -\alpha\sqrt{-1},\quad \frac{1}{\alpha},\quad \frac{-1}{\alpha},\quad \frac{-\sqrt{-1}}{\alpha},\quad \frac{\sqrt{-1}}{\alpha}.$$

Posons

$$A_1 = \int_0^{\alpha} \frac{dz}{y},\qquad A_2 = \int_0^{\frac{1}{\alpha}} \frac{dz}{y},$$

ces intégrales étant prises suivant les droites $O\alpha$ et $O\frac{1}{\alpha}$, à la condition toutefois que ces chemins d'intégration ne rencontrent que les pôles α et $\frac{1}{\alpha}$. S'il en était autrement, si deux racines de $R(z)$ avaient même argument, ces parcours devraient être un peu infléchis.

Les huit lacets de l'intégrale $\omega = \int_0^{x} \frac{dz}{y}$ seront respectivement

$$\begin{array}{llll} 2A_1, & -2A_1, & 2A_1\sqrt{-1}, & -2A_1\sqrt{-1}, \\ 2A_2, & -2A_2, & -2A_2\sqrt{-1}, & 2A_2\sqrt{-1}. \end{array}$$

Les six périodes suivantes s'en déduisent

$$\begin{array}{lll} 4A_1, & 2A_1(1-\sqrt{-1}), & 2A_1(1+\sqrt{-1}), \\ 4A_2, & 2A_2(1+\sqrt{-1}), & 2A_2(1-\sqrt{-1}). \end{array}$$

On voit qu'elles ne sont pas toutes distinctes, car, en les désignant par ordre, par les lettres $\varphi_1, \varphi_2, \ldots,$ on a

$$\varphi_2 + \varphi_3 = \varphi_1,\qquad \varphi_5 + \varphi_6 = \varphi_4.$$

On peut donc en supprimer deux, φ_2 et φ_5, par exemple, dans l'évaluation de ω.

On a encore les relations

$$2\varphi_3 - \varphi_1 = 4A_1\sqrt{-1},\qquad \varphi_4 - 2\varphi_6 = 4A_2\sqrt{-1}.$$

Les seconds membres, qui sont d'ailleurs des périodes relatives aux pôles $\alpha\sqrt{-1}$, $-\alpha\sqrt{-1}$, $\frac{\sqrt{-1}}{\alpha}$, $\frac{-\sqrt{-1}}{\alpha}$, peuvent être substitués à φ_3 et φ_4.

Finalement, on peut adopter pour ω les quatre périodes suivantes :

$$(3) \qquad 4A_1, \quad 4A_2, \quad 4A_1\sqrt{-1}, \quad 4A_2\sqrt{-1}.$$

2° Considérons en second lieu l'intégrale

$$\upsilon = \int_0^x \frac{z^2\,dz}{y}.$$

Le lacet relatif au pôle α

$$2\int_0^\alpha \frac{z^2\,dz}{y}$$

s'exprimera par l'intégrale

$$2\int_{\frac{1}{\alpha}}^\infty \frac{dz}{y}$$

après le changement de z en $\frac{1}{z}$.

Ce lacet est égal, au signe près, à l'intégrale ω prise sur un chemin qui part de l'infini (où les éléments de ω sont nuls) sur la droite $O\frac{1}{\alpha}$, va jusqu'au pôle $\frac{1}{\alpha}$ qu'il contourne sur un petit cercle, et retourne à l'infini sur la même droite, sans toutefois franchir d'autre point critique.

La valeur de cette intégrale ne changera pas si nous étendons son double parcours jusqu'en O, à la condition toujours de ne pas franchir de point critique, et sous cette réserve on aura

$$2\int_{\frac{1}{\alpha}}^\infty \frac{dz}{y} = 2\int_0^\infty \frac{dz}{y}.$$

D'autre part, si l'on prolonge à l'infini *dans les mêmes conditions* le lacet $2A_2$ de ω, on peut écrire

$$2A_2 = \int_0^{\frac{1}{\alpha}} \frac{dz}{y} = \int_0^{\infty} \frac{dz}{y}.$$

Donc un lacet de υ relatif à un pôle est égal au lacet de ω relatif au pôle de valeur inverse et réciproquement.

Nous connaissons les lacets de υ ; en les combinant deux à deux, nous formerons les périodes de cette intégrale

$$4A_1, \quad 4A_2\sqrt{-1}, \quad -4A_1\sqrt{-1}, \quad 4A_2$$

qui sont distinctes, et ont avec celles de ω (3) les relations indiquées dans l'énoncé.

3° Le lacet relatif au pôle α de l'intégrale $A\omega + B\upsilon$ est

$$2\left(A\int_0^{\alpha} \frac{dz}{y} + B\int_0^{\frac{1}{\alpha}} \frac{dz}{y}\right);$$

il s'ensuit qu'en adoptant pour ω les quatre périodes (3), celles de $A\omega + B\upsilon$ seront déterminées : elles auront les valeurs suivantes

$$4(AA_1 + BA_2), \quad 4(AA_1 - BA_2)\sqrt{-1},$$
$$4(AA_2 + BA_1), \quad 4(AA_2 - BA_1)\sqrt{-1}.$$

Elles sont distinctes, mais, si l'on fait $A = B\sqrt{-1}$, elles deviennent

$$4B(A_2 + A_1\sqrt{-1}), \quad -4B(A_1 + A_2\sqrt{-1}),$$
$$4B(A_1 + A_2\sqrt{-1}), \quad -4B(A_2 + A_1\sqrt{-1}),$$

et il n'y en a plus que deux de distinctes.

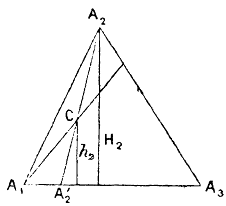
SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE PLANE;

PAR M. ROMUALD BLAZEIEVSKI.

RELATIONS ENTRE LES DISTANCES D'UN POINT DU PLAN AUX SOMMETS D'UN TRIANGLE.

Supposons qu'un point C (*fig.* 1) est joint aux sommets A_1, A_2, A_3 par les droites A_1C, A_2C, A_3C : dési-

Fig. 1.



gnons par w_1, w_2, w_3 les segments $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $A_3A'_3$, par z_1, z_2, z_3 les distances A_1C, ..., nous avons le théorème (Euler) exprimé par l'équation

$$(1) \qquad \frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2} + \frac{z_3}{w_3} = 2.$$

En effet, soient h_2, H_2 les hauteurs des triangles A_1CA_3, $A_1A_2A_3$ ayant A_1A_3 pour base, nous avons

$$\text{surf. } A_1CA_3 : \text{surf. } A_1A_2A_3$$
$$= h_2 : H_2 = CA'_2 : A_2A'_2 = w_2 - z_2 : w_2.$$

De la même façon, eu égard aux triangles A_1CA_2, A_2CA_3,

$$\text{surf. } A_1CA_2 : \text{surf. } A_1A_2A_3 = w_3 - z_3 : w_3,$$
$$\text{surf. } A_2CA_3 : \text{surf. } A_1A_2A_3 = w_1 - z_1 : w_1.$$

La somme des premiers termes est égale à $A_1 A_2 A_3$; ainsi

$$1 = \frac{w_1 - z_1}{w_1} + \frac{w_2 - z_2}{w_2} + \frac{w_3 - z_3}{w_3},$$

et après quelques réductions nous avons l'équation (1). Si le triangle doit être réel, les z doivent satisfaire à une seconde condition. Nommons $\theta_1 = \widehat{A_2 C A_3}$, $\theta_2 = \widehat{A_3 C A_1}$, $\theta_3 = \widehat{A_1 C A_2}$, A le double de la surface du triangle, nous avons

$$\begin{aligned} w_1 z_2 \sin\theta_3 + w_1 z_3 \sin\theta_2 &= A, \\ w_2 z_1 \sin\theta_3 + w_2 z_3 \sin\theta_1 &= A, \\ w_3 z_1 \sin\theta_2 + w_3 z_2 \sin\theta_1 &= A, \end{aligned}$$

ou bien, en résolvant par rapport à $\sin\theta_1$,

$$\frac{D \sin\theta_1}{A} = \begin{vmatrix} 1 & w_1 z_3 & w_1 z_2 \\ 1 & 0 & w_2 z_1 \\ 1 & w_3 z_1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad D = \begin{vmatrix} 0 & w_1 z_3 & w_1 z_2 \\ w_2 z_3 & 0 & w_2 z_1 \\ w_3 z_2 & w_3 z_1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$D \sin\theta_1 = A(-z_1^2 w_2 w_3 + z_1 z_2 w_1 w_3 + z_1 z_3 w_1 w_2),$$

ou, d'après l'équation (1),

$$\begin{aligned} D \sin\theta_1 &= A\left(-\frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2} + \frac{z_3}{w_3}\right) z_1 w_1 w_2 w_3 \\ &= 2 A w_1 w_2 w_3 z_1 \left(1 - \frac{z_1}{w_1}\right). \end{aligned}$$

Pour la réalité de θ_1, on doit avoir

$$\left| 2 A w_1 w_2 w_3 z_1 \left(1 - \frac{z_1}{w_1}\right) \right| < | D |,$$

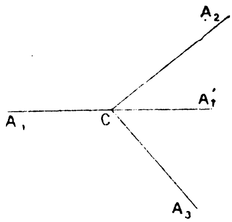
et deux autres inégalités doivent avoir lieu :

$$\left| 2 A w_1 w_2 w_3 z_2 \left(1 - \frac{z_2}{w_2}\right) \right| < | D |,$$

$$\left| 2 A w_1 w_2 w_3 z_1 \left(1 - \frac{z_3}{w_3}\right) \right| < | D |.$$

Les z choisis d'après les conditions exprimées par les inégalités et par l'équation (1) permettent de construire le triangle $A_1A_2A_3$. Faisons (*fig.* 2) $A_1C = z_1$, $\widehat{A_1CA_2} = \theta_3$, $A_1CA_3 = \theta_2$, $CA_2 = z_2$, $CA_3 = z_3$: pre-

Fig. 2.



nons $A_1A'_1$ pour l'axe des x, la perpendiculaire en C à $A_1A'_1$ pour l'axe des y. Nous avons, pour les coordonnées de A'_1, A_2, A_3,

A'_1	$w_1 - z_1$,	0,
A_2	$-z_2\cos\theta_3$,	$z_2\sin\theta_3$,
A_3	$-z_3\cos\theta_2$,	$-z_3\sin\theta_2$.

La surface du triangle $A_1A_2A_3$ sera la moitié de l'expression

$$\begin{vmatrix} 1 & w_1 - z_1 & 0 \\ 1 & -z_2\cos\theta_3 & z_2\sin\theta_3 \\ 1 & -z_3\cos\theta_2 & -z_3\sin\theta_2 \end{vmatrix} = z_2z_3(\sin\theta_2\cos\theta_3 + \cos\theta_2\sin\theta_3) + (w_1 - z_1)(z_2\sin\theta_3 + z_3\sin\theta_2),$$

ou bien

$$z_2z_3\sin(2\pi - \theta_1) + (w_1 - z_1)(z_2\sin\theta_3 + z_3\sin\theta_2).$$

D'après les valeurs des sinus des angles θ_1, θ_2, θ_3 données tout à l'heure, cette expression est proportionnelle à

$$-z_2z_3z_1\left(1 - \frac{z_1}{w_1}\right) + (w_1 - z_1)\left[z_2z_3\left(1 - \frac{z_3}{w_3}\right) + z_3z_2\left(1 - \frac{z_2}{w_2}\right)\right].$$

Selon le théorème d'Euler cette quantité s'annule. Ainsi les points A_2, A_3, A'_1 sont situés sur une ligne droite. De même A'_1 est sur la droite $A_2 A_3$, A'_3 sur $A_1 A_2$. Parmi les triangles construits d'après cette méthode, il peut s'en rencontrer de tels que z_1, z_2, z_3 soient les bissectrices des angles A_1, A_2, A_3. En donnant cette condition, nous avons un problème déterminé : soient w_1, w_2, w_3 les bissectrices du triangle données en longueur, mais non en position, trouver le triangle.

THÉORÈMES SUR LES BISSECTRICES.

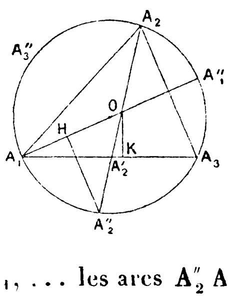
Théorème I. — *Décrivons le cercle circonscrit à* $A_1 A_2 A_3$, *soit* A''_2 *le milieu de l'arc* $A_1 A_3$, *on a la relation*

$$A_1 A''_2 : A''_2 O = A_2 O : A_2 A'_2.$$

En effet (*fig.* 3), d'après la construction,

$$\widehat{A_1 A_2 A''_2} = \widehat{A''_2 A_1 A_3}, \qquad \widehat{A_2 A_1 A''_1} = \widehat{A_3 A_1 A''_1},$$
$$\tfrac{1}{2} A''_2 A_1 = \tfrac{1}{2} A''_2 A_3, \qquad \tfrac{1}{2} A_3 A''_1 = \tfrac{1}{2} A''_1 A_2,$$

Fig. 3.



en désignant $A''_2 A_1$, ... les arcs $A''_2 A_1$, ...; en ajoutant

$$\tfrac{1}{2}(A''_2 A_1 + A_2 A''_1) = \tfrac{1}{2}(A''_2 A_3 + A_3 A''_1),$$

c'est-à-dire les angles $A_1 O A''_2$, $A''_2 A_1 O$ sont égaux, et, par suite,

$$A_1 A''_2 = A''_2 O.$$

Les triangles $A_1A_2A''_2$, $A_1A'_2A''_2$ sont semblables, ayant

$$\widehat{A''_2A_1A_2} = \widehat{A_1A'_2A''_2},$$

et l'angle $A_1A''_2A'_2$ commun. Nous pouvons conclure la relation

$$A_1A''_2 : A_2A''_2 = A'_2A''_2 : A_1A''_2;$$

mais comme $A_1A''_2 = A''_2O$,

$$A''_2O : A_2A''_2 = A'_2A''_2 : A''_2O;$$

mais $A_2A''_2 = OA_2 + OA''_2$, $A'_2A''_2 = OA_2 + OA''_2 - A_2A'_2$, en désignant $A_1A''_2$ par ζ_2, OA_2 par z_2, $A_2A'_2$ par w_2, nous avons

$$(2)\quad \zeta_2 : z_2 + \zeta_2 = z_2 + \zeta_2 - w_2 : \zeta_2, \quad (2z_2 - w_2)\zeta_2 = z_2(w_2 - z_2).$$

Théorème II. — *Soit* D *le diamètre* 2OK *du cercle inscrit, nous avons*

$$OA''_2 : \tfrac{1}{2}A_1O = OA_3 : \tfrac{1}{2}D.$$

En effet, $\widehat{A_1A''_2O} = \widehat{A_1A_3A_2}$, car ces angles, inscrits dans le cercle, s'appuient sur le même arc A_1A_2; A''_2H est la hauteur du triangle équilatéral A''_2A_1O; les triangles rectangles A''_2HO, KOA_3, ayant égaux les angles aigus, sont semblables et nous avons la relation ci-dessus, qu'on peut écrire

$$(3)\qquad \zeta_2 = \frac{z_1z_3}{D}.$$

UNE MÉTHODE POUR S'ASSURER QUE LE PROBLÈME A DES SOLUTIONS RÉELLES, QUELLES QUE SOIENT LES VALEURS ARBITRAIRES w_1, w_2, w_3.

Faisant une substitution circulaire des indices dans (2) et (3), nous avons

$$(4)\qquad \zeta_2(2z_1 - w_1) = z_1(w_1 - z_1), \qquad D\zeta_1 = z_2z_3,$$

$$(5)\qquad \zeta_3(2z_3 - w_3) = z_3(w_3 - z_3), \qquad D\zeta_3 = z_1z_2.$$

Ces six équations et l'équation (1) déterminent les inconnues z, mais l'élimination est très laborieuse, comme nous verrons plus loin. Ainsi nous choisirons la méthode géométrique suivante. Supposons

$$m_1 = \frac{w_1}{w_2 w_3}, \qquad m_2 = \frac{w_2}{w_1 w_3}, \qquad m_3 = \frac{w_3}{w_1 w_2},$$

$$\frac{z_1}{w_1} = x_1, \qquad \frac{z_2}{w_2} = x_2, \qquad \frac{z_3}{w_3} = x_3,$$

$$\frac{\zeta_1}{w_1} = y_1, \qquad \frac{\zeta_2}{w_2} = y_2, \qquad \frac{\zeta_2}{w_3} = y_3;$$

alors les équations données par le théorème I prennent la forme

$$y(2x-1) = x(1-x),$$

c'est-à-dire les points $x_i, y_i (i = 1, 2, 3)$ sont sur une conique. En outre, nous avons

$$D m_1 y_1 = x_2 x_3, \qquad D m_2 y_2 = x_1 x_3,$$

$$D m_3 y_3 = x_1 x_2, \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2.$$

Introduisons une variable u déterminée par

$$x_1 x_2 x_3 = D u,$$

$$m_1 x_1 y_1 = u, \qquad m_2 x_2 y_2 = u, \qquad m_3 x_3 y_3 = u.$$

Le point x_1, y_1 est sur l'intersection de deux courbes du second degré,

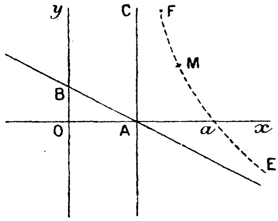
$$y(2x-1) - x(1-x) = 0, \qquad m_1 xy = u.$$

Laissant pour une autre occasion la discussion du cas où $x > 1$, remarquons cette propriété intéressante de ces courbes qu'elles ont un seul point d'intersection. En effet, la première est une hyperbole passant par l'origine et le point $x = 1$ dont les asymptotes sont les droites

$$x - \tfrac{1}{2} = 0, \qquad 4y + 2x - 1 = 0;$$

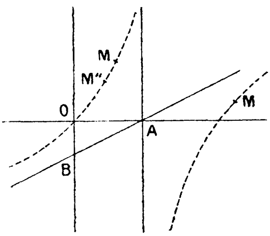
la seconde courbe est une hyperbole ayant pour asymptotes les axes des coordonnées (*fig.* 4). L'intersection de ces deux courbes peut être située seulement sur la

Fig. 4.



branche FME. Remarquons que pour $x > 1$ ou $x < \frac{1}{2}$ la première hyperbole a la forme de la *fig.* 5. Faisons varier u depuis o jusqu'à l'infini : pour $u = 0$ on a $y = 0$, $x = 1$; pour $u = \infty$, $x = \frac{1}{2}$. La somme des va-

Fig. 5.



leurs des x varie depuis le maximum 3 jusqu'à $\frac{3}{2}$. La condition $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ sera remplie pour de certaines valeurs des x renfermées entre les limites 1 et $\frac{1}{2}$, car la dérivée $\frac{dx}{du}$ reste négative pour toutes les valeurs réelles de u. Nous avons

$$m_1 \frac{x^2(1-x)}{2x-1} = u;$$

prenant la dérivée, on trouve

$$\frac{dx}{du} = \frac{(2x-1)^2}{m_1 x(-2+5x-4x^2)};$$

le dénominateur n'a pas d'autres racines réelles, excepté $x = 0$, mais cette valeur n'est pas renfermée dans les limites données pour la variation de x. Ainsi $x_1 + x_2 + x_3$, passant de la valeur 3 à la valeur $\frac{3}{2}$, prendra, pour une certaine valeur de u, la valeur 2, ce qui est la condition du problème.

SOLUTION ANALYTIQUE DU PROBLÈME.

Éliminant les y, nous avons

$$m_1 \mathrm{D} = \frac{(2x_1 - 1)x_2 x_3}{x_1(1 - x_1)}, \qquad m_2 \mathrm{D} = \frac{(2x_2 - 1)x_1 x_3}{x_2(1 - x_2)}.$$

$$m_3 \mathrm{D} = \frac{(2x_3 - 1)x_1 x_2}{x_3(1 - x_3)}, \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2.$$

Supposons que x_1, x_2, x_3 soient les racines d'une équation du troisième degré

$$t^3 - 2t^2 + yt - \frac{q}{z}(y - 1) = 0 :$$

y et z sont les nouvelles inconnues, q est une constante; posons

$$\begin{aligned} h &= m_1 + m_2 + m_3, \\ k &= m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3. \\ l &= m_1 m_2 m_3. \end{aligned}$$

D'après la théorie des fonctions symétriques, on trouve

$$\text{(A)} \qquad \frac{f}{x} = 5 + \frac{z(y - 1)}{z - q} - \frac{y^2 z}{q(y - 1)},$$

$$\text{(B)} \qquad q - z = 4x^2(y - 1)(z - 2q) + qx^2,$$

$$\text{(C)} \qquad (q - z)z = (8q - 3z)x^3 + 4(z - 2q)yx^3,$$

en substituant au lieu de D la quantité

$$x = \frac{1}{\mathrm{D}\sqrt{k}},$$

et posant

$$hD = \frac{f}{x}, \qquad lD^3 = \frac{q}{x^3}, \qquad q_0 = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Retranchant l'équation (B) de (C) après avoir multiplié par x, nous avons $x^3 - x + z = 0$. Il est intéressant que x_1, x_2, x_3 peuvent être exprimés comme fonctions elliptiques de la même variable. Nous avons

$$m_1 q_0 x(1 - x_1) = x x_2 x_3 (2x_1 - 1),$$
$$m_2 q_0 x_2 (1 - x_2) = x x_1 x_3 (2x_2 - 1),$$
....

Par une simple transformation, nous trouvons

$$m_1 q_0 x_1 (1 - x_1) - m_2 q_0 x_2 (1 - x_2)$$
$$= x x_3 (x_1 - x_2) = 2xx_1 - xx_1^2 - (2xx_2 - xx_2^2).$$

Ainsi le polynome

$$xF = m_i q_0 x_i (1 - x_i) - 2xx_i + xx_i^2$$

n'éprouve aucun changement quand on permute les indices i : c'est une fonction symétrique de x_i. Répétant la méthode par laquelle nous avons trouvé l'équation (A), nous avons

$$\frac{f}{x} = 3 + \frac{1 + F}{z - q} z + \frac{Fyz}{q(y - 1)};$$

en comparant avec A, nous avons

$$\frac{Fz(yz - q)}{q(z - q)(y - 1)} = \frac{yz - 2q}{z - q} - \frac{y^2 z}{q(y - 1)};$$

mais la seconde partie de l'équation est divisible par $yz - q$, comme on peut le vérifier facilement. Ainsi

$$zF = q(y - 1) - y(z - q) - q.$$

A l'aide des équations (A), (B), (C), on a

$$F = 1 + \frac{q - x}{4x^3},$$

et nous avons l'équation

$$(x - m_1 q_0) x_1^2 + (m_1 q_0 - 2x) x_1 = x + \frac{q - x}{4x^2},$$

avec deux autres analogues. En résolvant par rapport à x_1, on trouve sous le radical un polynome du quatrième degré.

NOTE A L'ARTICLE PRÉCÉDENT.

Pour être bref, nous avons donné les résultats de la transformation des équations par les fonctions symétriques sans aucune preuve; pour remplir cette lacune reprenons les équations

$$m_1 D = \frac{(2x_1 - 1) x_2 x_3}{x_1(1 - x_1)}, \qquad m_2 D = \frac{(2x_2 - 1) x_1 x_3}{x_2(1 - x_2)},$$

$$m_3 D = \ldots, \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2.$$

Les quantités x_2, x_3 sont racines de l'équation

$$t^2 + (x_1 - 2) t + x_1^2 - 2x_1 + y = 0,$$

c'est-à-dire

$$x_2 x_3 = x_1^2 - 2x_1 + y,$$

$$(1 - x_2)(1 - x_3) = x_1^2 - x_1 + y - 1.$$

La fonction de x_1 entrant dans $m_1 D$ peut être représentée par

$$\frac{2x_1 - 1}{x_1(1 - x_1)} = \frac{1}{1 - x_1} - \frac{1}{x_1}.$$

Ainsi

$$m_1 D = \frac{x_1^2 - 2x_1 + y}{1 - x_1} - \frac{x_1^2 - 2x_1 + y}{x_1} = 3 - 2x_1 + \frac{y - 1}{1 - x_1} - \frac{y}{x_1}.$$

Multipliant les numérateurs et les dénominateurs des fractions

$\dfrac{1}{1-x_1}$, $\dfrac{1}{x_1}$ par $(1-x_2)(1-x_3)$, x_2x_3 et remarquant que

$$(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=y-1-\frac{q}{z}(y-1)=(y-1)\left(1-\frac{q}{z}\right),$$

$$x_1x_2x_3=\frac{q}{z}(y-1),$$

nous avons

$$m_1\mathrm{D}=3-2x_1+\frac{x_1^2-x_1+y-1}{1-\dfrac{q}{z}}-\frac{y(x_1^2-2x_1+y)}{\dfrac{q}{z}(y-1)};$$

mais, d'après la théorie des équations,

$$\Sigma x_1^2=(\Sigma x_1)^2-2\Sigma x_1x_2=4-2y;$$

ainsi nous avons la formule (A)

$$(\mathrm{A})\qquad h\mathrm{D}=5+\frac{y-1}{1-\dfrac{q}{z}}-\frac{y^2}{\dfrac{q}{z}(y-1)}.$$

Le produit $m_3m_2\mathrm{D}^2$ est exprimé par

$$\frac{(2x_3-1)(2x_2-1)x_1^2}{(1-x_3)(1-x_2)}=\frac{(4x_1^2-6x_1+4y-3)x_1^2}{x_1^2-x_1+y-1}$$
$$=4x_1^2-(2x_1+1)+\frac{(2y-3)x_1+y-1}{x_1^2-x_1+y-1};$$

multipliant la fraction par $1-x_1$ et divisant par la même quantité, nous aurons au dénominateur

$$(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=(y-1)\left(1-\frac{q}{z}\right),$$

ainsi

$$m_2m_3\mathrm{D}^2=4x_1^2-(2x_1+1)+\frac{y-1+(y-2)x_1-(2y-3)x_1^2}{(y-1)\left(1-\dfrac{q}{z}\right)};$$

l'équation (B) de l'article précédent est

$$k\mathrm{D}^2=4(4-2y)-4-3+\frac{y-1+2(y-2)-(2y-3)(4-2y)}{(y-1)\left(1-\dfrac{q}{z}\right)},$$

$$k\mathrm{D}^2=9-8y+\frac{4y-7}{1-\dfrac{q}{z}}.$$

L'équation (C) est le résultat de la substitution de $t=\frac{1}{2}$, $t=1$ dans le premier membre de l'équation

$$t^3-2t^2+yt-\frac{q}{z}(y-1)=0=ft,$$

$$m_1m_2m_3D^3=\frac{x_1x_2x_3(2x_1-1)(2x_2-1)(2x_3-1)}{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)}=\frac{8f(0)f(\frac{1}{2})}{f(1)},$$

$$8f\left(\frac{1}{2}\right)=(1-2x_1)(1-2x_2)(1-2x_3)=4\left(1-2\frac{q}{z}\right)y+8\frac{q}{z}-3,$$

$$f(1)=(y-1)\left(1-\frac{q}{z}\right),\qquad f(0)=-\frac{q}{z}(y-1),$$

$$D^3=-\frac{q}{q-z}\left[4y\left(1-\frac{2q}{z}\right)+\frac{8q}{z}-3\right].$$

Chassant les dénominateurs, on trouve l'équation (C).

Nous avons posé l'équation

$$m_1q_0x_1(1-x_1)-2xx_1+xx_1^2=xF,$$

désignant par F une fonction symétrique des racines de l'équation $f(t)=0$. Divisant par $xx_1(1-x_1)$, on trouve

$$\frac{m_1q_0}{x}+\frac{x_1-2}{1-x_1}=\frac{F}{x_1(1-x_1)},$$

$$\frac{m_1q_0}{x}=1+\frac{1+F}{1-x_1}+\frac{F}{x_1},\qquad \frac{q_0}{x}=D,$$

$$\Sigma m_1D=3+(1F)\Sigma\frac{1}{1-x_1}+F\Sigma\frac{1}{x_1}.$$

Par la théorie des fonctions symétriques, nous avons

$$\Sigma m_1D=3+\frac{(1+F)z}{z-q}+\frac{Fyz}{q(y-1)};$$

mais nous avons pour $\Sigma m_1 D$ l'équation (A). Ainsi

$$3+\frac{(1+F)z}{z-q}+\frac{Fyz}{q(y-1)}=5+\frac{(y-1)}{z-q}-\frac{y^2z}{q(y-1)},$$

$$F\left[\frac{z}{z-q}+\frac{yz}{q(y-)}\right]=2+\frac{(y-2)z}{z-q}-\frac{y^2z}{q(y-1)},$$

$$\frac{Fz(yz-q)}{q(z-q)(y-1)}=\frac{yz-2q}{z-q}-\frac{y^2z}{q(y-1)}.$$

Il est facile de constater que $yz - q$ entre comme facteur dans le second membre de l'équation; chassant les dénominateurs et divisant par $yz - q$, on trouve

$$Fz = -2q(1-y) - zy.$$

Les équations (B), (C) donnent

$$4(2q-z)x^2y = (9q-4z)x^2 + z - q, \qquad z = x - x^3,$$
$$\begin{aligned} 4F(1-x^2)x^3 &= 8qx^2 - (9q-4z)x^2 - z + q \\ &= -qx^2 + 4x^2z - z + q. \end{aligned}$$

Pour $x = 1$, z s'annule; ainsi la seconde partie de l'équation est divisible par $1 - x$, ainsi que par $1 + x$. On a, après avoir divisé les deux membres de l'équation par $1 - x^2$,

$$4Fx^3 = q + \frac{(4x^2-1)z}{-x^2+1} = q + \frac{(4x^2-1)(x-x^3)}{-x^2+1} = q - x + 4x^3.$$

L'inconnue x_1 est déterminée par l'équation

$$(x - m_1q_0)x_1^2 + (m_1q_0 - 2x)x_1 = x + \frac{q-x}{4x^2},$$

dont le discriminant est

$$(m_1q_0 - 2x)^2 + 4(x - m_1q_0)\left(x + \frac{q-x}{4x^2}\right);$$

désignons-le par

$$\frac{R(x)}{4x^2}.$$

$R(x)$ étant un polynome du quatrième degré, on a

$$2(m_1q_0 - 2x)x_1 + m_1q_0 - 2x = \frac{1}{2x}\sqrt{R(x)}.$$

Si l'on introduit une variable u

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

on aura x_1 fonction doublement périodique de u.

SUR LES CONDITIONS QUI EXPRIMENT QU'UN SYSTÈME DE TROIS AXES EST TRIRECTANGLE;

PAR M. PAUL APPELL.

1. On donne, dans tous les traités de Géométrie analytique, les conditions nécessaires et suffisantes qui doivent exister entre les neuf cosinus des angles que forme un système de trois axes avec trois axes *rectangulaires*, pour que ce système de trois axes forme un trièdre trirectangle; mais il peut être utile de connaître les conditions nécessaires et suffisantes qui doivent exister entre les neuf cosinus des angles que fait un premier système de trois axes avec un second système, *non supposé rectangulaire*, pour que les deux systèmes forment des trièdres trirectangles ou pour que l'un d'eux forme un trièdre trirectangle.

Voici une solution sommaire de cette question, qui a été posée par M. Boussinesq.

2. Soient α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'' les cosinus des angles que font entre eux deux systèmes d'axes quelconques $Oxyz$ et $Ox_1y_1z_1$. Considérons un autre système d'axes auxiliaires OXYZ supposé rectangulaire, et soient

$$a,\ b,\ c;\quad a',\ b',\ c';\quad a'',\ b'',\ c''$$

les cosinus des angles des axes Ox, Oy, Oz avec OX, OY, OZ;

$$a_1,\ b_1,\ c_1;\quad a'_1,\ b'_1,\ c'_1;\quad a''_1,\ b''_1,\ c''_1$$

les cosinus des angles des axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 avec OX, OY, OZ.

On a, d'après des formules élémentaires,

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha\ = a\ a_1 + b\ b_1 + c\ c_1, \\ \beta\ = a\ a'_1 + b\ b'_1 + c\ c'_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \gamma'' = a'' a''_1 + b'' b''_1 + c'' c''_1. \end{array}\right.$$

On sait, d'autre part, que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

a une signification géométrique remarquable ; il est, en valeur absolue, égal au volume du parallélépipède ayant pour arêtes des segments de longueur 1 portés sur les axes Ox, Oy, Oz ; si l'on appelle Ox' la normale au plan yOz, on a

$$D = \pm \sin \widehat{yOz} \cos \widehat{xOx'}.$$

D'après cela, le déterminant D, qu'on nomme quelquefois sinus du trièdre $Oxyz$, est, en valeur absolue, moindre que l'unité, sauf dans le cas particulier où le trièdre $Oxyz$ est trirectangle : alors $D = \pm 1$.

Donc, pour exprimer, sous forme condensée, qu'un trièdre réel $Oxyz$ est trirectangle, il faut et il suffit que l'on écrive $D = \pm 1$.

Cela posé, si l'on appelle de même D_1 le sinus du trièdre $Ox_1y_1z_1$,

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a''_1 & b''_1 & c''_1 \end{vmatrix},$$

et si l'on pose

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix},$$

la règle de multiplication des déterminants donne, en vertu des relations (1),

$$(2) \qquad \Delta = DD_1.$$

Le déterminant Δ est donc, en valeur absolue, moindre que l'unité, excepté quand les deux trièdres $Oxyz$ et $Ox_1y_1z_1$ sont trirectangles : alors $\Delta = \pm 1$.

3. Pour que les deux trièdres réels $Oxyz$, $Ox_1y_1z_1$ soient trirectangles, il faut et il suffit que

$$(3) \qquad \Delta = \pm 1.$$

Cette condition montre que les six relations classiques

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,\\ &\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1,\\ &\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1,\\ &\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0,\\ &\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0,\\ &\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0, \end{aligned}\right.$$

qui ont lieu nécessairement quand les deux trièdres $Oxyz$ et $Ox_1y_1z_1$ sont trirectangles, sont suffisantes pour qu'il en soit ainsi ; car elles entraînent la condition $\Delta = \pm 1$.

4. Pour que le trièdre $Ox_1y_1z_1$ soit trirectangle, $Oxyz$ ne l'étant pas, il faut et il suffit que $D_1 = \pm 1$, c'est-à-dire, d'après (2),

$$(5) \qquad \Delta = \pm D.$$

Ainsi, il faut et il suffit, pour que $Ox_1y_1z_1$ soit trirectangle, que le déterminant Δ des neuf cosinus soit égal, en valeur absolue, au sinus du trièdre $Oxyz$.

Comme dans le cas précédent, cette condition est équivalente à plusieurs relations distinctes.

CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCE EN 1893 [1];

PAR M. AUDIBERT.

I. 1° La tangente à la courbe (c) au point x, y, z,

$$\frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{2t}=\frac{Z-z}{2t^2}$$

fait avec les axes les angles α, β, γ; on aura, d'après l'énoncé,

$$\cos\alpha=\frac{1}{2t^2+1}=x,$$

$$\cos\beta=\frac{2t}{2t^2+1}=y,$$

$$\cos\gamma=\frac{2t^2}{2t^2+1}=z,$$

x, y et z désignant les coordonnées d'un point du lieu. On en tire, par l'élimination de t,

$$x+z=1, \qquad y^2+2x^2=2x,$$

équations d'un cercle situé dans le plan $x+z=1$, de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ayant son centre au point $x=\frac{1}{2}$, $y=0$, $z=\frac{1}{2}$.

2° La normale principale est déterminée par l'intersection du plan osculateur

$$(X-x)2t^2-(Y-y)2t+Z-z=0,$$

avec le plan normal

$$X-x+(Y-y)2t+(Z-z)2t^2=0.$$

---

(1) *Voir* 3e série, t. XII, p. 462.

Son équation peut s'écrire

$$\frac{X-x}{1} = \frac{2t(Y-y)}{2t^2-1} = \frac{Z-z}{-1}.$$

On aura, comme dans le cas précédent,

$$\cos\alpha = \frac{2t}{2t^2+1} = x,$$

$$\cos\beta = \frac{2t^2-1}{2t^2+1} = y,$$

$$\cos\gamma = \frac{-2t}{2t^2+1} = z,$$

d'où les deux équations

$$x+z=0, \qquad y^2+2x^2=1,$$

qui représentent un cercle de rayon 1, dans le plan $x+z=0$, et dont le centre est à l'origine.

3° La perpendiculaire au plan osculateur, ou binormale au point x, y, z de la courbe (c), a pour équation

$$\frac{X-x}{2t^2} = \frac{Y-y}{-2t} = \frac{Z-z}{1}.$$

On aura encore

$$\cos\alpha = \frac{2t^2}{2t^2+1} = x,$$

$$\cos\beta = \frac{-2t}{2t^2+1} = y,$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{2t^2+1} = z,$$

et l'élimination de t donne, comme dans le premier cas,

$$x+z=1, \qquad y^2+2x^2=2x.$$

II. Une des bissectrices de l'angle formé par la tangente et la binormale au point x, y, z de (c),

$$Y=y, \qquad Z=X+z-x,$$

fait avec les axes les angles fixes $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$.

L'équation de la surface cylindrique qu'elle forme en s'appuyant sur (c) s'obtiendra en éliminant x, y et z entre ses équations et celles de la courbe (c),

$$3y = x^2, \qquad 9z = 2xy.$$

La résultante est

$$Y(2y-9)^2 = 27(Z-X)^2.$$

L'équation de la projection sur le plan des XY de la section de cette surface par le plan $Z + X = a$ sera

$$(1) \qquad Y(2y-9)^2 = 27(a-2X)^2.$$

Rapportons cette courbe à deux axes situés dans son plan $Z + X = a$, l'axe des abscisses étant la trace de ce plan sur les XZ, celui des ordonnées la perpendiculaire à cette trace élevée au point où la bissectrice de l'angle des XZ la rencontre.

Soient ξ et η les nouvelles coordonnées, les formules de transformation

$$X = \frac{a}{2} - \frac{\xi}{\sqrt{2}}, \qquad Y = \eta,$$

introduites dans (1), donneront l'équation de la section droite

$$\eta(2\eta - 9)^2 = 54\xi^2.$$

Cette courbe située dans la région des ordonnées positives est symétrique par rapport à l'axe des η; elle est tangente à l'origine à l'axe des ξ. Au point $\xi = 0$, $\eta = \frac{9}{2}$, elle a un nœud où se croisent deux branches allant à l'infini. Les deux tangentes ont au nœud les coefficients angulaires $\pm\sqrt{3}$.

III. Le plan contenant à la fois la binormale et la tangente au point x, y, z de la courbe (c) est représenté par l'équation

$$t(4t^2+2)(X-x)+(4t^4-1)(Y-y) \\ -t(4t^2+2)(Z-z)=0,$$

qui devient, en remplaçant x, y et z par leurs valeurs en t,

$$2tX+(2t^2-1)Y-2tZ-t^2(2t^2+3)=0.$$

Soit donné un point fixe $(t=a)$ sur la courbe (c); écrivons que ce point est sur le plan, nous aurons la condition

$$6at+3a^2(2t^2-1)-4a^3t-t^2(2t^2+3)=0$$

ou

$$(t-a)^2(2t^2+4at+3)=0.$$

Le second facteur du premier membre égalé à zéro donnera deux valeurs de t (autres que a) qui annuleront cette équation. On en conclut que d'un point quelconque $(t=a)$ de la courbe (c) on peut mener deux plans remplissant les conditions de l'énoncé. Pour que ces plans soient réels, il faudra avoir $a^2>\frac{3}{2}$.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS;

PAR M. AURIC.

---

1. Soit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$(1)\qquad \frac{d^ny}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+p_{n-1}\frac{dy}{dx}+p_ny=0.$$

Soient m_1, m_2, ..., m_n les racines de l'équation caractéristique. On donne, en général, comme solution générale de l'équation (1)

$$(2) \qquad y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \ldots + c_n e^{m_n x}.$$

Cette façon de s'exprimer donne lieu, suivant nous, à de nombreuses objections.

1° En général, ce sont les coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_n$ qui sont donnés et connus et non les racines $m_1, m_2, \ldots, m_n$; la solution devrait donc être donnée en fonction des coefficients p.

2° En général, ce sont les conditions initiales qu'on se donne arbitrairement; il en résulte que les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, étant des fonctions bien déterminées de ces conditions initiales, ne sont plus absolument arbitraires.

3° La solution devant être fonction des coefficients p, en d'autres termes des données mêmes de la question, doit être une fonction symétrique des racines, ce qui ne peut avoir lieu que si les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont elles-mêmes des fonctions particulières de ces racines.

En résumé, la solution (2) est plutôt une solution symbolique qu'une véritable solution pratique.

Dans notre thèse (Chap. VIII), nous sommes arrivé au résultat suivant.

Considérons la fraction

$$\frac{\left\{\begin{array}{r} y_0 + \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + p_1 y_0\right] x + \left[\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + p_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + p_2 y_0\right] x^2 + \ldots \\ + \left[\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0 + \ldots + p_{n-1} y_0\right] x^{n-1} \end{array}\right\}}{1 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n},$$

et admettons que cette fraction développée soit

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

la solution générale de l'équation (1) prend la forme

$$(3) \qquad y = a_0 + a_1 \frac{x}{1} + a_2 \frac{x^2}{1.2} + a_3 \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

solution susceptible d'applications immédiates, car, ainsi que nous allons le montrer, la série obtenue est toujours convergente.

2. *Remarque.* — Si une série

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

est convergente pour la valeur $x_0 \neq 0$ de x, je dis que la série

$$a_0 + a_1 \frac{x}{1} + a_2 \frac{x^2}{1.2} + a_3 \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

est convergente pour toute valeur de x.

En effet, la série

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + \dots$$

étant convergente, on a nécessairement

$$a_n x_0^n \leqq \mathrm{M};$$

on aura donc, en valeur absolue,

$$a_n \frac{x^n}{1.2.3\dots n} \leqq \mathrm{M} \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^n}{1.2.3\dots n},$$

d'où l'on voit que la série

$$a_0 + a_1 \frac{x}{1} + a_2 \frac{x^2}{1.2} + \dots$$

a chacun de ses termes plus petits en valeur absolue que ceux de la série toujours convergente

$$\mathrm{M} e^{\frac{x}{x_0}} = \mathrm{M} + \mathrm{M} \frac{\frac{x}{x_0}}{1} + \mathrm{M} \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}{1.2} + \dots:$$

donc cette série est également toujours convergente.

3. Si maintenant nous considérons la fonction

$$\frac{U}{1+p_1x+p_nx_n}$$

U étant un polynome entier de degré $(n-1)$ en x, et si ρ est le module minimum des racines de l'équation

$$1+p_1x+\ldots+p_nx^n=0,$$

cette fonction sera holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon ρ; on pourra donc lui appliquer le théorème de Taylor; en d'autres termes, le quotient développé sera une série convergente pour toute valeur de x inférieure à ρ.

Il en résulte que le procédé indiqué plus haut est toujours applicable.

4. *Applications.* — 1° L'équation caractéristique a une seule racine réelle,

$$\frac{dy}{dx}-ay=0.$$

Nous considérons la fraction

$$\frac{y_0}{1-ax}=y_0(1+ax+a^2x^2+\ldots)$$

et la solution est

$$(4)\qquad y_0\left(1+\frac{ax}{1}+\frac{a^2x^2}{1.2}+\ldots\right)=y_0e^{ax}.$$

2° L'équation caractéristique a deux racines imaginaires

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\rho\cos\theta\frac{dy}{dx}+\rho^2y=0.$$

Nous avons à développer la fraction

$$\frac{y_0+\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_0+p_1y_0\right]x}{1-2\rho x\cos\theta+\rho^2x^2}=\frac{y_0+\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_0-2\rho\cos\theta\, y_0\right]x}{1-2\rho x\cos\theta+\rho^2x^2}.$$

Or, en considérant le développement de $\frac{1}{1-\rho x e^{\theta i}}$, on trouve les deux formules

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1-\rho x\cos\theta}{1-2\rho x\cos\theta+\rho^2x^2} &= 1+\rho x\cos\theta+\rho^2x^2\cos2\theta+\rho^3x^3\cos3\theta+\ldots,\\ \frac{\rho x\sin\theta}{1-2\rho x\cos\theta+\rho^2x^2} &= \rho x\sin\theta+\rho^2x^2\sin2\theta+\rho^3x^3\sin3\theta+\ldots,\end{aligned}\right.$$

d'où l'on a la solution générale

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} y-y_0=\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{1}{\rho\sin\theta}&\left(\frac{\rho x}{1}\sin\theta+\frac{\rho^2x^2}{1.2}\sin2\theta\right.\\ &\left.\qquad+\frac{\rho^3x^3}{1.2.3}\sin3\theta+\ldots\right)\\ -y_0\frac{1}{\sin\theta}&\left(\frac{\rho^4x^4}{1.2}\sin\theta+\frac{\rho^3x^3}{1.2.3}\sin2\theta\right.\\ &\left.\qquad+\frac{\rho^4x^3}{1.2.3.4}\sin3\theta+\ldots\right).\end{aligned}\right.$$

3° Incidemment, remarquons que les séries (5) restent convergentes tant que $\operatorname{mod}(\rho x)<1$.

En effet, si on limite ces séries au $x^{\text{ième}}$ terme, les restes respectifs prennent la forme

$$\frac{\rho^{n+1}x^{n+1}[\cos(n+1)\theta+\rho x\cos(n+2)\theta]}{1-2\rho x\cos\theta+\rho^2x^2},$$
$$\frac{\rho^{n+1}x^{n+1}[\sin(n+1)\theta+\rho x\sin(n+2)\theta]}{1-2\rho x\cos\theta+\rho^2x^2},$$

et ces restes tendent vers zéro lorsque $\operatorname{mod}(\rho x)<1$; on en déduit la règle de convergence suivante:

Soit la série

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots;$$

si, à la limite, on a, soit

$$\lim a_n=\rho^n\cos n\theta,$$

soit

$$\lim a_n=\rho^n\sin n\theta,$$

la série sera convergente pour toute valeur de x de module inférieur à $\frac{1}{\rho}$.

Ce résultat peut être généralisé par la considération des sinus d'ordre supérieur.

4° Admettons que l'on connaisse les racines de l'équation caractéristique et, par suite, de l'équation aux inverses

$$1 + p_1 x + \ldots + p_n x^n = 0;$$

on décomposera en éléments simples la fraction

$$\frac{U}{1 + p_1 x + \ldots + p_n x^n},$$

et l'on obtiendra des fractions élémentaires de la forme

$$\frac{A}{1 - ax}, \quad \frac{A}{(1 - ax)^k},$$
$$\frac{Mx + N}{1 - 2\rho x \cos\theta + \rho^2 x^2}, \quad \frac{Mx + N}{(1 - 2\rho x \cos\theta + \rho^2 x^2)^k},$$

qui donneront chacune une portion de l'intégrale générale sous une forme relativement simple.

SUR LA DYNAMIQUE DU POINT;

Par M. ANDOYER.

1. Soit un point matériel M, de masse m, soumis à une force dérivant d'un potentiel U, tel que, v désignant sa vitesse, on ait

$$mv^2 = 2U.$$

Si F_n et F_b sont les projections de la force sur la normale principale et sur la binormale à la trajectoire, on a

$$F_b = 0, \qquad \frac{2U}{\rho} = F_n,$$

ρ désignant le rayon de courbure.

Imaginons maintenant que l'on oblige le même point à suivre la même courbe sous l'action d'une force dérivée d'un potentiel U' *fonction de* U, tel que, v' désignant la vitesse dans ce nouveau mouvement, on ait

$$mv'^2 = 2U'.$$

On aura aussi, en appelant F'_b et F'_n les quantités analogues à F_b et à F_n, et N la réaction de la courbe, dirigée nécessairement suivant la normale principale,

$$F'_b = F_b \frac{dU'}{dU} = 0, \qquad F'_n = F_n \frac{dU'}{dU} = \frac{2U'}{\rho} - N.$$

La force est dans le plan osculateur, de même que la réaction de la courbe.

Ces équations peuvent servir dans presque tous les cas à ramener la question de l'étude du mouvement d'un point sur une courbe fixe (la force étant assujettie à rester dans le plan osculateur) à l'étude du mouvement d'un point libre admettant cette courbe comme trajectoire. Cette question n'est pas sans intérêt : nous allons en donner plusieurs exemples.

1° Soient donnés

$$U' \quad \text{et} \quad N = \frac{f(v')}{\rho} = \frac{f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right)}{\rho}.$$

On a alors la relation

$$2U\frac{dU'}{dU} = 2U' - f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right),$$

$$U = e^{\displaystyle\int \frac{dU'}{U' - \frac{1}{2} f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right)}}.$$

Si en particulier $f(v')$ est une constante $2a$,

$$U = C(U' - a),$$

C étant une constante arbitraire.

Ce résultat est d'ailleurs très connu.

2° On donne

$$U' \quad \text{et} \quad N = F'_n f(v') = F'_n f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right).$$

On a donc

$$F'_n\left[1 + f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right)\right] = \frac{2U'}{\rho} = \frac{2U}{\rho}\frac{dU'}{dU}\left[1 + f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right)\right],$$

d'où

$$\frac{dU}{U} = \frac{dU'}{U'}\left[1 + f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right)\right],$$

$$U = U' e^{\int \frac{dU'}{U'} f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right)}.$$

Si en particulier $f(v')$ est une constante a, on a

$$U = C U'^{a+1},$$

C étant une constante arbitraire.

C'est encore un résultat connu; pour $a = -1$, il correspond à la théorie des brachistochrones.

3° On donne

$$U' \quad \text{et} \quad F'_n = \frac{f(v')}{\rho} = \frac{f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right)}{\rho};$$

alors

$$f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right) = 2U\frac{dU'}{dU},$$

$$U = e^{\int \frac{2\,dU'}{f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right)}}.$$

Si $f(v') = mv'^2$, on trouve, naturellement, $U = CU'$.

Ce cas rentre d'ailleurs dans le premier, puisque $N = \frac{2U' - f(v')}{\rho}$.

2. Le plus généralement U et U' seront fonctions de la distance à un plan, à un point ou à une droite, et s'il en est de même des diverses quantités qu'on peut se donner pour déterminer le mouvement, le problème sera susceptible de quelque extension.

Supposons d'abord U et U' fonctions de la distance à un plan, celui des xy. Le mouvement a lieu dans un plan parallèle à l'axe des z, que nous pouvons choisir pour le plan des xz.

En faisant $\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{mA}}$, A étant une constante arbitraire, la trajectoire est déterminée par

$$dx = \frac{dz}{\sqrt{UA - 1}};$$

le rayon de courbure est donné par

$$\rho = \frac{2(UA)^{\frac{3}{2}} dz}{d(UA)}.$$

On a aussi

$$F_n = \frac{dU}{dz\sqrt{UA}},$$

et, en appelant F_t la force tangentielle,

$$F_t = \frac{dU}{dz}\sqrt{1 - \frac{1}{UA}}.$$

Cela étant, supposons qu'on veuille déterminer la courbe dans le plan de zx, en se donnant en fonction de z :

1° U' et N. On aura

$$\frac{2U}{\rho}\frac{dU'}{dU} = \frac{2U'}{\rho} - N,$$

$$(\mathrm{UA})\,d\mathrm{U}'-\mathrm{U}'\,d(\mathrm{UA})+(\mathrm{UA})^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{N}\,dz=0,$$

$$\mathrm{UA}=\frac{\mathrm{U}'}{\left(\int\frac{\mathrm{N}\,dz}{2\sqrt{\mathrm{U}'}}\right)^2}$$

et

$$dx=\frac{dz\int\frac{\mathrm{N}\,dz}{2\sqrt{\mathrm{U}'}}}{\sqrt{\mathrm{U}'-\left(\int\frac{\mathrm{N}\,dz}{2\sqrt{\mathrm{U}'}}\right)^2}}.$$

Exemple (*a*) :

$$\mathrm{U}'=mg(z+h),\qquad \mathrm{N}=\lambda mg,$$

$$dx=\frac{dz\left(k+\lambda\sqrt{z+h}\right)}{\sqrt{(z+h)-\left(k+\lambda\sqrt{z+h}\right)^2}}.$$

Exemple (*b*) :

$$\mathrm{U}'=mgz,\qquad \mathrm{N}=\lambda mgz^n,$$

$$dx=\frac{dz\left(k+z^{n+\frac{1}{2}}\right)}{\sqrt{\frac{(2n+1)^2}{\lambda^2}z-\left(k+z^{n+\frac{1}{2}}\right)^2}}.$$

2° U′ et F'_n.

$$\mathrm{F}'_n=\frac{2\mathrm{U}}{\rho}\,\frac{d\mathrm{U}'}{d\mathrm{U}}=\frac{d\mathrm{U}'}{dz\sqrt{\mathrm{UA}}},$$

$$\mathrm{UA}=\left(\frac{d\mathrm{U}'}{dz}\right)^2\frac{1}{\mathrm{F}'^2_n},$$

$$dx=\frac{\mathrm{F}'_n\,dz}{\sqrt{\left(\frac{d\mathrm{U}'}{dz}\right)^2-\mathrm{F}'^2_n}}.$$

Exemple :

$$\mathrm{U}'=mgz,\qquad \mathrm{F}'_n=mg\lambda z^n,$$

$$dx=\frac{z^n\,dz}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-z^{2n}}}.$$

3° U' et F'_t. On en tire

$$F'_n = \sqrt{\left(\frac{dU'}{dz}\right)^2 - F'^2_t},$$

et l'on est ramené au cas précédent.

4° U' et la force centripète $F'_c = \frac{mv'^2}{\rho}$.

On a

$$F'_c = \frac{2U'}{\rho} = \frac{U'd(UA)}{(UA)^{\frac{3}{2}}dz},$$

$$UA = \frac{1}{\left(\int \frac{F'_c\,dz}{2U'}\right)^2},$$

$$dx = \frac{dz\int \frac{F'_c\,dz}{2U'}}{\sqrt{1-\left(\int \frac{F'_c\,dz}{2U'}\right)^2}}.$$

Exemple :

$$U' = mgz, \qquad F'_c = mg\lambda z^n,$$

$$dx = \frac{dz(z^n+k)}{\sqrt{\frac{4n^2}{\lambda^2} - (z^n+k)^2}}.$$

5° Connaissant U ou l'une quelconque des quantités qui peuvent déterminer U et U', calculer N.

$$N = \frac{2\left(U' - U\frac{dU'}{dU}\right)}{\rho} = \frac{U'd(UA) - (UA)\,dU'}{(UA)^{\frac{3}{2}}dz}.$$

Exemple. — La courbe est

$$x^2 = 2pz \qquad \text{et} \qquad U' = mpc^2\left(z + \frac{p}{2}\right).$$

On a d'abord

$$UA = \frac{2z}{p} + 1,$$

et, par suite,

$$N = 0.$$

6° Connaissant U et N, calculer U'.

$$\frac{2U}{\rho}\frac{dU'}{dU} = \frac{2U'}{\rho} - N,$$

$$(UA)\,dU' - U'd(UA) + N(UA)^{\frac{3}{2}}dz = 0,$$

$$U' = kUA - UA\int\frac{N\,dz}{\sqrt{UA}}.$$

Exemple. — La courbe est

$$z^2 = 2px \qquad \text{et} \qquad N = \lambda.$$

On a d'abord

$$UA = \frac{p^2}{z^2} + 1,$$

$$U' = k\left(\frac{p^2}{z^2} + 1\right) - \lambda z\left(\frac{p^2}{z^2} + 1\right)^{\frac{3}{2}}.$$

3. Supposons maintenant U et U' fonctions de la distance à un point. Soit l'origine ce point; la courbe est dans un plan que nous prendrons pour celui des xy, et, en coordonnées polaires, on aura

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2}{mA}}, \qquad d\theta = \frac{dr}{r\sqrt{r^2UA - 1}},$$

$$\rho = \frac{2(UA)^{\frac{3}{2}}r\,dr}{d(UA)},$$

$$F_n = \frac{dU}{r\,dr\sqrt{UA}}, \qquad F_t = \frac{dU}{dr}\sqrt{1 - \frac{1}{r^2UA}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Avec ces formules, on pourra traiter les mêmes problèmes que précédemment.

Il en sera de même si l'on suppose U et U' fonctions de la distance à une droite, l'axe des z, par exemple; faisant $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, on aura comme formules principales,

$$\frac{dz}{dt}=\sqrt{\frac{2A'}{m}},\quad r^2\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{\frac{2}{mA}},\quad d\theta=\frac{dr}{r\sqrt{r^2(U-A')A-1}},$$

$$\rho=\frac{2(UA)^{\frac{3}{2}}rdr}{d(UA)\sqrt{1+AA'r^2}}.$$

4. Imaginons maintenant que le point M se meuve sur une surface donnée sous l'action du potentiel U; soient F_n et F_g les projections de la force sur la normale à la surface et la normale à la courbe située dans le plan tangent; soient enfin ρ_g et R le rayon de courbure géodésique de la courbe et le rayon de courbure de la section normale correspondante, N la réaction; on a

$$mv^2=2U,\qquad \frac{2U}{\rho_g}=F_g,\qquad \frac{2U}{R}=F_n+N.$$

Si l'on oblige le même point à suivre la même courbe sous l'action d'une force dérivée du potentiel U', fonction de U, on aura, en appelant v', F'_g et F'_n les quantités analogues à v, F_g et F_n, et désignant par N'_g et N'_n les projections correspondantes de la réaction N',

$$\begin{gathered}mv'^2=2U',\\ \frac{2U'}{\rho_g}-N'_g=F'_g=F_g\frac{dU'}{dU},\\ \frac{2U'}{R}-N'_n=F'_n=F_n\frac{dU'}{dU},\end{gathered}$$

et ces équations permettront de résoudre des questions tout à fait semblables à celles qui ont été résolues plus haut. Les deux premières applications subsistent pour ainsi dire sans modifications. Pour aller plus loin, nous donnerons les formules principales qu'il y aura lieu d'employer dans les cas les plus fréquents.

1° U et U' sont fonctions de z. La surface est de révolution et a pour équation $z = f(r)$.

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2}{mA}}, \qquad d\theta = \frac{dr\sqrt{1+f'^2}}{r\sqrt{r^2UA-1}},$$

$$N = \frac{dU}{dz}\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} - \frac{2Uf'}{r\sqrt{1+f'^2}} - \frac{2}{Ar}(r^2UA-1)\frac{d}{dr}\left(\frac{f'}{r\sqrt{1+f'^2}}\right),$$

$$F_n = -\frac{dU}{dz}\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}, \qquad F_g = \frac{dU}{dz}\frac{f'}{\sqrt{UA}\,r\sqrt{1+f'^2}},$$

$$F_t = \frac{dU}{dz}\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\sqrt{1-\frac{1}{r^2UA}},$$

$$\rho_g = \frac{2(UA)^{\frac{3}{2}}r\,dz\sqrt{1+f'^2}}{f'd(UA)},$$

$$R = \frac{UA}{-\frac{1}{r}(r^2UA-1)\frac{d}{dr}\left(\frac{f'}{r\sqrt{1+f'^2}}\right) - UA\frac{f'}{r\sqrt{1+f'^2}}}.$$

Exemple. — Sur le paraboloïde $z = \frac{r^2}{2p}$, on suppose $U' = mg(z+h)$; en outre, la projection de N' sur Oz est $-mg$, de sorte que le point est animé dans le sens de Oz d'un mouvement uniforme. On trouve

$$\frac{1}{UA} = 2pz - kp\frac{2z+p}{z+h}$$

et, par suite,

$$d\theta = \frac{dr}{pr\sqrt{2kp}}\sqrt{r^2(r^2+2ph) - 2kp(r^2+p^2)}.$$

Il est clair, d'ailleurs, que le problème est plus facile à traiter directement que de cette façon.

2° U et U' sont fonctions de la distance à un point $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$; la surface est de révolution et a pour équation $z = f(r)$.

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2}{mA}}, \qquad d\theta = \frac{dr\sqrt{1+f'^2}}{r\sqrt{r^2UA-1}},$$

$$N = \frac{dU}{dR}\frac{z-rf'}{R\sqrt{1+f'^2}} - \frac{2Uf'}{r\sqrt{1+f'^2}} - \frac{2(r^2UA-1)}{Ar}\frac{d}{dr}\left(\frac{f'}{r\sqrt{1+f'^2}}\right),$$

$$F_n = \frac{dU}{dR}\,\frac{rf' - z}{R\sqrt{1+f'^2}}, \qquad F_g = \frac{dU}{dR}\,\frac{r + zf'}{\sqrt{UA}\,R r\sqrt{1+f'^2}},$$

$$F_t = \frac{dU}{dR}\,\frac{(r+zf')\sqrt{1-\dfrac{1}{r^2UA}}}{R\sqrt{1+f'^2}},$$

$$\rho_g = \frac{2(UA)^{\frac{3}{2}} R r\, dR\sqrt{1+f'^2}}{(r+zf')\,d(UA)},$$

$$R = \frac{UA}{-\dfrac{1}{r}(r^2UA-1)\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{f'}{r\sqrt{1+f'^2}}\right) - UA\,\dfrac{f'}{r\sqrt{1+f'^2}}}.$$

3° U et U′ sont fonctions de la distance à une droite r; la surface est un hélicoïde.

$z = f(r) + h\theta$ (pour $h = 0$, la surface est de révolution).

$$r^2\frac{d\theta}{dt} + h\frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{2}{mA}},$$

$$\frac{d\theta}{dr} = -\frac{hf'}{r^2+h^2} + \frac{1}{r^2+h^2}\sqrt{\frac{(1+f'^2)r^2+h^2}{UA(r^2+h^2)-1}},$$

$$N = \frac{dU}{dr}\,\frac{rf'}{\sqrt{h^2+(1+f'^2)r^2}}$$
$$- \frac{4h\sqrt{UA(r^2+h^2)-1}}{A(r^2+h^2)^2} + \frac{2Ur^2f'}{(r^2+h^2)\sqrt{(1+f'^2)r^2+h^2}}$$
$$+ \frac{2[UA(r^2+h^2)-1]}{Ar}\,\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2f'}{(r^2+h^2)\sqrt{(1+f'^2)r^2+h^2}}\right],$$

$$F_n = -\frac{dU}{dr}\,\frac{rf'}{\sqrt{h^2+(1+f'^2)r^2}},$$

$$F_g = \frac{dU}{dr}\,\frac{1}{\sqrt{UA}\sqrt{h^2+(1+f'^2)r^2}},$$

$$F_t = \frac{\dfrac{dU}{dr}\sqrt{h^2+r^2-\dfrac{1}{UA}}}{\sqrt{h^2+(1+f'^2)r^2}},$$

$$\rho_g = \frac{2(UA)^{\frac{3}{2}}\,dr\sqrt{h^2+(1+f'^2)r^2}}{d(UA)},$$

$$R = \frac{\mathrm{UA}}{\left\{\begin{array}{l}\dfrac{-2h\sqrt{\mathrm{UA}(r^2+h^2)-1}}{(r^2+h^2)^2} + \mathrm{UA}\,\dfrac{r^2 f'}{(r^2+h^2)\sqrt{(1+f'^2)r^2+h^2}} \\ + \dfrac{[\mathrm{UA}(r^2+h^2)-1]}{r}\,\dfrac{d}{dr}\left[\dfrac{r^2 f'}{(r^2+h^2)\sqrt{(1+f'^2)r^2+h^2}}\right]\end{array}\right\}}.$$

Il est clair que les formules qui précèdent peuvent encore servir à résoudre quantité de problèmes sur le mouvement d'un point matériel assujetti ou non à rester sur une surface donnée.

5. Il est de même intéressant de ramener les courbes tautochrones à des trajectoires libres d'un point matériel.

Si U' est le potentiel s'annulant au point de tautochronisme, et si T est le temps constant pour arriver à ce point, on a, en appelant s l'arc de la courbe compté à partir du point de tautochronisme,

$$\frac{dU'}{ds} + \frac{\pi^2 m}{4T^2} s = 0,$$

d'où

$$U' + \frac{\pi^2 m}{8T^2} s^2 = 0$$

et

$$dU'^2 + \frac{\pi^2 m}{2T^2} U'\, ds^2 = 0.$$

Supposons d'abord le point libre et la force assujettie à rester dans le plan osculateur; si d'abord U' est fonction de z, la courbe est dans le plan des xz par exemple, et l'on a

$$dx = dz\sqrt{-1 - \frac{2T^2}{\pi^2 m\, U'}\frac{dU'^2}{dz^2}}.$$

Le potentiel U sous l'action duquel le même point décrirait librement la même courbe est déterminé par

$$\mathrm{UA} = \frac{\dfrac{2T^2}{\pi^2 m\, U'}\left(\dfrac{dU'}{dz}\right)^2}{1 + \dfrac{2T^2}{\pi^2 m\, U'}\left(\dfrac{dU'}{dz}\right)^2}.$$

Inversement, on peut en déduire U′ en fonction de UA.

Exemple :

$$U' = mgz,$$

$$UA = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 z}{2T^2 g}},$$

$$dx = dz\sqrt{\frac{-z}{\frac{2T^2 g}{\pi^2} + z}}.$$

Soit maintenant U′ fonction de la distance à un point; la courbe est dans le plan des xy par exemple, et l'on a

$$d\theta = \frac{dr\sqrt{-1 - \frac{2T^2}{\pi^2 m U'}\frac{dU'^2}{dr^2}}}{r}.$$

On en déduit

$$UA = \frac{\frac{1}{r^2}\frac{2T^2}{\pi^2 m U'}\frac{dU'^2}{dr^2}}{1 + \frac{2T^2}{\pi^2 m U'}\frac{dU'^2}{dr^2}}.$$

Exemple :

$$U' = \frac{m\lambda}{r}(a^2 - r^2),$$

$$UA = \frac{1}{r^2 + \frac{\pi^2}{4\lambda T^2}(a^2 - r^2)},$$

$$d\theta = \frac{dr}{r}\sqrt{\frac{\frac{4\lambda T^2}{\pi^2}r^2 - r^2 + a^2}{r^2 - a^2}}.$$

Enfin imaginons que U′ est fonction de r; on aura d'abord, d'après la condition que la force est dans le plan osculateur,

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{dz}{C} \qquad \text{puis} \qquad d\theta = \frac{dr}{r}\sqrt{\frac{-1 - \frac{2T^2}{\pi^2 m U'}\frac{dU'^2}{dr^2}}{1 + C^2 r^2}},$$

d'où

$$(U - A')A = \frac{-C^2 + \frac{1}{r^2}\frac{2T^2}{\pi^2 m U'}\frac{dU'^2}{dr^2}}{1 + \frac{2T^2}{\pi^2 m U'}\frac{dU'^2}{dr^2}}.$$

De même, sur l'hélicoïde $z = f(r) + h\theta$, avec U' fonction de r, on aura

$$\frac{d\theta}{dr} = -\frac{hf'}{r^2+h^2} + \frac{1}{r^2+h^2}\sqrt{-[(1+f'^2)r^2+h^2]-(r^2+h^2)\frac{2\mathrm{T}^2}{\pi^2 m \mathrm{U}'}\frac{d\mathrm{U}'^2}{dr^2}}.$$

Sur une surface de révolution $z = f(r)$, on aura

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{r}\sqrt{-(1+f'^2)-\frac{2\mathrm{T}^2}{\pi^2 m \mathrm{U}'}\frac{d\mathrm{U}'^2}{dr^2}},$$

et l'on pourra aussi bien supposer U' fonction de z et R, à cause de l'équation de la surface qui permet toujours d'exprimer $\frac{d\mathrm{U}'}{dr}$ en fonction de r.

De ces formules, on tirerait facilement les valeurs correspondantes de UA. Si, par exemple, la surface est de révolution et U' fonction de r, on a

$$\mathrm{UA} = \frac{\frac{1}{r^2}\frac{2\mathrm{T}^2}{\pi^2 m \mathrm{U}'}\frac{d\mathrm{U}'^2}{dr^2}}{1+f'^2+\frac{2\mathrm{T}^2}{\pi^2 m \mathrm{U}'}\frac{d\mathrm{U}'^2}{dr^2}}.$$

Exemple. — Déterminer une surface de révolution telle que la ligne géodésique tangente en A au parallèle du rayon p soit tautochrone en A pour la force

$$-m(ar+b)$$

(Agrégation, 1885).

Ici

$$\mathrm{UA} = \frac{1}{p^2}, \qquad \mathrm{U}' = m\left[\frac{a}{r}(p^2-r^2)+b(p-r)\right],$$

et, en faisant

$$a = \frac{\pi^2}{4\mathrm{T}^2}\alpha, \qquad b = \frac{\pi^2}{4\mathrm{T}^2}\beta,$$

on a

$$f'^2 = \frac{\alpha(\alpha-1)r^3+(\alpha-1)(p\alpha+2\beta)r^2+(2p\alpha+\beta)\beta r+p\beta^2}{r^2(\alpha r+\alpha p+2\beta)}.$$

Remarque. — Il y a une différence essentielle entre les problèmes traités dans le premier paragraphe et ceux qui suivent : pour ceux-ci, en effet, c'est la quantité UA et non U qui joue le rôle prépondérant. Il est inutile d'insister sur les conséquences immédiates qui résultent de ce fait.

AUGUSTE COMTE EXAMINATEUR D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE;

PAR M. PIERRE LAFFITE,
Professeur au Collège de France.

Auguste Comte fut nommé, pour la première fois, examinateur d'admission à l'École Polytechnique en 1837, et il occupa cette position jusqu'en 1843; il remplit donc la fonction pendant sept années consécutives. Jamais nomination ne fut mieux méritée. Auguste Comte était un ancien élève, et des plus brillants, de l'École Polytechnique. Il n'avait eu aucune réparation pour le licenciement de l'École, au mois d'avril 1816, comme cela était arrivé à plusieurs de ses camarades de l'École Polytechnique, notamment M. Lamé, nommé professeur de Physique à son retour de Russie. En outre, Auguste Comte avait vécu, depuis 1816, de l'enseignement privé mathématique, principalement de la préparation à l'École Polytechnique. Parmi ceux qu'il avait préparés pour cette école, et qu'il y avait fait recevoir, était La Moricière, qui devint plus tard le célèbre général d'Afrique. Auguste Comte avait été introduit, en 1832, comme répétiteur d'Analyse et de Mécanique, à l'École Polytechnique, par M. Navier. La fermeté du caractère d'Auguste Comte, sa bonté et sa scrupuleuse probité, à qui tout le monde se plaisait à rendre justice, montraient assez qu'il remplissait aussi bien les conditions morales que les conditions mentales d'une telle fonction. J'ai entendu mon professeur de Physique au collège Charlemagne, M. E. Bary, me dire, ainsi qu'à plusieurs de mes camarades, en 1841, à propos d'Auguste Comte : « C'est un

Romain ». Enfin, il remplissait les conditions d'âge, qu'on oublie trop souvent de nos jours; car il avait, en 1837, 39 ans. L'homme était donc parfaitement choisi pour la fonction. Auguste Comte la désirait, et l'influence de Dulong la lui fit obtenir.

M. Dulong était directeur des études à l'École Polytechnique; il a toujours montré à Auguste Comte une considération particulière. En 1835, M. Dinet, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, n'ayant pu faire sa tournée à cause d'un accident, il fallut le remplacer immédiatement. M. Comte demanda la position, mais il s'y était pris trop tard. M. Duhamel fut nommé, et M. Dulong exprima à Auguste Comte tout son regret d'un tel contretemps (1).

M. Dulong avait pris bonne note du désir d'Auguste Comte d'arriver à la position d'examinateur d'admission à l'École Polytechnique, et, la place étant devenue vacante par l'élimination de Reynaud, Dulong prévint immédiatement Auguste Comte, et celui-ci remplaça Reynaud, qui lui abandonna la totalité de son traitement, à savoir 4000fr (2). Ces fonctions, si importantes et si difficiles, d'examinateur d'admission à l'École Polytechnique étaient rétribuées de la manière la plus modeste. Le traitement était de 3000fr, plus les frais de déplacement; mais on pouvait cumuler ces fonctions avec d'autres, et c'est ce que fit Auguste Comte, qui était à la fois répétiteur à l'École Polytechnique et examinateur d'admission. En outre, il n'avait pas renoncé à l'enseignement libre, et il faisait un Cours d'Algèbre supérieure et de Géométrie analytique dans l'école préparatoire de M. Laville. Cette institution, qui est devenue un couvent, forme le coin de la rue Méchain et de la rue du Faubourg-Saint-Jacques, faisant face à la fois au jardin de l'Observatoire et à l'hôpital Cochin.

Dulong, qui avait un très noble caractère, outre sa haute valeur scientifique, aida, comme Navier, Auguste Comte dans ses efforts pour se créer, à l'École Polytechnique, une position honorable qui, en lui assurant la vie matérielle, lui permît de poursuivre sa haute carrière philosophique : aussi je consacrerai à Dulong une place parmi les protecteurs d'Auguste

---

(1) *Voir* aux Notes justificatives la lettre de Dulong du 14 juillet 1835.

(2) *Voir* aux Pièces justificatives la lettre de Dulong à Auguste Comte du 12 juillet 1837.

Comte. Le monument élevé à Dulong par les élèves de l'École Polytechnique est au Père-Lachaise, non loin de celui que les médecins ont élevé au grand Bichat.

Auguste Comte succédait au baron Reynaud, dans des circonstances spéciales, qui firent prendre une mesure que l'on peut qualifier de directement absurde. On décida qu'à partir de cette époque les nouveaux examinateurs seraient soumis à une réélection annuelle. On supprima ainsi l'inamovibilité tacite d'une telle fonction. Or, il est de toute évidence que l'inamovibilité est absolument nécessaire dans une fonction de cette nature. Cette mesure révolutionnaire cachait, comme d'habitude, une véritable lâcheté. Craignant d'être obligé de punir des prévarications constatées ou supçonnées, on se cachait ainsi derrière une formalité. En fait, elle resta, pour Auguste Comte, une formalité effective, jusqu'au jour où, sous l'influence d'Arago, voulant venger sa vanité outragée, on l'appliqua à Auguste Comte lui-même, et on lui fit perdre, en 1844, en violant toutes les lois de la justice et de la moralité, une fonction qu'il avait toujours si dignement remplie.

Il est bon de donner quelques idées du système d'examen d'admission à l'École Polytechnique. Les examinateurs étaient au nombre de quatre, formant deux séries. Auguste Comte, à cette époque, formait l'une, avec Bourdon; Lefébure de Fourcy et Dinet formaient l'autre. A Paris, l'on tirait au sort les élèves qui devaient appartenir à l'une ou l'autre de ces séries. Tout élève qui tombait dans la série Comte et Bourdon subissait un examen séparé et distinct sous chacun de ces deux examinateurs, et il en était de même pour les élèves que le sort avait désignés pour l'autre série. Puis, le reste de la France était partagé en deux sections, l'Est et l'Ouest, dans lesquelles étaient fixées à l'avance les villes qui devaient servir de lieux d'examen. On les désignait sous le nom de *tournée* de l'Est et *tournée* de l'Ouest. Par exemple, si la série Comte et Bourdon avait la série de l'Ouest, la tournée de l'Est appartenait à la série Lefébure et Dinet. Chaque examinateur formait sa liste d'élèves par ordre de mérite, contenant les admissibles et les inadmissibles; tous les admissibles, bien entendu, n'étaient pas admis, le nombre des élèves qui devaient entrer à l'École étant fixé à l'avance par le Ministre de la Guerre, de qui dépendait et dépend encore l'École Polytechnique. Chaque élève se trouvait ainsi sur deux listes d'examinateur, suivant la série à laquelle il appartenait. Cela a été une heureuse inspiration d'avoir fait dépendre l'École Polytechnique d'un Ministre purement pratique ; mais ç'a été une véritable rétrogradation d'y avoir introduit indirectement l'Université, en exigeant des candidats l'examen du baccalauréat ; ce qui faisait rentrer la métaphysique, d'abord si sagement exclue. Je crois que c'est sous le *second Empire* que cette déplorable mesure a été prise ; l'heureuse influence d'Arago l'avait fait jusque-là échouer.

Outre ces examens oraux, qui étaient, du reste, la partie essentielle de l'examen à l'École Polytechnique, il y avait un examen écrit, ou, suivant l'expression consacrée, des compositions écrites. Elles se composaient d'une épure de Géométrie descriptive, d'un dessin, du calcul d'un triangle rectiligne, d'un discours français et d'une version latine. Tous les candidats de Paris composaient ensemble et traitaient les mêmes questions. Pour la province, on procédait de la manière suivante : les deux examinateurs recevaient dans la ville d'examen, où ils devaient être rendus à une époque déterminée, sous pli cacheté, les questions de la composition écrite. Ils brisaient les cachets devant les élèves, donnaient connaissance de la composition et présidaient à son exécution. Ces diverses compositions, il est bon de l'indiquer, étaient jugées par des examinateurs spéciaux ; la composition latine et française, par un professeur de Lettres. Auguste Comte m'a raconté à ce sujet une anecdote assez piquante. Dans une ville de province, à Montpellier, je crois, il lut aux élèves le sujet de la composition française ; il consistait à décrire les émotions éprouvées par les spectateurs en voyant élever l'obélisque de Louqsor sur la place de la Concorde. Après avoir donné lecture du sujet de la composition, Auguste Comte ajouta gravement : « Je vous avertis, Messieurs, que je ne fais que transmettre la question, et que je ne suis pour rien dans son choix. » Le fait est qu'il était caractéristique : donner à des jeunes gens de Montpellier, qui n'étaient jamais venus à Paris, qui n'avaient vu, ni l'obélisque, ni son érection, à décrire les émotions éprouvées devant un tel phénomène, c'est vraiment abuser un peu du droit littéraire d'écrire sur ce que l'on n'a ni vu ni senti.

Enfin, les examinateurs revenus à Paris en octobre formaient, sous la présidence du général de l'École, je crois, une Commission qui, au moyen des quatre listes et des notes relatives aux compositions écrites, formait la liste unique des élèves admissibles à l'École Polytechnique. Sur cette liste, le Ministre de la Guerre choisissait les premiers, jusqu'au nombre qu'exigeaient les services publics. Ce nombre oscillait, sous Louis-Philippe, entre 135 et 145 élèves. La force de l'École consistait précisément dans la disproportion entre le petit nombre des élèves admis et le grand nombre des candidats qui se présentaient. Sous Louis-Philippe, le nombre des candidats a toujours oscillé entre 500 et 700; je ne crois pas m'éloigner beaucoup de la réalité, quoique je n'aie pas fait à cet égard de relevé précis.

Les matières sur lesquelles les élèves devaient être examinés étaient : l'Arithmétique, la Géométrie élémentaire, la Trigonométrie, la Géométrie descriptive, réduite essentiellement au point, à la ligne droite et au plan, la Géométrie analytique à deux et trois dimensions, l'Algèbre élémentaire et supérieure, et enfin la Statique. Le programme semble peu étendu, mais les questions étaient profondément creusées, et c'est là l'essentiel, car cela constituait une admirable gymnastique, ce qu'on oublie trop de nos jours. D'après l'opinion d'Auguste Comte, la préparation à l'École formait la partie essentielle de tout l'enseignement polytechnique. Il y avait là une gymnastique vraiment remarquable que rien ne peut réellement remplacer. Enfin les divers sujets traités dans la composition écrite, comme dans les examens oraux, avaient chacun un coefficient qui marquait sa valeur relative aux yeux du gouvernement et de la direction de l'École.

Voyons maintenant la manière dont Auguste Comte avait organisé son système d'examens. Et d'abord, quelques notions sur les conditions matérielles. L'examen était toujours public. L'assistance, outre quelques curieux, se composait de candidats et de professeurs de Mathématiques. En 1837, le nombre des candidats qu'Auguste Comte examina effectivement à Paris fut de 134. Il commença les examens le mercredi, 26 juillet, et les termina le 25 août. Il y eut examen tous les jours, sans discontinuité, y compris les dimanches. Il n'y eut interruption que pour deux jours, le samedi 29 juillet, qui était fête nationale sous Louis-Philippe, et le 15 août, jour de l'Assomption, qui est toujours spontanément fêté à Paris, vu le grand nombre de femmes qui portent le nom de Marie. Auguste Comte examina donc 134 candidats dans l'espace de 29 jours. Les examens commençaient habituellement entre 9^h et $9^h 30^m$, et se terminaient entre 5^h et $5^h 30^m$. Auguste Comte examinait habituellement 4 candidats par jour; quelquefois 5, mais exceptionnellement. La durée de chaque examen dépendait de la valeur du candidat : de une heure et demie à deux heures pour les forts; de une heure environ pour les moyens; elle n'était guère que d'une demi-heure, et parfois moins encore, pour ceux qui n'avaient aucune chance de succès.

Comme le but final était le classement des candidats, suivant l'ordre de mérite constaté, il était nécessaire d'avoir des signes, pour représenter les mérites relatifs et avoir la possibilité de voir immédiatement la place de l'élève dans la série. Le procédé habituel consiste, comme on sait, à employer des chiffres. On prend, pour représenter la valeur de chaque question, tous les nombres compris entre zéro et vingt. On a ainsi le chiffre qui représente, du moins on le croit, la valeur de chaque question; l'on fait la somme et l'on prend la moyenne, ce qui donne la valeur de l'élève, numériquement représentée. Cette méthode a une apparence de rigueur numérique qui peut séduire; mais cette rigueur même empêche de bien se représenter toutes ces nuances délicates, par lesquelles la valeur effective des intelligences peut être vraiment appréciée. Elle dispose trop à une sorte de procédé mécanique, et doit exposer à des erreurs considérables dans le jugement, surtout des intelligences d'élite. Auguste Comte employait un procédé tout à fait différent qu'il est bon d'exposer. Il avait des signes généraux de classification, au moyen desquels les élèves étaient disposés dans six catégories successives, représentant l'ordre décroissant de mérite. Voici les signes de ces six catégories : $++$, $+$, $\pm$, $\mp$, $-$, $--$. L'un de ses signes était placé immédiatement après l'examen de chaque candidat, au bas de la page et à côté de l'appréciation générale qui terminait cet examen. Ainsi, par exemple, dans les deux examens que j'ai déjà publiés, M. Édouard Hardy porte, à la fin de son examen, le signe $++$ et M. de Noé (Cham) le signe $--$. Mais ces catégories étaient elles-mêmes partagées en catégories successives, représentées par des signes grecs que je vais indiquer :

++, ιθ, ιη, ιϑ, ιΣ, ιε, ιδ.
+, ιφ, ιϐ,
±, ια,
∓, ια,
—, ι, θ, η, ϑ, Σ,
——, ε, δ, γ, β, α.

Ces signes sont rangés de manière à représenter la valeur décroissante dans chaque catégorie. Ainsi, dans la catégorie des ++, ιθ représente la subdivision la plus élevée, ιδ la moins élevée.

Voyons maintenant comment était représentée, pour Auguste Comte, la valeur de chaque question. Il se servait pour cela d'expressions anglaises, qu'il résumait par un signe grec entre parenthèses. Je vais donner le Tableau de ces principales dénominations, placées à la fin de chaque question, pour exprimer la valeur relative de la réponse :

Extremely well (ιθ), very well (ιη), well (ιξ), enough well (ιζ), very badly (δ), badly (Σ), indifferently (θ), moderately (ι), little better (ϊα), sufficiently (ῑ) well (ῑε).

Auguste Comte faisait, à la fin de chaque journée, le classement du jour; c'est-à-dire que les quatre ou cinq élèves examinés étaient disposés par ordre de mérite, avec les signes de leur catégorie et le signe grec de la subdivision de la catégorie. Tous les cinq jours, il faisait un classement de tous les élèves examinés pendant cette durée, et de temps en temps un classement général depuis le commencement; et enfin il terminait par le classement de tous les élèves, par exemple, examinés à Paris. Il procédait de la même manière en province, mais le problème était beaucoup plus facile, vu le petit nombre de candidats. Ainsi, par exemple, en consultant les notes des examens faits à Paris en 1837, je vois : 1° outre le classement de chaque jour, celui des cinq premiers jours, contenant vingt-trois élèves; 2° puis le classement des quarante-deux élèves examinés, depuis le commencement jusqu'à la fin du vendredi 4 août; 3° ensuite, le classement des soixante candidats examinés depuis le commencement jusqu'à la fin du mardi 8 août; 4° le classement des quatre-vingt-huit candidats examinés jusqu'à la fin du lundi 14 août; 5° le classement des cent douze candidats jusqu'à la fin du dimanche 20 août;. 6° enfin le classement général et final pour Paris.

Voyons maintenant l'examen en lui-même. Le nombre des questions était habituellement de quatre, cinq ou six au maximum. Mais, quoique Auguste Comte détaille dans ses notes, surtout celles de 1837, la marche de chaque question, il y avait toujours dans son développement des incidents, souvent importants, qui permettaient d'apprécier l'intelligence, la sagacité et l'esprit d'initiative du candidat. Les questions suivaient habituellement l'ordre suivant : une, quelquefois deux questions d'*élémentaires,* puis des questions dites de *spéciales*, portant sur l'Algèbre supérieure et la Géométrie analytique; l'examen se terminait le plus souvent par une question de Statique ou de Géométrie descriptive.

Mais c'est la nature des questions qui a surtout caractérisé le système d'examen introduit par Auguste Comte, système qui produisit, à l'époque de son apparition, une grande impression dans le public polytechnique, et a réagi certainement sur l'enseignement de la Mathématique, surtout en ce qui concerne ce qu'on nomme les *Mathématiques spéciales,* à savoir : la Géométrie analytique et l'Algèbre supérieure. Auguste Comte demandait rarement l'exposition d'une des théories enseignées dans le cours, quoique néanmoins il le fît quelquefois, n'ayant rien d'absolu à ce sujet. Mais ce qui caractérisait son système consistait à poser un problème où l'on pouvait voir si l'élève savait combiner les diverses théories, pour résoudre des questions déterminées et surmonter les difficultés, souvent fort délicates, que fait surgir leur application. De cette manière, il lui était possible d'apprécier, non seulement si le candidat possédait la théorie, mais aussi s'il savait s'en servir. Il étendait, du reste, ou concentrait l'étendue de la question, suivant l'intelligence et la capacité de l'élève, ce qui lui permettait une meilleure appréciation. Les questions étaient choisies de manière à pouvoir être réellement résolues au tableau par un jeune homme encore animé de cet entraînement, qui résulte nécessairement d'une longue préparation. Auguste Comte a toujours évité avec soin les questions singulières qu'on ne peut vraiment résoudre qu'autant qu'on les a directement apprises, et qui, faites pour la galerie, satisfont surtout l'amour-propre de l'examinateur. Les questions introduites par Auguste Comte avaient, en analytique surtout, pour but de dégager l'enseignement mathématique de l'époque de la préoccupation trop étroite et trop exclusive de l'étude analytique des trois coniques. De même en Algèbre supérieure. Ainsi, pour la transformation des équations, au lieu de concevoir cette théorie d'une manière générale, on exposait presque exclusivement la question de l'équation au carré des différences, en tant que liée par Lagrange à la question de la séparation des racines. Auguste Comte, dès le début, proposa sur des équations spéciales, habituellement du troisième degré, la détermination des équations aux produits, aux quotients, aux sommes, etc. Du reste, je vais faire un choix parmi les questions proposées dans les examens d'Auguste Comte, en 1837, et le lecteur pourra apprécier pièces en mains.

Pour bien juger le système de Comte, il serait utile d'avoir les questions d'examen depuis le commencement de l'École Polytechnique. Il y aurait surtout un immense intérêt à connaître les questions posées par des examinateurs tels que Poinsot et Ampère. Les a-t-on conservées? C'est ce que j'ignore; mais je signale le *desideratum*.

Quoi qu'il en soit, les examens de Comte produisaient une grande impression. Poinsot raconta jadis à Auguste Comte qu'une dame distinguée et de haute valeur eut la curiosité d'assister aux examens de Comte et qu'elle s'y rendit habillée en homme. Elle fut frappée de la nature des examens, et traduisit ainsi à Poinsot son impression : « M. Comte a l'air, à chaque question, d'inventer les Mathématiques. » Du reste, on a publié dans un recueil mathématique, la solution des questions posées par Auguste Comte.

Je puis citer une curieuse anecdote, que je tiens d'Auguste Comte lui-même, qui montre bien l'impression produite par la nature de ses questions. Il demande à un élève la détermination de la tangente à une courbe, autre que du second degré. Le candidat, après avoir cherché quelques instants, dit à Auguste Comte : « Monsieur, aucune méthode ne m'a été enseignée à ce sujet. — Je le regrette, répondit l'examinateur, d'autant mieux qu'il y a déjà un certain temps que je pose des questions analogues, et que l'on enseigne déjà les méthodes correspondantes. — Monsieur, dit une voix dans l'auditoire, c'est moi qui suis le professeur de cet élève. — Eh bien, Monsieur, dit Comte, je ne vous en fais pas mon compliment, ces questions sont enseignées déjà depuis longtemps. » Le professeur commençait à récriminer. « Monsieur, lui dit Auguste Comte : si vous voulez recommencer la discussion de Vadius et Trissotin, je vous préviens que je n'ai aucune envie d'y faire ma partie; je vous prierai donc de vouloir bien cesser. » Et le professeur, en quittant la salle, dit à haute voix : « Je m'appelle Vernier. — Monsieur, répondit Auguste Comte, c'est un nom comme un autre. » Ce n'était pas absolument vrai, car Vernier était au mieux avec une des plus grandes puissances mathématiques de l'époque, le fameux géomètre Poisson. L'affaire fit du bruit et eut une suite. M. de Rambuteau était alors préfet de la Seine, et M. de Jussieu, secrétaire général. Les examens se faisaient dans une des salles du nouvel Hôtel de Ville, dont la construction même n'était pas alors terminée. M. de Jussieu pria Auguste Comte de passer dans son cabinet, et là, avec toute sorte de courtoisie : « Voyons, Monsieur Comte, n'y a-t-il pas moyen d'arranger cette affaire? — Aucune, dit Comte, car je ne puis pas même dire comme Alceste : A moins qu'un ordre exprès du roi ne vienne; car je suis républicain. » M. de Jussieu sourit, et les deux interlocuteurs se séparèrent dans les meilleurs termes.

Auguste Comte, comme examinateur, était de la politesse la plus absolue; jamais un signe d'impatience, jamais l'ombre d'une qualification désobligeante. Il avait au plus haut degré le respect de la dignité des autres; et, comme je l'ai dit bien souvent, s'il était quelquefois bien sévère dans ses appréciations, il ne cherchait jamais à être blessant. Du reste, il n'aidait presque jamais le candidat au tableau. Il évitait ces sortes d'examens, qui sont de véritables dialogues entre le candidat et l'examinateur, et où il est souvent bien difficile de séparer ce qui appartient à l'un ou à l'autre. Auguste Comte voulait pouvoir juger la véritable valeur du candidat dans sa spontanéité.

Auguste Comte fut chargé, en 1837, de la tournée de l'Ouest et du Sud. Les villes d'examen furent Rouen, Rennes, Lorient, La Flèche, Angoulême, Toulouse, Montpellier et Bourges. Le nombre des candidats inscrits en province fut de 133, et le nombre des candidats réellement examinés de 93. Le nombre total de candidats inscrits, pour la série Bourdon et Auguste Comte, avait été de 311. Du reste, avec ses habitudes de rigoureuse précision, Auguste Comte a tracé un tableau de sa tournée Ouest et Sud en 1837 que je vais reproduire.

311 CANDIDATS INSCRITS.

—

Paris 178. — 134 effectifs.

TOURNÉE OUEST ET SUD
(1837)

VILLES D'EXAMEN.	NOMBRE des inscriptions.	NOMBRE effectif des examens.	DATES D'ARRIVÉE.
Rouen..............	15	6	3 septembre.
Rennes.............	12	11	9 (réelle 11).
Lorient............	22	18	14 (réelle 15).
La Flèche..........	10	8	20 (réelle 22).
Angoulême..........	20	16	25 (réelle 27).
Toulouse...........	17	9	2 octobre (réelle 3).
Montpellier........	26	16	8 (réelle 8).
Bourges............	11	9	17 (réelle 20).

Auguste Comte indique la date où, officiellement, d'après le Tableau arrêté à l'École Polytechnique ou au Ministère de la Guerre, il devait être arrivé dans la ville d'examen. On voit qu'il y a habituellement désaccord entre la date officielle et la date réelle.

J'ai fait un Tableau de tous les examens faits par Auguste Comte; et, en remarquant que chaque candidat examiné a son dossier propre, on aura une idée de la richesse des documents que nous possédons dans nos archives.

Voici le Tableau dont je viens de parler :

Tableau de tous les Candidats examinés par Auguste Comte pour l'admission à l'École Polytechnique.

ANNÉES.	NOMBRE des candidats inscrits.		NOMBRE DES CANDIDATS examinés.	
	Paris.	Province.	Paris.	Province.
1837	178	133	134	93
1838	»	»	158	87
1839	162	106	127	78
1840	171	115	123, admis : 69	80, admis : 27
1841	175	124	140	104
1842	232	115	188, admis : 58	85, admis : 15
1843	248	116	204	89
7 ans.	»	»	1074	616

En somme donc, Auguste Comte examina à Paris 1074 candidats et en province 616; ce qui donne un total de 1690 candidats qui lui sont passés entre les mains. Avec l'esprit si profondément observateur d'Auguste Comte, et si capable de tirer profit de toutes les indications positives passées sous ses yeux, on peut se faire une idée de la masse de renseignements dont il a pu se servir, sans parler des autres, pour construire son admirable Tableau des fonctions intellectuelles élémentaires du cerveau.

Auguste Comte avait l'habitude de noter avec exactitude les diverses particularités et de conserver aussi tous les renseignements personnels que les divers événements de sa vie mettaient à sa disposition. Je crois devoir, dans les Pièces justificatives, donner tous ceux que j'ai pu trouver pour la tournée de 1837. Outre que cela fournit pour l'histoire des renseignements qui pourront être un jour vraiment précieux, cela montre, par l'exemple d'Auguste Comte, comment l'ordre le plus rigoureux dans les choses même les plus simples est compatible avec un génie à la fois profond et original.

Nous allons maintenant faire un choix de diverses questions des examens d'Auguste Comte pour l'admission à l'École Polytechnique, et nous reproduirons même intégralement quelques-uns de ces examens :

Questions d'examen.

Année 1837.

HÉRARD, 20 ans (de midi à 2^h).

1° *Comparaison des aires semblables.*

Il prouve bien la proposition, à la manière ordinaire, pour les triangles; interpellé à montrer la décomposition effective du grand triangle suivant le rapport donné, il y parvient très nettement. Il passe très bien au cas des polygones quelconques. Pour les cercles, il emploie intempestivement la réduction à l'absurde, dont il parvient cependant à se passer, mais sans recourir nettement à la méthode des limites. Interpellé si la proposition a lieu pour des ellipses semblables, il répond formellement que non. (*Sufficiently well.*)

2° *Comparaison de la sphère au cône équilatéral circonscrit.*

Il détermine très bien le rapport des volumes et celui des surfaces : les principales formules géométriques lui sont très familières. (*Very well.*)

3° *Théorie de l'équation aux quotients : Exposer sur*

$$x^3 + px + q = 0.$$

Il expose bien la marche générale et pratique heureusement l'élimination pour le cas proposé. Il voit bien que l'équation finale obtenue est du degré convenable, vérifie bien sa réciprocité, et en profite très convenablement pour l'abaisser de moitié, en calculant toutefois trop péniblement. Interpellé à déduire de cette équation le caractère d'une racine double, il y parvient exactement après quelque hésitation : au cas d'une racine triple, il ne peut en expliquer d'abord l'impossibilité. (*Well.*)

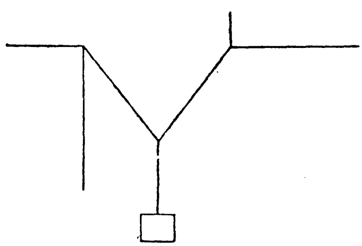
4° *Chercher sur la circonférence d'une ellipse le point le plus éloigné du sommet du petit axe.*

Il soupçonne d'abord le point au delà du grand axe et justifie ce soupçon par une très simple considération géométrique. Il forme très bien l'équation et établit parfaitement, tant *a priori* qu'*a posteriori,* que le cas du maximum correspond à celui des racines égales. Il détermine bien la longueur et la position de la corde maximum, sauf une légère erreur de construction, et une inexactitude plus grave pour l'ellipse équilatère. (*Extremely well.*)

5° *Discussion de la courbe* $y^2 = x^2 + x^3$.

Il discute très bien l'ordonnée, et trouve très rationnellement le maximum : il discute un peu moins bien la tangente. (*Very well.*)

6° *Exemple de double décomposition de forces convergentes.*



Il trouve très bien le résultat et l'explique suffisamment. (*Well.*)

Cet élève est meilleur que tous les précédents, quoique évidemment mal enseigné (+ +).

Tricotel, 17 ans passés (de $11^h 45^m$ à 1^h).

1° *Inscrire un carré dans un triangle.*

Il trouve bien la construction; mais interpellé de classer les trois carrés par ordre de grandeur, il ne peut y parvenir. Interpellé d'assigner le carré maximum inscrit dans tous les triangles équivalents et la figure du triangle correspondant, il ramène, après avertissement, la question à celle du minimum de la somme de base et hauteur; il se trompe complètement et répond que la base doit être le quart de la hauteur. (*Weakly.*)

2° *Résoudre l'équation $x^4 + px = q$, en cas de racines doubles.*

Il forme directement et par la voie la plus simple la condition entre p et q. Il voit très bien que la racine double est nécessairement réelle; qu'on peut obtenir l'équation des deux autres sans exécuter la division; et il assigne exactement toutes les racines, mais sans bien démêler *a priori* la nature des dernières racines. Il découvre, par le théorème de Descartes, qu'elles doivent être imaginaires et le confirme confusément par leur formule. (*Very well.*)

3° *Discussion de la courbe $y^2 = \dfrac{x}{x+1}$.*

Il discute très bien l'ordonnée et reconnaît bientôt l'inutilité de discuter la tangente. Cherchant le centre, il hésite à conclure qu'il n'y en a point et finit toutefois par le constater algébriquement. Il s'échappe à dire que les courbes de degré impair ne peuvent pas avoir de centre. Averti de cette erreur, il finit par apercevoir analytiquement que le centre serait sur la courbe. (*Well.*)

4° *Équilibre d'un poids entre deux plans inclinés : situation d'équilibre d'une baguette de longueur donnée.*

Il établit bien le principe de cet équilibre; il invente très heureusement, d'après ce principe, une solution graphique simple et ingénieuse, d'où il déduit le plan d'un calcul trigonométrique trop compliqué mais exact. (*Very well.*) (+ +).

Ce candidat est des plus intelligents et des mieux instruits.

BLONDEAU, 18 ans passés (de $10^h 30^m$ à $12^h 15^m$).

1° *Approximation de π.*

Il expose bien la méthode par les isopérimètres et mesure avec justesse le degré d'approximation obtenue. Il en déduit mal le nombre d'opérations nécessaires pour un degré voulu d'approximation. Interpellé de montrer très simplement que π est compris entre 3 et 4, il y parvient très bien. (*Well.*)

2° *Conditions de possibilité d'un angle trièdre d'après les faces.*

Il montre par la construction effective la nécessité de la première condition, mais il affirme qu'il n'en faut pas d'autre. (*Sufficiently.*)

3° *Analyse de l'équation* $x^4 - 20x^2 + 15x + 4 = 0$.

Il découvre immédiatement la racine 1 et, après l'avoir ôtée, croit qu'il n'y a plus de racine commensurable. Par le théorème de Sturm, il reconnaît la réalité et le signe des trois autres racines. Interpellé si elles peuvent être toutes les trois des racines du second degré, il répond affirmativement; il finit pourtant par se rectifier et apercevoir la seconde racine commensurable et, en l'ôtant, il trouve aisément les deux autres racines. (*Enough well.*)

4° *Conditions de contact indéterminé entre les deux courbes* $y = ax + bx^2$ *et* $x^2 + y^2 = 1$; *lieu des foyers de la première courbe.*

Il résout la première partie de la question par la méthode des équations factices, à une racine double; interpellé s'il faut ajouter une condition pour que cette racine double soit réelle, il ne s'aperçoit pas qu'elle est nécessairement déjà établie. La voie choisie l'engage à des calculs qui deviennent inexécutables. Il emploie, sur interpellation, la méthode des tangentes et parvient exactement à la condition cherchée. (*Well.*)

Il met très bien et fort simplement en équation la deuxième partie de la question. (*Very well.*)

5° *Équilibre du tour : position du poids pour que les appuis soient également chargés.*

Il expose convenablement, mais sans distinction, la loi d'équilibre. Il se trompe complètement sur la deuxième partie de la question et, après avoir reconnu directement l'erreur, il ne parvient pas à la rectifier. (*Moderately.*) (+ +).

Ce candidat est instruit, exercé et d'une bonne intelligence ordinaire; certainement très admissible.

(*A suivre.*)

INTERSECTION DE DEUX CONIQUES;

PAR M. E. AMIGUES.

I. — SOLUTION.

La méthode qui suit étant absolument algébrique, nous aurons soin de n'employer aucune expression empruntée à la Géométrie.

Il s'agit de *trouver les solutions d'un système de deux équations du second degré à deux inconnues, x et y, dont les coefficients sont réels ou imaginaires*, savoir

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} S = 0, \\ S' = 0. \end{array} \right.$$

Nous écarterons le cas où l'un au moins des polynomes S et S' est une somme de deux carrés, et aussi le cas où les deux équations ne diffèrent que par un facteur numérique.

Si l'on rend homogène l'expression

$$S + \lambda S',$$

en introduisant une variable z, cette expression devient une forme quadratique. Égalant à 0 son discriminant Δ, on obtient une équation du troisième degré en λ.

Puisque ni S ni S' ne sont des sommes de deux carrés, l'équation en λ n'a ni racine nulle ni racine infinie. Pour la même raison, elle ne peut être une identité. (On peut voir sans peine que, si elle était une identité, les expressions S et S' se décomposeraient en facteurs du premier degré et auraient un facteur commun.)

Soient λ_1 et λ_2 deux racines différentes de l'équation en λ. Le système proposé est équivalent au système

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} S + \lambda_1 S' = o, \\ S + \lambda_2 S' = o, \end{array} \right.$$

lequel peut s'écrire sous la forme

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} MN = o, \\ PQ = o. \end{array} \right.$$

Ce dernier système a pour solutions les solutions de quatre systèmes du premier degré, savoir

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} M = o, \\ P = o, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} M = o, \\ Q = o, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} N = o, \\ P = o, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} N = o, \\ Q = o. \end{array} \right.$$

Le problème est donc résolu dès qu'on connaît λ_1 et λ_2, et l'on peut dire que l'équation en λ est une résolvante du système (1).

Remarque. — Si l'équation en λ a toutes ses racines égales, la méthode est en défaut. Si l'on représente par λ_1 la racine triple, le système proposé est équivalent au système

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} S = o, \\ S + \lambda_1 S' = o, \end{array} \right.$$

dans lequel la seconde équation se décompose en un produit de deux facteurs.

[On aurait en particulier racine triple si les polynomes S et S_1 ne différaient que par un facteur numérique, mais nous avons écarté ce cas, pour lequel la deuxième des équations (5) se réduirait d'ailleurs à une identité.]

II. — Discussion générale.

Nous écarterons ici les deux mêmes cas que pour la solution.

Premier théorème. — *Le système proposé ne peut jamais avoir plus de quatre solutions.*

En effet, j'ai à résoudre les systèmes (4). Or aucun d'eux ne peut admettre plus d'une solution. Car si le premier, par exemple, admettait plus d'une solution, on aurait

$$M \equiv KP,$$

et, par suite,

$$S + \lambda_1 S' \equiv KPN,$$
$$S + \lambda_3 S' \equiv PQ.$$

Donc, en retranchant,

$$(\lambda_1 - \lambda_2) S' \equiv P(KN - Q),$$

ce qui est contre notre hypothèse.

La démonstration ne s'applique pas au cas de la racine triple. On a alors à résoudre le système (5), c'est-à-dire en posant

$$S + \lambda_1 S' \equiv MN,$$

que l'on doit résoudre les deux systèmes

$$\begin{cases} S = 0, \\ M = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} S = 0, \\ N = 0. \end{cases}$$

Si chacun d'eux n'a que deux solutions, le théorème est démontré. Prouvons qu'il en est ainsi pour le premier.

L'équation $M = 0$ contient au moins une des inconnues, sans quoi le premier système n'aurait pas de solution : supposons que ce soit y. On en tire alors

$$y = mx + n.$$

Portant cette valeur dans l'équation

$$S = 0,$$

on a une équation en x du second degré. Il s'agit de prouver que cette équation n'est pas une identité. En effet, si elle était une identité, le polynome S serait divisible par $y - mx - n$ pour toute valeur de x, ce qui est contraire à nos hypothèses.

Second théorème. — *Pour que deux solutions soient confondues, il faut et il suffit que l'équation en* λ *ait une racine double. Pour que les deux solutions qui restent soient également confondues, il faut et il suffit que cette racine double annule les mineurs du discriminant* Δ.

Nous ferons d'abord une remarque. Si deux facteurs de la forme

$$ax + by + c$$

s'annulent tous deux pour $x = \alpha$ et $y = \beta$, et aussi pour $x = \alpha'$ et $y = \beta'$, ces facteurs sont les mêmes à un facteur numérique près. Car le système linéaire obtenu en les égalant à o admet, dans ce cas, deux solutions et, par suite, une infinité.

Autre remarque. Si un facteur s'annule pour trois des quatre solutions, deux de ces solutions sont confondues. Car, d'après le système (3), si trois solutions annulent la facteur M, ces trois solutions sont solutions du système

$$\begin{aligned} M &= 0, \\ PQ &= 0, \end{aligned}$$

qui ne peut en avoir que deux, n'en ayant pas une infinité. Ces trois solutions ne peuvent donc être distinctes.

Autre remarque. Des deux facteurs M et N qui entrent dans l'une des équations (3), l'une admet deux des solutions, l'autre les deux autres.

Désignons maintenant les quatre solutions par les nombres 1, 2, 3, 4; et par P_{ij} le facteur du premier degré qui admet les solutions i et j, en sorte que P_{ij} ne diffère pas de P_{ji}. En appelant α, β, γ les trois racines de l'équation en λ, on a

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} S+\alpha S' &\equiv P_{12}P_{34},\\ S+\beta S' &\equiv P_{13}P_{24},\\ S+\gamma S' &\equiv P_{14}P_{23}.\end{aligned}\right.$$

Si les solutions 1 et 2 se confondent, on a

$$S+\beta S' \equiv \mu(S+\gamma S').$$

Ceci ayant lieu en particulier pour des valeurs de x et y qui annulent S' sans annuler S, on a

$$\mu = 1,$$

et alors

$$\gamma = \beta.$$

Réciproquement, si l'on a

$$\gamma = \beta,$$

on peut conclure que l'on a l'identité

$$(7)\qquad P_{13}P_{24} \equiv P_{14}P_{23}.$$

Les facteurs de ces deux produits sont donc identiques deux à deux. Le premier facteur du produit de gauche peut être identique au premier facteur du produit de droite, ou inversement.

Dans la première hypothèse, les facteurs P_{13} et P_{14} ont chacun les solutions 1, 3, 4; et les facteurs P_{24}, P_{23} ont chacun les solutions 2, 3, 4. Il faut pour cela que deux solutions au moins soient confondues.

Dans l'autre hypothèse, on arrive à la même conclusion.

Cherchons maintenant les conditions nécessaires et suffisantes pour que les solutions soient confondues deux à deux. Si les solutions 1 et 2 sont confondues (ce qui exige $\beta = \gamma$) et que les solutions 3 et 4 soient également confondues, les facteurs P_{13} et P_{24} ont deux solutions qui sont les mêmes, et, par suite, ne diffèrent que par un facteur numérique. Donc la racine double β donne un carré parfait

$$S + \beta S'.$$

Réciproquement, si une racine double β donne un carré parfait, les solutions 1 et 3 du facteur P_{13} sont aussi solutions du facteur P_{24}, qui, dès lors, admet les quatre solutions 1, 2, 3, 4. Donc les premières sont confondues deux à deux avec les secondes, à moins que plus de deux solutions ne fussent confondues, ce qui exigerait que β fût racine triple, comme on verra par le théorème suivant. Ainsi, pour que les quatre solutions se confondent deux à deux, il faut et il suffit que l'équation en λ ait une racine double β et que cette racine double donne un carré parfait

$$S + \beta S',$$

ou, ce qui revient au même, annule les mineurs du discriminant Δ.

Troisième théorème. — *Pour que trois des solutions soient confondues, il faut et il suffit que l'équation en λ ait ses trois racines égales. Pour que la quatrième solution soit confondue avec les trois premières, il faut et il suffit que cette racine triple annule les mineurs du déterminant Δ.*

En effet, si les solutions 2, 3 et 4 sont confondues, les seconds membres des identités (6) ne peuvent différer que par un facteur numérique [1]. Il en est de

---

[1] Le signe P_{22} représente un facteur linéaire qui admet la solution 2 et une solution infiniment voisine.

même des premiers membres, ce qui montre que ces facteurs numériques sont égaux à 1, et qu'on a en outre

$$\alpha = \beta = \gamma.$$

Réciproquement, si l'on a

$$\alpha = \beta = \gamma,$$

les premiers membres des identités (6) sont identiques. Donc il en est de même des seconds et l'on a

$$P_{12}P_{34} \equiv P_{13}P_{24} \equiv P_{14}P_{23}. \tag{8}$$

On a donc trois produits dont les facteurs doivent être identiques deux à deux. Cela donne lieu à quatre combinaisons. Dans l'une d'elles, par exemple, les premiers facteurs des trois produits sont identiques, et les trois seconds identiques. Les trois premiers ont alors les solutions 1, 2, 3, 4 et les trois autres les solutions 2, 3, 4. Il faut pour cela, ou bien que trois solutions au moins soient confondues ou bien que les quatre soient confondues deux à deux. Les trois autres combinaisons possibles conduisent évidemment à la même conclusion.

Si trois solutions au moins sont confondues, la réciproque est démontrée. Si les quatre solutions sont confondues deux à deux, l'un des produits (8) est un carré parfait, et, par suite, les deux autres sont aussi des carrés et les mêmes carrés.

Supposons, par exemple, les solutions impaires confondues, et les solutions paires aussi. Les identités (8) deviennent

$$P_{12}^2 \equiv P_{11}P_{22} \equiv P_{12}P_{21}.$$

On a donc

$$P_{11} \equiv P_{22},$$

c'est-à-dire que les solutions 1 et 2 sont confondues. Ainsi les quatre solutions sont confondues et la réciproque est encore vraie.

Cherchons d'une manière générale les conditions nécessaires et suffisantes pour que les quatre solutions soient confondues. Si elles le sont, les seconds membres des identités (6) sont des carrés qui ne diffèrent que par un facteur numérique. Les premiers membres de ces identités ne peuvent aussi différer que par un facteur numérique. On voit facilement que ce facteur est 1 et que l'on a

$$\alpha = \beta = \gamma.$$

En outre, cette racine triple donne un carré parfait

$$S + \alpha S'.$$

Réciproquement, si une racine triple α donne un carré, les seconds membres des identités (6) sont trois carrés identiques. Les six facteurs des identités (8) ne peuvent donc différer que par des facteurs numériques. Par exemple, on a

$$P_{12} \equiv \mu P_{34}.$$

Ceci exige que les solutions soient confondues deux à deux. Supposons, par exemple, les solutions impaires confondues et les solutions paires aussi. On prouvera comme ci-dessus que les quatre sont confondues.

Ainsi, pour que les quatre solutions soient confondues, il faut et il suffit que la racine triple α donne un carré parfait

$$S + \alpha S',$$

ou, en d'autres termes, annule les mineurs de Δ.

III. — Discussion complémentaire dans le cas où les deux équations données sont à coefficients réels.

Premier théorème. — *Si l'équation en λ a deux racines imaginaires, le système admet deux solutions réelles et deux solutions imaginaires conjuguées.*

En effet, ces deux racines sont imaginaires conjuguées et donnent le système (3) sous la forme suivante

$$\begin{cases} (M + Ni)(P + Qi) = 0, \\ (M - Ni)(P - Qi) = 0. \end{cases}$$

En associant les facteurs conjugués, on a deux solutions réelles. En associant les facteurs non conjugués, on a deux solutions imaginaires conjuguées, c'est-à-dire dans lesquelles les valeurs de x sont conjuguées et les valeurs de y aussi.

Ces dernières ne peuvent être réelles qu'en étant confondues, ce qui n'a lieu qu'autant que les valeurs imaginaires conjuguées de λ deviennent égales, et, par suite, réelles.

Second théorème. — *Si l'équation en λ n'a que des racines réelles, le système proposé admet quatre solutions réelles, ou quatre solutions imaginaires conjuguées deux à deux.*

Chaque racine, étant réelle, donne un couple de facteurs, qui sont ou réels ou imaginaires conjugués.

Supposons d'abord qu'un couple au moins soit formé de facteurs imaginaires conjugués. Soit

$$(M + Ni)(M - Ni) = 0$$

l'équation obtenue en égalant à o ce couple, et

$$G = 0$$

l'équation obtenue en égalant à o un autre couple, cette équation étant à coefficients réels d'après notre hypothèse.

Ce système de deux équations se décompose en deux autres, dont l'un donne deux solutions imaginaires, et l'autre les deux solutions conjuguées.

Ces solutions ne pourraient être toutes réelles que si les deux premières étaient respectivement confondues avec les deux conjuguées. Mais alors les facteurs $M \pm Ni$ devraient être les mêmes, ce qui ne peut avoir lieu, puisqu'ils sont conjugués.

Mais deux solutions imaginaires conjuguées peuvent devenir réelles en devenant égales, les deux autres demeurant imaginaires conjuguées.

De même, les solutions imaginaires données par le premier système peuvent être confondues en demeurant imaginaires; mais alors les solutions conjuguées données par le second système sont confondues aussi.

Supposons en second lieu qu'aucun couple ne soit formé de facteurs imaginaires conjugués, alors tous les couples sont formés de facteurs réels. Deux des trois couples sont alors représentés par des équations de la forme

$$MN = 0,$$
$$PQ = 0,$$

qui donnent quatre solutions réelles.

Deux de ces solutions peuvent se confondre, les autres demeurant distinctes, ou bien elles peuvent se confondre deux à deux.

Remarque I. — Si l'équation en λ a une racine triple, les trois ou quatre solutions confondues ne peuvent être que réelles, sans quoi on aurait les conjuguées, c'est-à-dire en tout plus de quatre solutions.

Remarque II. — Le nombre des couples de facteurs imaginaires conjugués est ou 0 ou 2. D'abord il ne saurait être égal à 1, sans quoi les deux couples de facteurs réels prouveraient que toutes les solutions sont réelles, et le couple de facteurs imaginaires conjugués prouverait qu'il y a au moins deux solutions imaginaires. Il ne saurait non plus être égal à 3, car il faut un couple au moins de facteurs réels, toutes les fois que les deux polynomes S et S′ sont à coefficients réels. Démontrons ce dernier fait. Les quatre solutions étant réelles ou conjuguées deux à deux, il y a toujours un couple de facteurs dont chacun admet ou deux solutions réelles ou deux solutions conjuguées. Je dis que chaque facteur de ce couple est toujours réel. En effet, soit un facteur à coefficients réels inconnus a, b, c,

$$ax + by + c.$$

Je dis qu'on a des valeurs réelles de a, b, c, si ce facteur admet les solutions réelles $(x = \alpha, y = \beta)$ et $(x = \alpha', y = \beta')$; je dis, en d'autres termes, qu'on peut tirer des valeurs réelles de a, b, c du système suivant

$$\begin{aligned} a\alpha + b\beta + c &= 0, \\ a\alpha' + b\beta' + c &= 0, \end{aligned}$$

ce qui est évident.

Je dis maintenant que l'on a encore des valeurs réelles de a, b, c, si le factenr admet deux solutions imaginaires conjuguées. En effet, soit l'une de ces solutions $x = \alpha + \beta i, y = \gamma + \delta i$. On doit avoir

$$a(\alpha + \beta i) + b(\gamma + \delta i) + c = 0,$$

c'est-à-dire, puisqu'on cherche des valeurs réelles de a, b, c,

$$\begin{cases} a\alpha + b\gamma + c = 0, \\ a\beta + b\delta = 0. \end{cases}$$

La solution conjuguée donne le même système, lequel donne évidemment des valeurs réelles pour a, b, c.

Remarque III. — Les réciproques des deux théorèmes sont vraies et se démontrent par l'absurde.

SUR LE PROBLÈME DU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1893;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN,
Élève de Mathématiques spéciales au Collège Sainte-Barbe.

On donne une conique S *et un triangle conjugué* ABC.

1° *Démontrer que, par un point quelconque* P, *de* S, *passent quatre coniques circonscrites à* ABC *et touchant* S *chacune en un point autre que* P.

2° *Les points où ces quatre coniques touchent* S *sont situés sur une conique* Σ *circonscrite à* ABC.

3° *Quand* P *décrit* S, Σ *enveloppe une courbe* T *du quatrième ordre.*

4° *D'un point* M *de la courbe* T, *on peut mener à cette courbe quatre tangentes, autres que celle qui touche la courbe en* M. *Démontrer que les points de contact sont sur une droite* D; *trouver l'enveloppe de* D *quand le point* M *décrit la courbe* T.

En prenant le triangle ABC comme triangle de référence, et

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 = 0$$

pour équation de la conique conjuguée S, on trouve que l'équation de la courbe T, enveloppe de Σ, est

$$Ay^2z^2 + A'x^2z^2 + A''x^2y^2 = 0.$$

La courbe T est donc une quartique pour laquelle les trois sommets A, B, C du triangle de référence sont des points doubles d'inflexion.

En cherchant maintenant l'enveloppe de la droite D qui contient les quatre points de contact des tangentes à T issues d'un point M de la courbe, on est conduit, en suivant une marche parallèle, à l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 = 0,$$

c'est-à-dire qu'on retrouve la conique donnée S.

Nous allons expliquer ce résultat en montrant que le problème peut se diviser en deux parties dont l'une n'est que la transformation de l'autre.

Si l'on se reporte à un Mémoire de Laguerre (*Nouvelles Annales*, août 1878), on verra que, pour toutes les quartiques Q ayant trois points doubles d'inflexion, quartiques dont les équations, en les rapportant au triangle de référence ayant les trois points doubles pour sommets, peuvent se ramener à la forme

$$Ay^2z^2 + A'x^2z^2 + A''x^2y^2 = 0,$$

la cubique polaire d'un point quelconque de la courbe se décompose en une conique et une droite, cette dernière renfermant les quatre points de contact des tangentes issues du point, et l'enveloppe de cette droite, quand le point se déplace sur la courbe, est une conique conjuguée au triangle des points doubles. On reconnaît là l'ensemble des propriétés qu'il s'agissait d'établir dans la dernière partie de la question. Pour en déduire celles de la première partie, appliquons aux résultats ci-dessus énoncés la transformation trilinéaire réciproque connue sous le nom de *transformation par points inverses*. Au point (x, y, z) nous faisons correspondre le point (X, Y, Z), tel que

$$xX = yY = zZ.$$

Nous tirons de là

$$\frac{x}{YZ} = \frac{y}{XZ} = \frac{z}{XY}$$

et

$$\frac{X}{yz} = \frac{Y}{xz} = \frac{Z}{xy}.$$

Pour avoir l'équation de la transformée, il suffira de remplacer x, y, z par les valeurs proportionnelles YZ, XZ, XY. On voit ainsi qu'à la quartique T

$$Ay^2z^2 + A'x^2z^2 + A''x^2y^2 = 0$$

correspond la courbe

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 = 0 :$$

c'est la conique S conjuguée au triangle de référence.

A toute droite

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

correspond la courbe

$$\alpha YZ + \beta XZ + \gamma XY = 0,$$

qui est une conique circonscrite au triangle de référence.

On voit ainsi :

1° Que, par un point quelconque P, de S, passent quatre coniques circonscrites à ABC (transformées des tangentes qu'on peut mener du point correspondant à la quartique T) et touchant S chacune en un point autre que P;

2° Que les points de tangence sont situés sur une conique Σ circonscrite à ABC dont l'enveloppe, quand P se déplace sur S, est la quartique T.

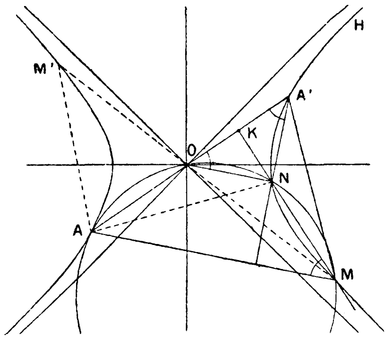
Supposons maintenant que nous effectuions une transformation homographique de la figure donnée, amenant les points B et C aux points circulaires à l'infini du plan, I et J. Le point A, pôle de BC par rapport à S, devient le pôle de la droite de l'infini, c'est-à-dire le centre de la conique H transformée de S; de plus, cette conique étant conjuguée par rapport au triangle OIJ, est une hyperbole équilatère. La première partie du problème, ainsi transformée, conduit à l'énoncé suivant :

Si, par un point quelconque M *d'une hyperbole équilatère et le centre* O *de la courbe, on mène les quatre cercles tangents à l'hyperbole en des points autres que* M, *les quatre points de contact sont sur un cercle passant par* O. *L'enveloppe de ce cercle est une quartique bicirculaire.*

Inversement, si nous démontrons directement cette propriété, nous pourrons considérer toute la question comme résolue.

Remarquons d'ailleurs que, pour arriver à l'énoncé précédent, nous avons fait subir à la propriété des quartiques Q d'abord une transformation par points inverses, puis une transformation homographique, mais nous aurions pu d'abord transformer homographiquement de façon que deux points doubles de la quartique devinssent les points I et J, et alors cette dernière se serait transformée en une *lemniscate,* comme il est aisé de le voir sur son équation, puis faire une transformation par points inverses qui, dans le cas où le triangle de référence n'a qu'un sommet à distance finie (le point double de la lemniscate), les deux autres étant les points cycliques, n'est pas autre chose qu'une transformation par rayons vecteurs réciproques. Cette dernière aurait transformé la lemniscate en une hyperbole équilatère H ayant pour centre le point double, et les tangentes à la lemniscate seraient devenues des cercles passant par le centre et tangents à l'hyperbole H.

Soient donc H une hyperbole équilatère, et MNOA un cercle passant par le centre de la courbe, la touchant en A et la rencontrant en deux autres points M et N, l'un de ces points, M, étant supposé fixe. Soit A′ le sy-



métrique du point A sur l'hyperbole. Je dis que $MO = MA'$.

On voit d'abord que MN est une hauteur du triangle AMA′, car les deux droites MN et AOA′ sont, d'après le théorème de Joachimsthal et la propriété des diamètres conjugués de l'hyperbole équilatère, symétriques de la tangente en A, par rapport à deux directions (un axe et une asymptote) faisant entre elles un angle de 45°. Les cercles des neuf points des triangles ANM, AA′M se confondent alors comme ayant trois points communs : le point O, l'hyperbole équilatère étant circonscrite à la fois à ces deux triangles, le pied K de la perpendiculaire MK et le milieu du côté commun AM.

Il résulte de là que le point N est l'orthocentre du triangle AMA′. On a, par conséquent,

$$\widehat{AA'N} = \widehat{AMK},$$

et ce dernier est égal à l'angle ONA′, le quadrilatère AMNO étant inscrit dans la circonférence. Le triangle OAN′, et par suite le triangle OMA′ est donc isoscèle.

Il en sera de même du triangle OM′A, M′ étant le symétrique de M sur l'hyperbole équilatère, ce qui prouve que le point de contact A appartient à un cercle C passant par O et ayant pour centre le point M′. Les quatre points de contact sont sur ce cercle.

Si nous supposons maintenant que le point M parcoure l'hyperbole équilatère, le cercle C, qui passe constamment par O, et dont le centre décrit aussi l'hyperbole, enveloppera une lemniscate, homothétique de la podaire du centre O de l'hyperbole équilatère dans le rapport 2.

FORMULES RELATIVES AUX FOYERS DES CONIQUES;

PAR M. A. TISSOT.

L'angle des axes étant désigné par θ, soit

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Bxy + 2Cx + 2C'y + D = 0$$

l'équation d'une conique.

Soient de plus

Δ le discriminant du premier membre rendu homogène;

α, α', β, γ, γ' et δ les mineurs de Δ qui correspondent respectivement à A, A′, B, C, C′ et D;

S une des racines de l'équation en S de la conique;

p l'abscisse et q l'ordonnée d'un foyer.

On a les formules suivantes :

$$p = \frac{1}{\delta}\left[\gamma \pm \sqrt{\Delta(S - A')}\right], \qquad q = \frac{1}{\delta}\left[\gamma' \pm \sqrt{\Delta(S - A)}\right],$$

et, pour les équations des directrices,

$$\pm\left(x-\frac{\gamma}{\delta}\right)\sqrt{\frac{A-S}{\Delta}}\pm\left(y-\frac{\gamma'}{\delta}\right)\sqrt{\frac{A'-S}{\Delta}}+\frac{1}{\delta}S\sin\theta=0.$$

L'une des racines de l'équation en S fournit les foyers réels, et l'autre les foyers imaginaires. Pour le calcul de p et de q, et pour celui du premier membre de l'équation de la directrice, il faut faire usage de deux racines différentes, si l'on veut obtenir un foyer et une directrice qui se correspondent. Enfin, chaque racine donne deux foyers et deux directrices, parce que l'un des quatre radicaux peut être pris soit positivement, soit négativement; mais, du signe dont on aura affecté ce radical, et de ceux des quantités $\frac{\pi}{2}-\theta$, $A\cos\theta-B$, $A'\cos\theta-B$, résulteront les signes des trois autres radicaux.

Une transformation convenable permet d'employer les formules ci-dessus dans le cas où δ est nul. Alors, S désignant la racine de l'équation en S qui ne devient pas égale à zéro, on trouve, pour les coordonnées du foyer qui reste à distance finie,

$$p=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{A'S\sin^2\theta}\right),\qquad q=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha'}{\gamma'}+\frac{\gamma'}{AS\sin^2\theta}\right),$$

et, pour l'équation de la directrice,

$$(A\cos\theta-B)x+(A-B\cos\theta)y+\frac{B}{2\gamma}(\alpha+\alpha'+2\beta\cos\theta)=0.$$

SUR L'ENVELOPPE D'UN PLAN;

PAR M. P. BARBARIN,
Professeur au lycée de Toulon.

La ligne droite mobile AB, qui dans le plan de l'angle fixe AOB découpe un triangle AOB d'aire constante, enveloppe une hyperbole dont OA et OB sont les asymptotes.

Ce théorème s'étend sans difficulté à l'espace.

Les plans qui découpent dans un cône du second degré des volumes limités de grandeur constante sont tangents à un hyperboloïde à deux nappes, asymptote à ce cône.

Ce théorème avait-il été remarqué jusqu'à ce jour? Au surplus, en voici une démonstration simple.

Le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ (coordonnées rectangulaires) coupe le cône S,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

suivant une ellipse qui a pour aire

$$\pi \frac{\delta^2 abc}{-a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 + c^2\gamma^2}\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{-a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 + c^2\gamma^2}};$$

la distance du sommet au plan de la section est $\frac{\delta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$; si l'on représente par $\frac{1}{3}\pi k^3$ le volume constant, on a donc

$$k^3 = \frac{\delta^3 abc}{(-a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 + c^2\gamma^2)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où

$$\delta = \frac{k}{\sqrt[3]{abc}}\sqrt{-a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 + c^2\gamma^2};$$

le plan sécant enveloppe donc l'hyperboloïde à deux nappes,

$$\frac{x^2}{\dfrac{-a^2k^2}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}} + \frac{y^2}{\dfrac{-b^2k^2}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}} + \frac{z^2}{\dfrac{c^2k^2}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}} = 1,$$

asymptote au cône proposé. La réciproque est vraie.

NOTE SUR UNE PROPRIÉTÉ DE L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE;

PAR M. J. RÉVEILLE.

On sait qu'un faisceau F de coniques passant par quatre points détermine, sur une droite donnée, une série de points en involution.

Il est facile de voir qu'un faisceau F′ de coniques passant par trois points et déterminant sur une droite donnée D une série de points en involution se compose de coniques passant par un quatrième point commun.

Prenons, en effet, deux coniques c et c' du faisceau F′, et soit α le quatrième point d'intersection, les trois autres étant β, γ, δ. Considérons le faisceau F des coniques passant par α, β, γ, δ. Il détermine sur la droite D la même involution que le faisceau F′, puisqu'il contient deux coniques c et c' de ce faisceau, et que deux couples de points suffisent pour déterminer une involution. Les deux faisceaux F et F′ n'en forment donc qu'un seul.

Cela posé, considérons le faisceau des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle.

Par un point P du plan du triangle, je mène des parallèles aux asymptotes de chacune de ces hyperboles.

J'obtiens un double faisceau de droites engendré par la rotation d'un angle droit pivotant autour de son sommet P. Ce double faisceau détermine sur une droite quelconque, et en particulier sur la droite de l'infini, une série de points en involution.

Ces points, où les droites du faisceau P rencontrent la droite de l'infini, sont évidemment les mêmes points où cette droite est rencontrée par les asymptotes des hyperboles, et, par conséquent, par les hyperboles elles-mêmes. Ces hyperboles forment donc un faisceau de coniques passant par trois points et déterminant sur une droite (la droite de l'infini) une série de points en involution.

Donc elles passent par un quatrième point.

La conique formée par un côté du triangle et la hauteur correspondante est évidemment une hyperbole du faisceau. Le point de rencontre des hauteurs est donc le quatrième point.

Le lieu des pôles d'une droite D par rapport aux coniques passant par quatre points fixes est une conique.

Cherchons, en effet, quels sont les points du lieu situés sur la droite D. Puisque, pour ces points, le pôle est sur la polaire, on les obtiendra en déterminant les points de contact de D avec les coniques du faisceau qui lui sont tangentes. Ce sont les deux points doubles de l'involution déterminée par le faisceau de coniques sur la droite.

Le lieu est donc du second degré.

Supposons que la droite D s'éloigne à l'infini.

Le lieu précédent devient le lieu des centres des coniques. C'est encore une conique ayant pour directions asymptotiques les directions des axes des deux paraboles du faisceau.

Dans le cas des hyperboles équilatères passant par les trois sommets d'un triangle, la conique lieu des centres coupe la droite de l'infini aux deux points doubles de l'involution déterminée par un angle droit qui pivote autour de son sommet.

Or on sait que ces deux points doubles sont les points cycliques du plan.

Donc le lieu des centres est un cercle.

SUR UNE NOTE DE GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE;

PAR M. E. CESÀRO.

Les courbes rappelées par M. Husquin de Rhéville dans un article des *Nouvelles Annales* (¹) sont les *spirales sinusoïdes*, et la propriété énoncée à la fin de l'article a été déjà signalée par plus d'un auteur (²). Les spirales sinusoïdes sont caractérisées par l'équation intrinsèque

$$s = k \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^m - 1}}$$

pour $m = 1 + k$. La même équation représente, pour $m = 2k$, les *lignes de Ribaucour*. Elle représente aussi, quel que soit k, les *lignes cycloïdales* pour $m = -2$, les *alysoïdes* (³) pour $m = 1$, les *alysoïdes d'égale ré-*

(¹) *Nouvelles Annales*, p. 143; 1890.

(²) *Ibid.*, p. 185; 1888.

(³) *Ibid.*, p. 75; 1886.

sistance pour $m = 2$, etc. Les développées de toutes ces courbes ont pour équation intrinsèque

$$(1) \qquad \rho = \frac{s}{k}\sqrt{\left(\frac{s}{a}\right)^m - 1}.$$

On les rencontre souvent dans les recherches de Géométrie infinitésimale, mais on prend rarement la peine de s'assurer de leur identité. Par exemple, les courbes étudiées par MM. Nies et Müller dans les *Programmes* des Gymnases de Darmstadt et Berlin (¹) ne sont autres que les *développées des lignes de Ribaucour*. Elles sont définies, dans les travaux en question, par la propriété suivante :

$$(2) \qquad s = ax^{\mu}.$$

Or on a, en différentiant cette égalité par rapport à s,

$$\mu \cos\varphi = a^{-\frac{1}{\mu}} s^{\frac{1}{\mu}-1},$$

φ étant l'inclinaison de la tangente sur l'axe des abscisses; puis, par une nouvelle différentiation,

$$\rho = \frac{\mu s}{\mu - 1}\operatorname{tang}\varphi.$$

L'élimination de φ entre les deux dernières égalités donne

$$\rho = \frac{\mu s}{\mu - 1}\sqrt{\mu^2 a^{\frac{2}{\mu}} s^{2-\frac{2}{\mu}} - 1}.$$

Pour une valeur convenable de a, cette équation peut coïncider avec (1), pourvu qu'on suppose

$$k = 1 - \frac{1}{\mu}, \qquad m = 2k.$$

(¹) *Bulletin de Darboux*, p. 58 (Iʳᵉ Partie); 1890.

Il n'y a donc que les développées des lignes de Ribaucour, dont la longueur puisse s'exprimer par une puissance de l'abscisse. Du reste cette propriété est contenue dans quelques formules d'un travail antérieur à celui de M. Müller ([1]). Si l'on observe que

$$\frac{k+1}{k-1} = 1 - 2\mu,$$

on peut préciser davantage en disant que la courbe définie par la propriété (2) est la développée de la ligne de Ribaucour dont l'indice est $1 - 2\mu$. On sait que cette dernière ligne possède dans son plan une droite (*directrice*) interceptant sur chaque normale un segment égal à $(1-\mu)\rho$. La courbe (2) est donc une *cycloïde* pour $\mu = \frac{1}{2}$, une *hypocycloïde à quatre rebroussements* pour $\mu = \frac{2}{3}$, une *développée de parabole* pour $\mu = \frac{3}{2}$, une *développée de chaînette* pour $\mu = 2$, etc. Il est d'ailleurs aisé de trouver une propriété géométrique des lignes (2), qui puisse servir de définition. Par rapport à la tangente et à la normale en un point quelconque de la ligne de Ribaucour, dont l'indice est $1 - 2\mu$, l'équation de la directrice est

$$(\mu - 1)\rho_1 x + \mu\rho y + \mu(\mu - 1)\rho^2 = 0,$$

ρ_1 étant le rayon de courbure de la développée. La droite qui rencontre orthogonalement la directrice sur la normale à la courbe intercepte donc sur la normale à la développée un segment égal à $(1-\mu)\rho_1$. En conséquence, les courbes (2) peuvent être définies en disant que *leur rayon de courbure est proportionnel au segment que la perpendiculaire élevée à une droite fixe, par le pied de la tangente, intercepte sur la normale.*

([1]) *Nouvelles Annales*, p. 180; 1888.

Si nos souvenirs sont exacts, ces courbes ont été étudiées, il y a longtemps, par M. Bassani ([1]). A vrai dire, la dernière propriété n'appartient pas exclusivement aux courbes (2). Pour le montrer, prenons la droite fixe pour axe des ordonnées, et appelons x l'abscisse du point de la courbe, qu'on prend pour origine mobile. Soit φ la rotation que doivent subir les axes mobiles pour devenir parallèles aux axes fixes. On exprime l'immobilité de ces axes par les relations

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{1}{\rho}, \qquad \frac{dx}{ds} = -\cos\varphi,$$

et l'on met le problème en équation en écrivant

$$\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\rho} = (\mu - 1)\frac{\cos\varphi}{x}.$$

d'où l'on déduit, par intégration,

$$\cos\varphi = \left(\frac{x}{a}\right)^{1-\mu};$$

puis

$$s = -\int \frac{dx}{\cos\varphi} = -\int \left(\frac{x}{a}\right)^{\mu-1} dx.$$

Tant que μ n'est pas nul, on retrouve les courbes (2); mais, pour $\mu = 0$, on obtient

$$s = a \log\frac{a}{x}, \qquad \cos\varphi = \frac{x}{a} = e^{-\frac{s}{a}},$$

puis

$$\rho = a \operatorname{tang}\varphi = a\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1}.$$

C'est l'équation d'une *tractrice*. Plus généralement, les lignes dont les centres de courbure ont pour projections, orthogonales ou obliques, sur une droite fixe, les pieds

---

([1]) *Journal de Battaglini*, passim.

des tangentes, sont les *développantes de chaînette*. Rappelons, pour finir, que ces courbes sont comprises parmi celles qui, d'après M. Hazzidakis [1], peuvent engendrer, par un mouvement convenable, des surfaces dont elles sont à chaque instant lignes de courbure.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Cesàro à M. Rouché.

Je viens de lire dans la livraison d'octobre (1893) des *Nouvelles Annales* quelques observations de M. Bioche, relatives à ma Note « Sur l'étude intrinsèque des surfaces réglées » (*Nouvelles Annales*, p. 294; 1890) et à mes « Remarques sur les surfaces gauches » (*Nouvelles Annales*, p. 445; 1889). M. Bioche croit que la première de ces Notes renferme une « réclamation de priorité », et, partant de là, il s'efforce de prouver qu'il « était en droit de faire sa Communication *Sur les surfaces réglées*, etc., à l'Académie des Sciences » (10 mars, 1890). Or c'est là un *droit* que je n'ai jamais pensé à lui contester, ma Note de 1890 n'ayant d'autre but que d'appeler l'attention sur la Note de 1889, afin de montrer : 1° qu'elle contenait sous une forme *plus ou moins* explicite tous les théorèmes énoncés par M. Bioche dans sa Communication; 2° que les restrictions de certains énoncés pouvaient être supprimées en prenant comme courbe fondamentale une ligne quelconque de la surface. M. Bioche, je le reconnais, n'avait pas lu ma Note de 1889 en écrivant sa *Communication*, et il a laissé passer

[1] *Journal de Crelle*; 1885.

plus de trois ans (il tient à le faire savoir) avant de lire ma Note de 1890. J'ai lu, au contraire, tout ce que M. Bioche a écrit dans cet intervalle de temps, et cet avantage que j'ai sur lui me permettrait de faire d'autres « réclamations de priorité » si je ne les trouvais fort ridicules pour des sujets si futiles.

Quant aux énoncés *trop restrictifs* et *très connus,* je ne comprends pas pourquoi M. Bioche a tenu à en faire l'objet de ses critiques, alors que j'avais moi-même fait remarquer (*Nouvelles Annales*, p. 296; 1890) que les restrictions de certains énoncés étaient inutiles. Je n'aurais pu, d'ailleurs, suivre le conseil de les *supprimer,* que veut bien me donner aujourd'hui M. Bioche, parce qu'elles étaient une conséquence nécessaire de la méthode employée. Je savais bien aussi que les théorèmes démontrés par moi étaient très connus, mais mon but était précisément de montrer aux lecteurs des *Nouvelles Annales* (journal des candidats aux écoles spéciales, etc.) comment ces propositions connues pouvaient être établies, d'une manière expéditive, par les *méthodes intrinsèques* (dont, à coup sûr, je ne suis pas l'inventeur). La déclaration préliminaire de la Note en question, et les citations fréquentes (Amigues, Bonnet, Pirondini, Catalan, Dini, Appell) sont là pour le prouver. Si j'avais cru que ma Note contenait quelque résultat nouveau, d'une certaine importance, j'aurais fait comme M. Bioche, je l'aurais présentée à l'Académie des Sciences.

SUR LES ÉQUATIONS RÉCIPROQUES ET LES ÉQUATIONS DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. A.-E. PELLET.

1. Supposons que les racines d'une équation $f(x) = 0$ de degré $2m$ se partagent en m groupes de deux racines inégales x_1, x_2, satisfaisant à la relation

$$ax_1x_2 + b(x_1 + x_2) + c = 0.$$

On peut par une substitution linéaire ramener cette équation à être réciproque ou à ne contenir que des puissances paires de l'inconnue. Soit d'abord $a \neq 0$; posons $x = y + \beta$; les valeurs de y correspondant à x_1, x_2 satisfont à la relation

$$ay_1y_2 + (b + a\beta)(y_1 + y_2) + a\beta^2 + 2b\beta + c = 0,$$

qui se réduit à

$$ay_1y_2 + \frac{ac - b^2}{a} = 0,$$

pour $\beta = -\frac{b}{a}$. L'équation en y devient réciproque si l'on remplace y par

$$\sqrt{\frac{b^2 - ac}{a^2}}\, z,$$

et paire si l'on remplace y par

$$\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}\, \frac{z + \gamma}{z - \gamma},$$

γ étant une quantité quelconque différente de 0; en effet, dans le premier cas on a la relation $z_1 z_2 = 1$, et dans le second cas $z_1 + z_2 = 0$.

Lorsque $a = 0$, l'équation $f(x) = 0$ devient paire en posant

$$x = y - \frac{c}{2b},$$

et réciproque en posant

$$x = \frac{y+1}{y-1} - \frac{c}{2b}.$$

2. Considérons une équation du quatrième degré, à coefficients réels

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

et soient x_1, x_2, x_3, x_4 ses quatre racines supposées inégales.

Les deux équations

$$ax_1x_2 + b(x_1 + x_2) + c = 0,$$
$$ax_3x_4 + b(x_3 + x_4) + c = 0$$

déterminent les rapports des quantités a, b, c. a est nul si $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = -\frac{p}{2}$; et alors la substitution $x = y - \frac{p}{4}$ transforme l'équation en une équation paire. Supposons $x_1 + x_2$ différent de $-\frac{p}{2}$. Si x_1, x_2 sont des quantités imaginaires conjuguées, x_3, x_4 sont des quantités réelles ou imaginaires conjuguées, par suite les rapports des quantités a, b, c sont réels. Effectuons la substitution $x = y - \frac{b}{a}$; y_1, y_2 sont des quantités imaginaires conjuguées; leur produit, qui est égal à $\frac{b^2 - ac}{a^2}$, est donc positif; les deux substitutions

$$y = \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} z, \qquad y = \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} \frac{z + \gamma}{z - \gamma}$$

qui ramènent l'équation donnée à une équation réciproque ou à une équation paire sont donc réelles. Si les racines x_1, x_2 sont réelles ainsi que x_3 et x_4, supposons-les rangées par ordre de grandeur,

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4.$$

Après la substitution $x = y - \frac{b}{a}$, on a

$$y_1 y_2 = y_3 y_4 = \frac{b^2 - ac}{a^2};$$

il en résulte que $\frac{b^2 - ac}{a^2}$ est positif. En effet, si le produit $y_1 y_2$ était négatif, les quantités y_1, y_2 seraient de signes contraires, y_1 négatif et y_2 positif, car on a

$$y_1 < y_2 < y_3 < y_4;$$

y_3, y_4 seraient tous deux positifs, ainsi que leur produit; et l'on aurait une contradiction.

Ainsi l'on peut, dans tous les cas, ramener une équation du quatrième degré, à coefficients réels, à être paire ou réciproque par une substitution linéaire à coefficients réels.

3. D'après ce qui précède, l'intégrale

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s}}$$

peut se ramener à la forme

$$\int \frac{F(y)\,dy}{\sqrt{Ay^4 + By^2 + C}}$$

de trois manières différentes par une substitution linéaire $x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$; f et F désignent des fonctions rationnelles. Soit $F(y) = F_1(y^2) + F_2(y^2)y$; l'intégrale précédente se décompose en deux autres, l'une d'elles $\int \frac{F_2(y^2)y\,dy}{\sqrt{Ay^4+By^2+C}}$ pouvant s'exprimer à l'aide des fonctions algébriques et logarithmiques, ce que l'on voit immédiatement en prenant y^2 pour variable; il peut se faire que l'autre $\int \frac{F_1(y^2)\,dy}{\sqrt{Ay^4+By^2+C}}$ puisse se ramener à la forme $\int \frac{F(z^2)z\,dz}{\sqrt{A_1z^4+B_1z^2+C_1}}$ par une substitution linéaire. Cette substitution, laissant sous forme paire l'équation Ay^4+By^2+C, est déterminée; on a

$$y=\sqrt{\alpha}\,\frac{z+\gamma}{z-\gamma},$$

α étant égal à $\pm\sqrt{\frac{C}{A}}$, et γ une indéterminée différente de o.

Ainsi soit $\int \frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}$, intégrale effectuée par Euler, en posant $p=\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$; en remplaçant x par $\frac{z+}{z-\gamma}$, elle devient

$$\int \frac{z\,dz}{(z^2+\gamma^2)\sqrt{(z+\gamma)^4+(z-\gamma)^4}};$$

et en remplaçant x par $\sqrt{-1}\,\frac{z+\gamma}{z-\gamma}$,

$$\int \frac{(z^2+\gamma^2)\sqrt{-1}\,dz}{z\sqrt{(z+\gamma)^4+(z-\gamma)^4}}.$$

On voit de même que l'intégrale

$$\int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

où

$$f(x^2)=F\left(x^2+\frac{1}{k^2x^2}\right)\left(x^2-\frac{1}{k^2x^2}\right),$$

F désignant une fonction rationnelle, se ramène à l'intégrale d'une fonction rationnelle en posant

$$x = \sqrt{\frac{1}{\pm k}}\,\frac{z+\gamma}{z-\gamma},$$

puis

$$z^2 = t;$$

cette intégrale a été considérée par M. Hermite (Cours de la Sorbonne).

En général soit $\varphi(x) = 0$ une équation de degré $2m$, dont les racines peuvent se partager en m groupes de deux racines satisfaisant à une relation de la forme

$$ax_1x_2 + b(x_1 + x_2) + c = 0;$$

l'intégrale

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}}$$

pourra se ramener par une transformation linéaire $x = \dfrac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$ à la forme

$$\int \frac{f_1(y)\,dy}{\sqrt{\psi(y^2)}},$$

$\psi(y^2)$ étant une fonction entière et de degré m en y^2, $f_1(y)$ une fonction rationnelle de y en même temps que $f(x)$. Posons

$$y^2 = t, \qquad f_1(y) = F(y^2) + F_1(y^2)y;$$

il vient

$$\int \frac{f_1(y)\,dy}{\sqrt{\psi(y^2)}} = \int \frac{F_1(t)\,dt}{2\sqrt{\psi(t)}} + \int \frac{F(t)\,dt}{2\sqrt{t\psi(t)}},$$

et l'intégrale proposée est ramenée à d'autres de même forme, la racine carrée portant sur un polynome de degré inférieur. En particulier, si $\varphi(x) = 0$ est une équation du sixième degré, $\psi(t)$ et $t\psi(t)$ sont des polynomes du troisième et du quatrième degré et l'on est ramené aux fonctions elliptiques.

AUGUSTE COMTE EXAMINATEUR D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (¹);

PAR M. PIERRE LAFFITE,
Professeur au Collège de France.

GASLONDE, 19 ans passés (de $2^h 20^m$ à 4^h).

1° *Construire sur un côté donné un décagone régulier.*

Il se tire très bien de la construction en imaginant d'inscrire préalablement un décagone dans un cercle arbitraire. Il calcule d'ailleurs exactement le rayon correspondant et en construit convenablement la valeur après quelque hésitation. (*Well.*)

2° *Sphère passant par quatre points donnés : épure de la solution.*

Il explique bien la construction solide, sauf quelque hésitation, sur les cas singuliers; il expose fort bien le plan complet de l'épure, et montre heureusement les simplifications qu'elle éprouve par un choix libre des plans de projection. (*Very well.*)

3° *Analyse de l'équation* $x^4 + 2x^2 - x + 2 = 0$.

Il voit sur-le-champ que l'équation a deux racines imaginaires, et quel est le signe des autres en cas de réalité : il s'assure de leur imaginarité par le théorème de Sturm heureusement employé, sans pousser le calcul jusqu'au terme ordinaire. Il reconnaît par ses calculs que les racines sont égales et cherche ses racines par la substitution de $y + z\sqrt{-1}$. Il forme bien les équations en y et z, et, heureusement, l'équation finale en y, sans pouvoir fixer *a priori* le nombre de ses racines réelles, il procède à la recherche de celles qui seraient commensurables : quoique la longueur des calculs ne permette pas d'achever, la réponse est satisfaisante.

(¹) *Voir* même Tome, p. 65.

4° *Sur un billard elliptique lancer une bille de position donnée, de manière à en frapper une autre donnée après une seule réflexion.*

Après avoir renoncé à la solution graphique, il met exactement, mais péniblement le problème en équation, sans s'apercevoir qu'il revient à faire une ellipse d'après le foyer et un contact avec le billard. Il manque entièrement la vérification relative au cas où les billes sont aux deux foyers du billard. (*Enough well.*)

5° *Équilibre d'un poids soutenu par un nœud coulant : courbe d'ascension d'un réverbère.*

Il explique bien la loi de l'équilibre; il trouve très simplement et spontanément la vraie nature de la courbe, et détermine nettement ses vraies dimensions, sauf une légère erreur de signe. (*Extremely well.*) (+ +).

Ce candidat est un des meilleurs jusqu'ici, son intelligence est bonne et assez étendue; son instruction est très satisfaisante.

Harlé, 18 ans passés (de $9^h 15^m$ à $10^h 45^m$).

1° *Sommation des progressions arithmétiques : application à la loi de Galilée.*

Exposition claire et facile de la formule; il fait couramment l'application, en expliquant très bien le cas de n fractionnaire ou même irrationnel d'après la nature de la question. (*Very well.*)

2° *Estimation d'après cette loi de Galilée de la profondeur d'un précipice, par le temps qu'un corps a employé à tomber jusqu'au fond, en ayant égard, dans l'appréciation de ce temps, à la durée de la transmission uniforme du son.*

Il forme très bien, et après peu d'hésitation, l'équation difficile de ce problème. Après l'avoir résolu, il tâtonne pour décider celle des deux racines qui convient seule à la question; il ne parvient pas à se prononcer nettement à cet égard, quoique ayant aperçu le principe de la distinction. (*Well.*)

3° *Dimensions d'une salle surmontée d'une voûte hémicylindrique, d'après sa surface, son volume et la hauteur de son centre de gravité.*

Il forme couramment les deux premières équations et finalement aussi la troisième d'après le théorème de Guldin qui lui est signalé; il indique bien le plan des éliminations et assez bien le degré de l'équation définitive. Interpellé de résoudre le problème quand le centre de gravité est le plus bas possible, il emploie malheureusement le théorème de Sturm et non le principe des racines égales. (*Less well.*)

4° *Lieu des sommets des paraboles ayant un foyer donné et une tangente donnée.*

En prenant l'origine au foyer et un axe parallèle à la tangente, il formule très bien l'équation du système des paraboles. Il exprime très directement aussi les coordonnées du sommet (comme point où le diamètre et la tangente sont rectangulaires), en faisant toutefois des calculs superflus pour trouver la direction du diamètre; il en déduit très bien la formation de l'équation cherchée. (*Extremely well.*)

5° *Direction la plus favorable au tirage d'un poids sur un plan horizontal, en supposant le frottement toujours proportionnel à la pression.*

En lui indiquant le principe statique de la solution (qu'il ne pouvait d'abord bien saisir), il trouve très bien le minimum de $n \cos\alpha + \sin\alpha$ d'après la méthode purement algébrique. On voit encore sur cet exemple qu'il n'apprécie pas le principe des racines égales comme caractéristiques de l'état minimum. (*Well.*) (+ +).

Ce candidat est fort instruit, très exercé, et d'une intelligence assez élevée, quoique plus porté à calculer qu'à réfléchir. Il est inférieur toutefois à Édouard Hardy et doit être probablement intercalé entre celui-ci et Hérard ou entre Hérard et Séwrin.

LENORMAND, 20 ans accomplis (de $4^h 15^m$ à 6^h).

1° *Aire d'un triangle d'après les coordonnées de ses sommets.*

Il institue spontanément la décomposition géométrique la plus favorable, et trouve enfin la vraie formule après plusieurs erreurs à rectifier. Interpellé d'assigner *a priori* la fonction en la supposant d'abord rationnelle et entière, il comprend l'esprit de la question et, avec un peu d'aide, résout à peu près la question. (*Very well.*) Il passe de la formule rectiligne à la formule polaire et la retrouve très bien par la figure. (*Very well.*)

2° *Analyse de l'équation* $x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0$, *sachant que deux de ses racines sont réciproques.*

Il applique très bien d'abord le théorème de Descartes et en tire, par une argumentation fine, rapide et serrée, tout le parti possible. Ayant égard à la réciprocité annoncée il substitue a et $\frac{1}{a}$ et cherche les racines communes, après avoir toutefois assez heureusement combiné, mais sur avertissement, les deux équations pour être dispensé de rechercher formellement le commun diviseur. Les deux racines réciproques étant ainsi trouvées, il trouve enfin les deux autres en ôtant le facteur du second degré; mais il ne sait pas se passer spontanément de la division dont il parvient cependant à se dispenser après nouvel avis. (*Well.*)

3° *Lieu des sommets des hyperboles ayant un foyer donné et une asymptote donnée.*

En formant l'équation du système d'hyperboles, il exprime bien les conditions relatives à l'asymptote et ne peut aboutir à formuler celles relatives au foyer. En les supposant exprimées, il indique bien la manière de former l'équation du lieu, en définissant le sommet par un bon caractère. (*Imperfectly but enough well.*)

4° *Loi d'équilibre d'un haquet.*

Il saisit bien le principe de réduction des machines composées aux machines simples, et l'applique très bien au cas proposé. (*Very well.*) (+ +).

Ce candidat a de la force et de la justesse, quoique son instruction ait été trop mesquinement dirigée. Son esprit peut aller très loin quand il est un peu excité. (Très admissible et à balancer vraisemblablement avec Masquelez.)

LABBÉ, 20 ans accomplis (de $10^h 15^m$ à $12^h 15^m$).

1° *Différence de niveau entre deux points inaccessibles.*

Il procède comme pour trouver la distance des deux points, et d'ailleurs exactement sous ce rapport. Il s'aperçoit ensuite qu'il faut niveler les deux points comparativement à une station commune et décrit très bien l'ensemble de l'opération, dont il apprécie fort judicieusement la comparaison avec un nivellement direct. Interpellé quelle influence la petitesse de la base peut exercer sur l'exactitude du travail trigonométrique, il finit par analyser cette influence délicate avec une parfaite justesse. (*Extremely well.*)

2° *Cubature du dodécagonoïde régulier.*

Il exécute très bien et fort simplement, dans toutes ses parties, l'ensemble de cette évaluation. Il applique aussi très bien la formule à calculer le côté du polygone d'après le volume, à un degré d'approximation donné, sauf quelque hésitation sur la mesure effective de l'approximation. (*Very well.*)

3° *Analyse de l'équation $x^4 - x^2 - 2x = c$, en déterminant c de manière que la somme de deux racines soit* 1.

Il prend pour principe la divisibilité par $x^2 - x + p$, et détermine très bien p et c. Il trouve ensuite très simplement les racines par le diviseur et le quotient. Reprenant ensuite *a priori* l'analyse de l'équation par le théorème de Descartes combiné avec les autres notions principales de la théorie des équations, il en tire judicieusement ou à peu près tout le parti possible. (*Very well.*)

4° *Lieu des sommets de toutes les hyperboles concentriques ayant une asymptote commune et la même excentricité.*

Il croit d'abord que les données déterminent l'hyperbole; mais, invité à réitérer cet examen, il finit par rectifier son erreur. Prenant l'origine au centre et l'asymptote pour un des axes, il forme bien, après quelques méprises bientôt réparées, l'équation du système d'hyperboles en ayant égard aux deux premières conditions; il s'embarrasse beaucoup dans la prise en considération de la dernière condition, dont il ne saisit que vaguement le plan. En la supposant exprimée, il expose à peu près bien le plan de la recherche du biais des sommets comme point où la tangente est perpendiculaire au diamètre. (*Enough well.*)

5° *Équilibre des forces parallèles dans l'espace.*

Exposition méthodique et correcte de la méthode ordinaire : analyse pénible, mais judicieuse, et finalement satisfaisante des divers degrés de gêne. (*Well.*) (++.)

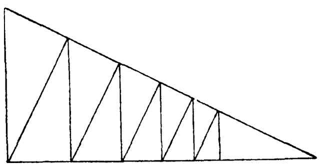
Ce candidat, très admissible, est fort judicieux et suffisamment intelligent, quoique mal enseigné. (A placer vraisemblablement un peu après ou un peu avant Lenormand.)

ROUSSEAU, 20 ans (de $2^h 30^m$ à $4^h 30^m$).

1° *Sommation des progressions géométriques.*

Exposition claire et correcte de la formule ordinaire. Il détermine bien la limite, mais y explique mal le cas exceptionnel. Il explique bien, au sujet de la limite, que la somme $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ est infinie. (*Well.*)

Interpellé d'appliquer la formule à l'exemple géométrique de cette figure signifiant : du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle mener une perpendiculaire à l'hypoténuse; du pied de cette perpendiculaire, en mener une au plus grand côté du triangle; du pied de cette seconde perpendicu-



laire mener une nouvelle perpendiculaire à l'hypoténuse, du pied de celle-ci au côté et continuer ainsi indéfiniment, il reconnaît d'abord l'existence de la progression et trouve bien la limite. Sommé de prouver si cette vérification suffirait pour justifier la formule en général, il finit, après beaucoup d'hésitation, par répondre très exactement, mais péniblement. (*Very well.*)

2° *Dimensions d'une niche d'après son volume et sa surface.*

Il forme bien l'équation du problème. Il discute assez bien l'équation sous le point de vue algébrique et sous le point de vue géométrique. Interpellé de déterminer les dimensions pour le volume maximum, il voit bien *a priori* que ce cas correspond à celui d'une racine double; mais il ne peut pas la vérifier *a posteriori* par l'analyse des conditions de réalité.

D'après ce principe, il détermine péniblement les dimensions. (*Enough well.*)

3° *Construction de l'équation précédente* $x^3 - 3b^2x + 8a^3 = 0$.

Il hésite d'abord à prononcer l'impossibilité de construire par deux cercles, et ne la reconnaît que par le calcul qui lui suggère toutefois l'idée de la comparaison géométrique directe de deux cercles. Il cherche après à combiner le cercle et la parabole; mais, à la manière dont il prend la parabole ($y^2 = 2px$), le calcul le conduit à reconnaître l'impossibilité de cette construction; et il en conclut, après discussion sur la figure, la nécessité de poser la parabole $x^2 = 2py$, sauf toutefois hésitation et avertissement. Avec cette modification, il achève la construction, sauf une légère erreur de signe, et la met bien en harmonie avec l'équation. On reconnaît aisément que le candidat n'a pas été enseigné sur les constructions, ce qui donne une grande valeur au travail évidemment spontané qu'il vient d'exécuter péniblement.) (*Well.*) (++).

Ce candidat, très judicieux et assez intelligent, est certainement admissible, quoique son instruction soit inférieure. (A balancer probablement avec Bonfillion et Masquelez.)

JOHANNYS, 19 ans (de $9^h 15^m$ à $10^h 45^m$).

1° *Aire d'un triangle par deux côtés et un angle.*

Il résout très bien la question quand l'angle est compris et détermine couramment le maximum. Mais il est fort embarrassé pour le second cas qu'il ne sait point déduire du premier; il s'en tire cependant très bien par une autre voie et finit par discuter assez convenablement la formule obtenue.

2° *Analyse de l'équation* $8x^5 - ax^3 + x^2 + 12x = 2$, *quand* a *est tel que deux des racines sont égales au signe près.*

Il divise immédiatement par $x^2 - x'^2$ et détermine bien ainsi x' et a. Il discute alors le quotient pour caractériser les autres racines et s'aperçoit, par une seule substitution, qu'elles sont toutes réelles, sauf une erreur, bientôt rectifiée, sur le signe de la dernière racine. Interpellé si ces racines sont dans la table des sinus par la trisection de l'angle, il prend mal à propos la formule de Moïvre, ne pense pas seulement à l'équation trigonométrique et s'égare en transformations inutiles, insignifiantes, qui indiquent toutefois un certain esprit de calcul. Cependant, en posant $x = \cos\varphi + \sin\varphi$, il trouve, sans s'en douter, la résolution des équations du 3ᵉ degré; mais il est arrêté par l'imaginarité de $\cos\varphi$ et de $\sin\varphi$. Quoique la solution lui échappe finalement, il est aisé de reconnaître, par l'ensemble de cette question, que le candidat entend bien l'Algèbre. (*Well.*)

3° *Lieu des sommets des ellipses concentriques ayant un point commun et une même tangente.*

Prenant l'origine au centre et un axe parallèle à la tangente, il forme bien l'équation du système d'ellipses. Mais il suit d'abord, pour l'expression des sommets, une mauvaise marche par une définition trop spéciale des sommets (comme intersection de la courbe avec ses axes). Averti de cette faute, il pense spontanément au caractère de la tangente perpendiculaire au rayon, et alors continue très bien la solution jusqu'au bout. Il voit nettement que la question est commune à l'hyperbole et à l'ellipse; mais il hésite beaucoup pour reconnaître qu'elle ne convient pas à la parabole. (*Wery well.*)

4° *Equilibre d'un poids sur un plan résistant.*

Il explique très bien les conditions de cet équilibre. Il conçoit même très nettement les conditions les plus favorables à la stabilité et les modifications provenant du frottement. Interpellé d'assigner, sous ce dernier rapport, la limite des inclinaisons qui permettent l'équilibre, il y parvient d'une manière directe et très heureuse. (*Extremely well.*)

Ce candidat, malgré ses fautes d'Algèbre, est évidemment l'un des meilleurs jusqu'ici; il a l'esprit net, fort et juste, et une très bonne instruction. (A classer vraisemblablement parmi les trois ou quatre premiers jusqu'à présent. (++).

(*A suivre.*)

CORRÉLATION ENTRE LES HEXAGONES DE PASCAL ET DE BRIANCHON;

PAR M. P. SONDAT.

Soit une conique coupant les côtés BC, AC, AB d'un triangle ABC aux points α et α_1, β et β_1, γ et γ_1.

I. Désignons par I et I_1, H et H_1, K et K_1 les points $(\alpha\beta, \alpha_1\gamma_1)$ et $(\alpha\gamma, \alpha_1\beta_1)$, $(\alpha\beta, \beta_1\gamma_1)$ et $(\beta\gamma, \alpha_1\beta_1)$, $(\alpha\gamma, \beta_1\gamma_1)$ et $(\beta\gamma, \alpha_1\gamma_1)$.

Les hexagones

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha\beta\beta_1\alpha_1\gamma_1\gamma, \\ \beta\alpha\alpha_1\beta_1\gamma_1\gamma, \\ \gamma\alpha\alpha_1\gamma_1\beta_1\beta \end{array}\right.$$

donnent naissance aux trois droites de Pascal

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A\,I\,I_1}, \\ \mathrm{B\,H\,H_1}, \\ \mathrm{C\,K\,K_1}. \end{array}\right.$$

Or les trois triangles

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{ABC}, \\ \mathrm{IHK}, \\ \mathrm{I_1H_1K_1}, \end{array}\right.$$

pris deux à deux, admettent pour axes d'homologie les trois pascales relatives au système

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha\beta\,\gamma\alpha_1\beta_1\gamma_1, \\ \alpha\gamma_1\gamma\beta\,\beta_1\alpha_1, \\ \alpha\alpha_1\gamma\gamma_1\beta_1\beta, \end{array}\right.$$

lesquelles se rencontrent en l'un des vingt points de Steiner, car les hexagones ne diffèrent que par la permutation circulaire des sommets de rang pair. Ces triangles ont donc un centre commun d'homologie, ou les droites (1) sont concourantes en un point O, qui est l'un des soixante de Kirkman.

II. Désignons par R, S, T les points $(A\alpha_1, \beta\gamma)$, $(B\beta_1, \alpha\gamma)$, $(C\gamma_1, \alpha\beta)$, et par R_1, S_1, T_1 les points $(A\alpha, \beta_1\gamma_1)$, $(B\beta, \alpha_1\gamma_1)$, $(C\gamma, \alpha_1\beta_1)$.

Dans les hexagones

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha B A R H_1 I_1, \\ \beta C B S K\ H, \\ \gamma B C T H\ K, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 B A R_1 H\ I, \\ \beta_1 C B S_1 K_1 H_1, \\ \gamma_1 B C T_1 H_1 K_1, \end{array}\right.$$

les côtés non consécutifs sont concourants trois à trois, c'est-à-dire en α_1 et γ, β_1 et α, γ_1 et α dans le premier système, et en α et γ_1, β et α_1, γ et α_1 dans le second. Les diagonales principales doivent donc être concourantes, ce qui amène les six droites αR, βS, γT et $\alpha_1 R_1$, $\beta_1 S_1$, $\gamma_1 T_1$ au point O.

III. En appelant x et x_1, y et y_1, z et z_1 les rayons $A\alpha$ et $A\alpha_1$, $B\beta$ et $B\beta_1$, $C\gamma$ et $C\gamma_1$, formant la division $+1$ dans les angles de ABC, ou tangents à une conique, on aura le *sexlatère*

$$xz_1yx_1zy_1$$

dans lequel les diagonales principales

$$yz_1 - y_1z : LL_1, \quad x_1z - xz_1 : MM_1, \quad xy_1 - yx_1 : NN_1$$

sont concourantes en un point de Brianchon.

Or les axes du système

$$\left\{\begin{array}{l} B\beta\gamma C\gamma_1\beta_1, \\ A\alpha\gamma C\gamma_1\alpha_1, \\ A\alpha\beta B\beta_1\alpha_1, \end{array}\right.$$

savoir

$$(2)\qquad \begin{cases} L\,L_1\,L_2, \\ M\,M_1\,M_2, \\ N\,N_1\,N_2, \end{cases}$$

sont précisément ces diagonales, et, par conséquent, concourants.

Comme d'ailleurs, dans les hexagones

$$\begin{cases} I\,S_1\,N_1\,A\,\beta_1\,N_2, \\ I_1\,T_1\,M\,A\,\gamma_1\,M_2, \end{cases}$$

les côtés non consécutifs sont concourants en α_1 et β, α_1 et γ, les diagonales doivent être aussi concourantes, ce qui amène deux des axes (2) au point O, et par suite le troisième, puisqu'ils passent par un même point.

Le point (1) *de Kirkman coïncide ainsi avec le point* (2) *de Brianchon, et douze droites passent par ce point.*

IV. En permutant successivement α et α_1, β et β_1, γ et γ_1, ce qui laisse subsister le triangle ABC, et procédant de même, on obtiendra trois nouveaux faisceaux contenant chacun douze droites concourantes en O_1, O_2, O_3, et chacun de ces points sera à la fois un Kirkman et un Brianchon.

V. Désignons par i et i_1, h et h_1, k et k_1 les droites $(xy, x_1 z_1)$ et $(xz, x_1 y_1)$, $(xy, y_1 z_1)$ et $(yz, x_1 y_1)$, $(xz, y_1 z_1)$ et $(yz, x_1 z_1)$.

Les sexlatères

$$\begin{cases} x\,y\,y_1\,x_1\,z_1\,z, \\ y\,x\,x_1\,y_1\,z_1\,z, \\ z\,x\,x_1\,z_1\,y_1\,y \end{cases}$$

donnent naissance aux trois points de Brianchon

$$(3)\qquad \begin{cases} a\,i\,i_1, \\ b\,h\,h_1, \\ c\,k\,k_1. \end{cases}$$

Or les trois *trilatères*

$$\begin{cases} a\,h\,c, \\ i\,h\,k, \\ i_1\,h_1\,k_1 \end{cases}$$

admettent pour centres d'homologie les trois points de Brianchon relatifs au système

$$\begin{cases} x\,y\,z\,x_1\,y_1\,z_1, \\ x\,z_1\,z\,y\,y_1\,x_1, \\ x\,x_1\,z\,z_1\,y_1\,y, \end{cases}$$

lesquels sont situés sur une droite d, car les sexlatères ne diffèrent que par la permutation circulaire des côtés de rang pair. Ces trilatères ont donc un axe commun d'homologie, ou les points (3) sont situés sur l'une des soixante droites δ qui, dans le sexlatère de Brianchon, correspondent aux soixante points de Kirkman de l'hexagone de Pascal.

VI. Appelons r, s, t les droites (ax_1, yz), (by_1, xz), (cz_1, xy), et r_1, s_1, t_1 les droites (ax, y_1z_1), (by, x_1z_1), (cz, x_1y_1).

Dans les sexlatères

$$\begin{cases} x\,b\,a\,r\,h_1\,i_1, \\ y\,c\,b\,s\,k\,h, \\ z\,b\,c\,t\,h\,k, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1\,b\,a\,r_1\,h\,i. \\ y_1\,c\,b\,s_1\,k_1\,h_1. \\ z_1\,b\,c\,t_1\,h_1\,k_1. \end{cases}$$

les sommets sont trois à trois en ligne droite, c'est-à-dire sur x_1 et z, y_1 et x, z_1 et x dans le premier système et sur x et z_1, y et x_1, z et x_1 dans le second. Les côtés opposés doivent donc se rencontrer en trois points en ligne droite, ce qui amène les six points xr, ys, zt et $x_1 r_1$, $y_1 s_1$, $z_1 t_1$ sur δ.

VII. Dans l'hexagone de Pascal

$$\alpha\gamma_1\beta\alpha_1\gamma\beta_1,$$

les trois points

$$\left\{\begin{array}{l} \beta\gamma_1, \beta_1\gamma : \lambda, \lambda_1, \\ \alpha_1\gamma_1, \alpha\gamma_1 : \mu, \mu_1, \\ \alpha\beta_1, \alpha_1\beta : \nu, \nu_1 \end{array}\right.$$

sont en ligne droite.

Or les centres des sexlatères

$$\left\{\begin{array}{l} byzcz_1y_1, \\ axzcz_1x_1, \\ axyby_1x_1, \end{array}\right.$$

savoir

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda\lambda_1\lambda_2, \\ \mu\mu_1\mu_2, \\ \nu\nu_1\nu_2, \end{array}\right.$$

sont précisément ces points, et, par conséquent, en ligne droite.

Comme d'ailleurs dans les sexlatères

$$\left\{\begin{array}{l} is_1\nu_1ay_1\nu_2, \\ i_1t_1\mu az_1\mu_2, \end{array}\right.$$

les sommets non consécutifs appartiennent aux droites x_1 et y, x_1 et z, les points de rencontre des côtés opposés doivent être aussi en ligne droite, ce qui amène deux des points (4) sur δ, et par suite le troisième, puisqu'ils sont alignés.

La droite (3) *ou* δ *coïncide ainsi avec la droite* (4) *de Pascal et douze points appartiennent à cette droite.*

VIII. En permutant successivement x et x_1, y et y_1, z et z_1, ce qui conserve le trilatère *abc*, et procédant de même, on obtiendra trois nouvelles droites δ_1, δ_2, δ_3, contenant chacune douze points et étant à la fois une des soixante droites δ et une pascale.

SUR LA RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DES ÉQUATIONS;

PAR M. ERNEST JAGGI, à Besançon.

FORME UNIQUE DES n RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE DU DEGRÉ n A UNE INCONNUE.

Soit

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

une équation algébrique en x dont les coefficients a_1, a_2, ..., a_n sont des quantités données quelconques. Si a_1, a_2, ..., a_n peuvent acquérir respectivement m_1, m_2, ..., m_n valeurs, l'équation précédente équivaut à une équation unique de degré $n \times m_1 m_2 m_3 \ldots m_n$ qui se décompose en $m_1 m_2 \ldots m_n$ équations de degré n, dans chacune desquelles chaque coefficient n'a que l'une des valeurs qui peuvent lui être attribuées.

Nous supposons donc que les coefficients de notre équation sont des quantités quelconques, mais n'ayant chacun qu'une valeur et nous cherchons une formule unique pour les n racines de l'équation. Si x_0, x_1, ..., x_{n-1} sont ces n racines dans un certain ordre, la formule unique cherchée devra, par certains changements dans les quantités qui y entrent, donner successivement x_0, x_1, ..., x_n. Ces changements peuvent être de deux sortes : soit des permutations des quantités qui entrent dans la formule, soit l'attribution à l'une des quantités de n valeurs différentes, les autres restant les mêmes; on ne peut attribuer à 2, 3, ... quantités des valeurs différentes en certains nombres que dans le cas où n serait un nombre de permutations, c'est-à-dire de la forme $1 2 \ldots m$, ou un produit de tels nombres. La première méthode a conduit Vandermonde et Lagrange à rechercher des fonctions des racines x_0, x_1, ..., x_{n-1} qui, par la permutation de ces racines dans ces fonctions donnent successivement ces racines elles-mêmes.

La seconde méthode conduit, il est vrai, aux mêmes fonctions, mais est plus rapide et surtout plus directe.

Si, par l'attribution de n valeurs différentes à l'une des quantités qui entrent dans la formule cherchée, on obtient les n racines, nous pouvons considérer cette formule comme étant l'expression d'une fonction d'une variable λ à laquelle on attribue successivement n valeurs λ_0, λ_1, λ_2, ..., λ_{n-1}, en sorte que nous pourrons écrire

$$x_0 = f(\lambda_0), \qquad x_1 = f(\lambda_1),$$
$$x_2 = f(\lambda_2), \qquad \ldots, \qquad x_{n-1} = f(\lambda_{n-1}).$$

Toute fonction $f(\lambda)$, qui n'a qu'une valeur pour une valeur donnée quelconque de λ, est susceptible de représenter successivement les n racines x_0, x_1, ..., x_n, pour des valeurs λ_0, λ_1, ..., λ_{n-1} tirées de ces équations mêmes, et l'on pourrait se proposer d'étudier quelles sont les relations entre λ_0, λ_1, ..., λ_{n-1}, a_1, a_2, ..., a_n pour une fonction f donnée, puis de rechercher quelle doit être f pour que ces relations soient les plus simples possibles. Mais comme ces relations dépendent, en général, de f et des coefficients a, on peut inversement se donner $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ et chercher la fonction f; ce problème, qui n'est pas toujours soluble puisque f ne doit avoir qu'une valeur pour chacune des valeurs $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, est évidemment très difficile et sort des limites de l'Algèbre élémentaire dans laquelle nous voulons rester, car l'étude des équations algébriques en fait partie. Nous sommes donc conduits à choisir des systèmes de valeurs de λ et à essayer de trouver la fonction f. Or, on connaît la solution de certaines équations de degré n, par exemple celle de

$$x^n = 1,$$

et l'on sait aussi que dans toutes les autres équations que l'on sait résoudre entrent des radicaux qui, pris avec toutes leurs valeurs, donnent toutes les racines de ces équations; on a là un exemple où toutes les racines d'une même équation sont données par une fonction $f(\lambda)$, où λ a les n valeurs racines de $\lambda^n = 1$, les coefficients de λ étant des racines arithmétiques. Nous sommes donc conduits, dans le cas le plus général, à prendre pour λ_0, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ les racines de l'équation $\lambda^n = 1$ et à chercher la fonction f correspondante.

Mais ce problème est encore compliqué. Nous essayerons donc une fonction f donnée; une fonction rationnelle étant la plus simple des fonctions qui n'ont qu'une valeur pour $\lambda = \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, nous essayons la fonction

$$f(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)},$$

$\varphi(\lambda)$ et $\psi(\lambda)$ étant deux polynomes en λ. Grâce à la condition $\lambda^n = 1$, ces polynomes se réduisent à la forme

$$\varphi(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \ldots + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1},$$
$$\psi(\lambda) = \beta_0 + \beta_1 \lambda + \beta_2 \lambda^2 + \ldots + \beta_{n-1} \lambda^{n-1},$$

pour les valeurs λ_0, λ_1, ..., λ_{n-1} de λ. Nous n'avons donc qu'à considérer la fonction

$$f(\lambda)=\frac{\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2+\ldots+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}}{\beta_0+\beta_1\lambda+\beta_2\lambda^2+\ldots+\beta_{n-1}\lambda^{n-1}},$$

ou plutôt les n valeurs de cette fonction pour $\lambda=\lambda_0$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$. Pour ces valeurs de λ, cette fonction peut encore être mise sous une forme plus simple.

En effet,

$$\psi(\lambda_0)\psi(\lambda_1)\psi(\lambda_2)\ldots\psi(\lambda_{n-1})$$

est une fonction symétrique des n racines de $\lambda^n=1$ et, par suite, est une constante indépendante de $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$. Or si λ est une racine primitive de $\lambda^n=1$, les n racines sont

$$\lambda^0, \quad \lambda, \quad \lambda^2, \quad \ldots, \quad \lambda^{n-1}.$$

Il s'ensuit que $f(\lambda)$, sous la forme

$$\frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)}\,\frac{\psi(\lambda^0)\psi(\lambda^2)\ldots\psi(\lambda^{n-1})}{\psi(\lambda^0)\psi(\lambda^2)\ldots\psi(\lambda^{n-1})},$$

se réduit à un polynome de degré $(n-1)$, puisque le dénominateur est une constante et que le numérateur, produit de polynomes, est également un polynome. Si λ n'est pas une racine primitive de $\lambda^n=1$, elle est racine primitive d'une équation $\lambda^{n'}=1$, n' étant un diviseur de n $(n=mn')$; $\lambda^0, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1}$ sont les n' racines de cette dernière équation, m fois répétées et $\psi(\lambda_0)$, $\psi(\lambda_1), \ldots, \psi(\lambda_{n-1})$ ne contient également pas λ. Donc, dans tous les cas, nous n'avons qu'à prendre pour f une fonction de la forme

$$f(\lambda)=b_0+b_1\lambda+b_2\lambda^2+b_3\lambda^3+\ldots+b_{n-1}\lambda^{n-1}.$$

Reste à démontrer qu'on peut choisir les coefficients de manière que les n racines $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ soient

$$f(1), \quad f(\lambda), \quad f(\lambda^2), \quad \ldots, \quad f(\lambda^{n-1}),$$

λ étant une racine primitive de $\lambda^n = 1$. Soient

$$x_0 = f(1), \qquad x = f(\lambda),$$
$$x_2 = f(\lambda^2), \qquad \ldots, \qquad x_{n-1} = f(\lambda^{n-1}).$$

Les fonctions symétriques des racines $x_i = f(\lambda^i)$ sont alors des fonctions symétriques des racines $1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1}$ de l'unité; ces fonctions sont donc indépendantes de λ, c'est-à-dire qu'on aura

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\ \varphi_1(b_0 b_1 \ldots b_{n-1}),\\
a_2 &= \quad \varphi_2(b_0 b_1 \ldots b_{n-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
a_j &= (-1)^j \varphi_j(b_0 b_1 \ldots b_{n-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
a_n &= (-1)^n \varphi_n(b_0 b_1 \ldots b_{n-1}),
\end{aligned}$$

$\varphi_j(b_0 b_1 \ldots b_{n-1})$ étant la somme des produits de j racines, c'est-à-dire une fonction rationnelle de $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Les égalités précédentes, au nombre de n, sont les conditions *nécessaires et suffisantes* auxquelles doivent satisfaire les quantités $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ pour que les racines se présentent sous la forme

$$x_i = f(\lambda^i) = b_0 + b_1\lambda^i + b_2\lambda^{2i} + b_3\lambda^{3i} + \ldots + b_{n-1}\lambda^{(n-1)i},$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Ces égalités sont donc les *équations* qui doivent déterminer les valeurs des coefficients $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$; elles forment un système de n équations, chacune à n inconnues $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$; on sait qu'en général un tel système d'équations algébriques admet des solutions et en admet un nombre limité; mais on sait aussi que, dans certains cas, des équations algébriques sont incompatibles; la démonstration précédente ne deviendrait suffisante qu'en démontrant que les équations précédentes sont compatibles et, pour cela, il faudrait étudier les fonctions φ. Au lieu de cette méthode directe, nous pouvons employer pour notre *démonstration* un moyen détourné qui, sans donner actuellement d'indications pour la résolution des équations $\varphi_i = (-1)^i a_i$, démontre que cette résolution est possible, c'est-à-dire qu'on peut trouver des valeurs des coefficients b, telles que l'on ait

$$x_i = f(\lambda^i) = b_0 + b_1\lambda^i + b_2\lambda^{2i} + \ldots + b^p\lambda^{pi} + \ldots + b_{n-1}\lambda^{(n-1)i},$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Dans les n égalités renfermées dans la précédente, considérons les n racines x_i comme des quantités connues, et voyons si, de ces égalités, on peut tirer les valeurs des quantités b'_p. Ces égalités forment un système de n équations du premier degré à n inconnues b_0, b_1, b_2, ..., b_{n-1} dont le déterminant est

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\
\lambda^0 & \lambda^1 & \lambda^2 & \lambda^3 & \ldots & \lambda^p & \ldots & \lambda^{n-1} \\
(\lambda^2)^0 & (\lambda^2)^1 & (\lambda^2)^2 & (\lambda^2)^3 & \ldots & (\lambda^2)^p & \ldots & (\lambda^p)^{n-1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(\lambda^p)^0 & (\lambda^p)^1 & (\lambda^p)^2 & (\lambda^p)^3 & \ldots & (\lambda^p)^p & \ldots & (\lambda^p)^{n-1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(\lambda^{n-1})^0 & (\lambda^{n-1})^1 & (\lambda^{n-1})^2 & (\lambda^{n-1})^3 & \ldots & (\lambda^{n-1})^p & \ldots & (\lambda^{n-1})^{n-1}
\end{vmatrix}$$

ou

$$\begin{aligned}
&(\lambda^1 - \lambda^0) \\
&\times(\lambda^2 - \lambda^1)(\lambda^2 - \lambda^0) \\
&\times(\lambda^3 - \lambda^2)(\lambda^3 - \lambda^1)(\lambda^3 - \lambda^0) \\
&\times(\lambda^4 - \lambda^3)(\lambda^4 - \lambda^2)(\lambda^4 - \lambda^1)(\lambda^4 - \lambda^0) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\times(\lambda^p - \lambda^{p-1})(\lambda^p - \lambda^{p-2})(\lambda^p - \lambda^{p-3})\times\ldots\times(\lambda^p - \lambda^0) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\times(\lambda^{n-1} - \lambda^{n-2})(\lambda^{n-1} - \lambda^{n-3})\times\ldots\times(\lambda^{n-1} - \lambda^0).
\end{aligned}$$

Or nous avons supposé que λ était une racine primitive de l'équation $\lambda^n = 1$; il s'ensuit qu'aucun des facteurs du produit précédent n'est nul, puisque λ^0, λ^1, λ^2, ..., λ^{n-1} sont tous différents; le déterminant des équations n'étant pas nul, on en conclut que l'on peut déterminer les quantités b_p en fonction des x_i de manière que

$$x_i = b_0 + b_1\lambda^i + b_2\lambda^{2i} + \ldots + b_{n-1}\lambda^{(n-1)i},$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Supposer que les x_i sont donnés est supposer simplement que les a_i sont donnés; donc les équations

$$a_i = (-1)^i \varphi_i(b_0 b_1 \ldots b_{n-1})$$

sont compatibles et déterminent des quantités $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ telles que les racines x_i aient la forme indiquée. La résolution des équations

$$a_i = (-1)^i \varphi_i(b_0 b_1 \ldots b_{n-1}), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

donne donc la résolution de l'équation algébrique générale du $n^{\text{ième}}$ degré à une inconnue.

La résolution des équations du deuxième, du troisième et du quatrième degré se fait ainsi très simplement et d'une manière uniforme.

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU DEUXIÈME DEGRÉ.

Soit

$$x^2 + px + q = 0$$

l'équation proposée. Les racines de $\lambda^2 = 1$ étant 1 et -1, on aura

$$x_0 = b_0 + b_1,$$
$$x_1 = b_0 - b_1,$$

d'où

$$-p = x_0 + x_1 = 2b_0,$$
$$q = x_0 x_1 = b_0^2 - b_1^2.$$

Donc

$$b_0 = -\frac{p}{2}, \qquad b_1 = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Prenant pour b_1 la valeur $+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, on aura

$$x_0 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$
$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

En prenant pour b_1 la valeur $-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, on aurait

$$x_0 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$
$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

qui est le même système de racines.

Remarque. — Connaissant b_0, on peut prendre pour inconnue

$$x - b_0 = z = x + \frac{p}{2};$$

l'équation se réduit alors à

$$z^2 = \frac{p^2}{4} - q,$$

qui a pour racines $+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ et $-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$; on a alors immédiatement les deux valeurs de x par l'égalité

$$x = -\frac{p}{2} + z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ.

Soit l'équation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

et soit λ l'une des racines primitives de l'équation

$$\lambda^3 = 1.$$

On aura

$$\begin{aligned} x_0 &= b_0 + b_1 + b_2, \\ x_1 &= b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2, \\ x_2 &= b_0 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} -p &= x_0 + x_1 + x_2 = 3b_0, \\ q &= x_0(x_1 + x_2) + x_1x_2 \\ &= (b_0 + b_1 + b_2)[2b_0 + (b_1 + b_2)(\lambda + \lambda^2)] \\ &\quad + b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_0(b_1 + b_2)(\lambda + \lambda^2) + b_1b_2(\lambda + \lambda^2), \\ -r &= x_0x_1x_2 \\ &= (b_0 + b_1 + b_2) \\ &\quad \times [b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_0(b_1 + b_2)(\lambda + \lambda^2) + b_1b_2(\lambda + \lambda^2)]. \end{aligned}$$

On a $\lambda + \lambda^2 = -1$; par suite, les équations deviennent

$$\begin{aligned} -p &= 3b_0, \\ q &= (b_0 + b_1 + b_2)[2b_0 - (b_1 - b_2)] \\ &\quad + b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 - b_0(b_1 + b_2) - b_1b_2, \\ -r &= (b_0 + b_1 + b_2)[b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 - b_0(b_1 + b_2) - b_1b_2], \end{aligned}$$

ou enfin

$$\begin{aligned} -p &= 3b_0, \\ q &= 3b_0^2 - 3b_1b_2, \\ -r &= b_0^3 + b_1^3 + b_2^3 - 3b_0b_1b_2. \end{aligned}$$

La première de ces équations donne

$$b_0 = -\frac{p}{3};$$

la seconde

$$b_1b_2 = b_0^2 - \frac{q}{3} = \frac{p^2}{9} - \frac{q}{3};$$

la troisième

$$b_1^3 + b_2^3 = -r - b_0^3 + 3b_0b_1b_2$$

ou, en vertu de la seconde,

$$b_1^3 + b_2^3 = -r - (q - 2b_0^2)b_0 = -r + \frac{pq}{3} - 2\frac{p^3}{27};$$

b_1^3 et b_2^3 sont donc racines de l'équation du second degré

$$\beta^2 - \left(\frac{pq}{3} - r - 2\frac{p^3}{27}\right)\beta + \left(\frac{p^2}{9} - \frac{q}{3}\right)^3 = 0.$$

On prendra les racines cubiques des racines de cette équation et on les associera deux à deux, de manière que leur produit $b_1 b_2$ soit égal à $\frac{p^2}{9} - \frac{q}{3}$. On aura ainsi trois systèmes de valeurs de b_1 et b_2 donnant chacun les racines x sous la forme indiquée.

Remarque. — Connaissant b_0, on peut commencer par mettre l'équation sous la forme dite réduite

$$z^3 + p_1 z + q_1 = 0,$$

en posant

$$z = x - b_0 = x + \frac{p}{3} \qquad \text{ou} \qquad x = z - \frac{p}{3},$$

$$p_1 = q - \frac{p}{3}, \qquad q_1 = -\left(\frac{pq}{3} - r - \frac{2p^3}{27}\right).$$

On a alors

$$\begin{aligned} z_0 &= x_0 - b_0 = b_1 + b_2, \\ z_1 &= x_1 - b_0 = b_1\lambda + b_2\lambda^2, \\ z_2 &= x_2 - b_0 = b_1\lambda^2 + b_2\lambda. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} p_1 &= z_0(z_1 + z_2) + z_1 z_2 \\ &= (b_1 + b_2)(b_1 + b_2)(\lambda + \lambda^2) + b_1 b_2(\lambda + \lambda^2) + b_1^2 + b_2^2 \\ &= -(b_1 + b_2)^2 - b_1 b_2 + b_1^2 + b_2^2 = -3 b_1 b_2, \\ -q_1 &= z_0 \times z_1 z_2 \\ &= (b_1 + b_2)[b_1^2 + b_2^2 + b_1 b_2(\lambda + \lambda^2)] = b_1^3 + b_2^3, \end{aligned}$$

ou enfin

$$b_1 b_2 = -\frac{p_1}{3},$$

$$b_1^3 + b_2^3 = -q_1;$$

b_1^3 et b_2^3 sont racines de l'équation du second degré

$$\beta^2 + q_1\beta - \frac{p_1^3}{27} = 0.$$

On associe les racines cubiques des deux valeurs de β de manière que leurs produits deux à deux soient égaux à $-\frac{p_1}{3}$, et l'on a les trois systèmes de valeurs de b_1 et b_2 qui, chacun, donnent les trois racines

$$z_{0,1,2} = x_{0,1,2} - b_0.$$

Si les valeurs prises pour b_1 et b_2 sont réelles, deux racines en z ou en x sont imaginaires, à moins que $b_1 = b_2$; la troisième racine est réelle; ce cas se présente lorsque les racines de l'équation en β sont réelles, c'est-à-dire lorsque

$$q_1^2 + \frac{4}{27}p_1^3 > 0.$$

Supposons, au contraire, qu'il n'y ait aucun des trois systèmes de valeurs de b_1, b_2 qui soit réel, c'est-à-dire que

$$q_1^2 + \frac{4}{27}p_1^3 < 0;$$

b_1^3 et b_2^3 sont imaginaires conjuguées, et il en est de même alors de b_1 et de b_2 (dont le produit est réel); il s'ensuit que, puisque λ et λ^2 sont imaginaires conjuguées, $b_1\lambda$ et $b_2\lambda^2$, d'une part, $b_1\lambda^2$ et $b_2\lambda$, d'autre part, sont aussi imaginaires conjuguées, ou enfin que x_0, x_1, x_2 sont toutes trois réelles. Il y a une racine double si $b_1 = b_2$, c'est-à-dire si

$$q_1^2 + \frac{4}{27}p_1^3 = 0,$$

$$x_1 = x_2 = b_0 + b_1(\lambda + \lambda^2) = b_0 - b_1.$$

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ.

Soit l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

dans laquelle on a annulé le terme en x^3.

Les racines sont

$$\begin{aligned}
x_0 &= b_1 + b_2 + b_3,\\
x_1 &= b_1\lambda + b_2\lambda^2 + b_3\lambda^3,\\
x_2 &= b_1\lambda^2 + b_2\lambda^3 + b_3\lambda^2,\\
x_3 &= b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda
\end{aligned}$$

où

$$\lambda^4 = 1, \qquad \lambda = -\sqrt{-1}, \qquad \lambda^2 = -1, \qquad \lambda^3 = \sqrt{-1}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
x_0 &= b_2 + b_1 + b_3,\\
x_1 &= -b_2 - (b_1 - b_3)\sqrt{-1},\\
x_2 &= b_2 - (b_1 + b_3),\\
x_3 &= -b_2 + (b_1 - b_3)\sqrt{-1}.
\end{aligned}$$

On peut remarquer sur ces expressions qu'on peut associer les racines deux à deux pour en faire les racines de deux équations du second degré

$$\begin{matrix} x_0 \\ x_2 \end{matrix} = b_2 \pm (b_1 + b_3), \qquad \begin{matrix} x_1 \\ x_3 \end{matrix} = -b_2 \pm (b_1 - b_3)\sqrt{-1},$$

et ceci conduit à la méthode de résolution de Descartes.

Appliquons notre méthode; nous aurons

$$\begin{aligned}
p &= x_0x_2 + x_1x_3 + (x_0 + x_2)(x_1 + x_3)\\
&= b_2^2 - (b_1 + b_3)^2 + b_2^2 + (b_1 - b_3)^2 + 2b_2(-2b_2)\\
&= -2b_2^2 - 4b_1b_3,\\
-q &= x_0x_2(x_1 + x_3) + x_1x_3(x_0 + x_2)\\
&= [b_2^2 - (b_1 + b_3)^2](-2b_2) + [b_2^2 + (b_1 - b_3)^2]2b_2\\
&= -4b_2(b_1^2 + b_3^2),\\
r &= [b_2^2 - (b_1 + b_3)^2][b_2^2 + (b_1 - b_3)^2].
\end{aligned}$$

Des deux premières équations on tire $b_1 b_3$ et $b_1^2 + b_3^2$, que l'on porte dans la dernière, et l'on a l'équation en b_2 :

$$r = \left(2b_2^2 + \frac{q}{4b_2} + \frac{p}{2}\right)\left(2b_2^2 - \frac{q}{4b_2} + \frac{p}{2}\right)$$

ou

$$r = \left(2b_2^2 + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{q^2}{16b_2^2},$$

équation du troisième degré en b_2^2. Ayant tiré b_2 de cette équation, on aura $b_1 b_3$ et $b_1^2 + b_3^2$ par les deux premières équations, et par suite b_1 et b_3 par une équation du second degré ou deux équations du premier degré.

SUR LES DROITES QU'ON PEUT PLACER SUR UNE SURFACE DE TROISIÈME CLASSE OU DE TROISIÈME ORDRE;

PAR M. E. G.,
Ancien élève du lycée de Reims.

Je rappellerai d'abord le théorème suivant :

La surface engendrée par les droites joignant les points homologues de deux divisions homographiques dont les bases ne sont pas dans un même plan est une surface réglée de deuxième classe.

Si l'homographie est exprimée par l'équation

$$A\alpha\beta + B\alpha + C\beta + D = 0,$$

la surface se réduit à deux plans quand on a

$$AD - BC = 0$$

ou

$$B = C = D = 0,$$

c'est-à-dire quand il existe sur chaque base un point tel que le point homologue puisse être quelconque sur l'autre base.

Cela posé, soient 3 divisions tracées sur 3 droites quelconques A, B, C. Nous dirons qu'elles sont homographiques si à 2 points pris sur 2 quelconques d'entre elles, l'un sur A, l'autre sur B, par exemple, en correspond un seul sur la troisième C. La relation la plus générale sera

$$(1)\quad A\alpha\beta\gamma + B\beta\gamma + C\gamma\alpha + D\alpha\beta + E\alpha + F\beta + G\gamma + H = 0,$$

α, β, γ étant les abscisses comptées respectivement sur A, B, C à partir d'origines quelconques.

Si 3 divisions homographiques sont tracées sur une même base, il y a 3 points triples.

La même définition s'appliquerait à 3 faisceaux de plans passant par des droites fixes. Il y a 3 plans triples quand les 3 faisceaux passent par la même droite.

Étant données 3 divisions homographiques tracées sur 3 bases quelconques, il y a 3 systèmes de points homologues en ligne droite.

En effet, soient a, b, c trois points homologues situés respectivement sur les 3 bases A, B, C. Joignons bc et menons un plan par cette droite et par chacune des droites B et C. Ces 2 plans rencontrent la droite A en b' et en c' et les 3 points a, b', c' tracent sur A 3 divisions homographiques, car à a et à b' correspond un seul point c' et à b' et c' correspond un seul point a. Ces 3 divisions tracées sur une même base ont 3 points triples correspondant chacun à 3 points a, b, c, situés en ligne droite.

Les plans déterminés par les points homologues de 3 divisions homographiques de bases quelconques enveloppent une surface de troisième classe.

En effet, si l'on mène des plans par une droite quelconque et par les points des 3 divisions, on obtient 3 faisceaux homographiques. Il y a 3 plans triples qui sont les plans tangents qu'on peut mener à la surface par la droite considérée. Les 3 bases sont situées sur la surface, car tout plan passant par l'une d'elles contient 3 points homologues.

Réciproquement, les plans tangents à une surface de troisième classe déterminent sur 3 droites A, B, C, situées sur la surface, 3 divisions homographiques.

En effet, prenons un point sur B et un sur C. Par la droite qui joint ces 2 points on peut mener 3 plans tangents à la surface. Deux d'entre eux passent par les 2 droites B et C et le troisième détermine sur l'autre droite A un seul point.

Une surface de troisième classe peut toujours être considérée comme enveloppe de plans passant par les points homologues de 3 divisions homographiques. Il suffit de faire voir qu'elle est assujettie au même nombre de conditions. Une surface de troisième classe est déterminée par 19 plans tangents. Or une droite équivaut à 4 conditions puisqu'il faut que 4 plans tangents passent par cette droite pour qu'elle soit sur la surface. Donc 3 droites équivalent à 12 conditions. La relation de l'homographie en donne 7; en tout 19.

Cela posé, soient A, B, C trois droites sur lesquelles sont tracées 3 divisions homographiques liées par la relation (1). Les plans qui passent par 3 points homologues enveloppent une surface Σ qui contient les 3 droites A, B, C.

Désignons par a un point de la droite A dont l'abscisse soit $\alpha = a$. A ce point correspondent, sur B et C, 2 divisions homographiques dont l'équation est

$$(2)\quad (\mathrm{A}a + \mathrm{B})\beta\gamma + (\mathrm{D}a + \mathrm{F})\beta + (\mathrm{C}a + \mathrm{G})\gamma + \mathrm{E}a + \mathrm{H} = 0.$$

Les droites qui joignent les points homologues de ces 2 divisions engendrent une surface de deuxième classe S.

Au point a, le cône circonscrit à la surface Σ se réduit à la droite A et à un cône du second ordre circonscrit à la surface S. Dans le cas où celle-ci se réduit à 2 plans, ce dernier cône se réduit lui-même à 2 droites qui sont celles qui joignent le point a aux 2 points auxquels correspond un homologue quelconque. Ce cas se présente si l'on a

$$(3)\qquad (\mathrm{A}a+\mathrm{B})(\mathrm{E}a+\mathrm{H})-(\mathrm{D}a+\mathrm{F})(\mathrm{C}a+\mathrm{G})=0.$$

On en tire 2 valeurs a_1, a_2 de a, c'est-à-dire 2 points sur la droite A.

Les points correspondants sur B et C ont pour abscisses respectives

$$b_1=-\frac{\mathrm{C}a_1+\mathrm{G}}{\mathrm{A}a_1+\mathrm{B}}=-\frac{\mathrm{E}a_1+\mathrm{H}}{\mathrm{D}a_1+\mathrm{F}},$$

$$c_1=-\frac{\mathrm{D}a_1+\mathrm{F}}{\mathrm{A}a_1+\mathrm{B}}=-\frac{\mathrm{E}a_1+\mathrm{H}}{\mathrm{C}a_1+\mathrm{G}},$$

$$b_2=-\frac{\mathrm{C}a_2+\mathrm{G}}{\mathrm{A}a_2+\mathrm{B}}=-\frac{\mathrm{E}a_2+\mathrm{H}}{\mathrm{D}a_2+\mathrm{F}},$$

$$c_2=-\frac{\mathrm{D}a_2+\mathrm{F}}{\mathrm{A}a_2+\mathrm{B}}=-\frac{\mathrm{E}a_2+\mathrm{H}}{\mathrm{C}a_2+\mathrm{G}},$$

au point

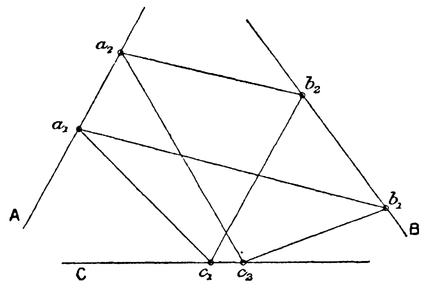
a_1	correspondent	b_1, c_1,
a_2	»	b_2, c_2.

On vérifierait aisément que les points analogues à a_1, a_2 sur les 2 autres droites sont b_1, b_2, c_1, c_2 et qu'au point

b_1	correspondent	a_1, c_2,
b_2	»	a_2, c_1,
c_1	»	a_1, b_2,
c_2	»	a_2, b_1.

Les 6 droites ainsi obtenues sont situées sur la surface. Elles forment avec les 3 premières un système de 9 droites où chacune en rencontre 4 autres. Elles se rencontrent 3 à 3 en 6 points.

Cela posé, je dis que toute droite située sur la surface Σ rencontre l'une au moins de ces 9 droites. En



effet, soit D une droite qui ne rencontre, par exemple, aucune des 3 droites A, B, C. Considérons les 3 divisions homographiques tracées sur les 3 droites A, B, D par les plans tangents à la surface. Il y a 3 systèmes de points homologues en ligne droite, et ces 3 droites, qui s'appuient sur A, B, D, sont situées sur la surface. De plus, elles ne peuvent pas rencontrer toutes trois la droite C, car si elles la rencontraient il y aurait 4 droites A, B, C, D qui s'appuieraient sur ces 3 droites.

Or nous venons de voir qu'il n'y a que 2 droites $a_2 b_2$ et $a_1 b_1$ s'appuyant sur A et B et ne rencontrant pas la droite C, lesquelles font partie des 9 droites précédemment trouvées. Donc la droite D rencontre au moins l'une de ces 2 droites.

Supposons maintenant que la surface S qui correspond à un point a de la droite A passe par ce point. On peut alors mener par ce point 2 génératrices de la surface S; l'une rencontre les 3 droites A, B, C, l'autre est du même système que B et C et ne rencontre que A. Ces 2 droites sont sur la surface Σ.

Or il y a sur la droite A trois points a_4, a_5, a_6 pour lesquels ce cas se présente, puisqu'il y a sur les 3 droites A, B, C trois systèmes de points homologues en ligne droite.

Il est facile de voir que la droite A ne peut pas être rencontrée par d'autres droites situées sur la surface Σ. Or, si l'on considère les 2 droites b_1c_2 et b_2c_1 qui ne la rencontrent pas et qui appartiennent au système des 9 déjà trouvées, les plans tangents à la surface déterminent sur ces 3 droites A, b_1c_2, b_2c_1 trois divisions homographiques. Il y a donc sur la surface 3 droites qui rencontrent ces 3 dernières. Ces droites ne peuvent être, d'après ce qui précède,, que celles issues des points a_4, a_5 et a_6 et ne rencontrant pas B et C.

On en peut conclure que toute droite située sur la surface Σ rencontre 3 droites du système des 9 premières. Or celles-ci peuvent se grouper de 6 manières en 3 droites ne se rencontrant pas. On a donc en tout sur la surface 27 droites :

1° Les 9 premières;

2° 18 droites s'appuyant chacune sur 3 des 9 précédentes.

Chacune de ces 27 droites possède évidemment les mêmes propriétés. Il en résulte que les 18 dernières peuvent se grouper 9 à 9 en 2 systèmes analogues au premier.

Ce groupement des 27 droites 9 à 9 est arbitraire et peut se faire d'une manière quelconque. Il ne dépend que du choix des 3 droites primitives A, B, C, lesquelles sont assujetties seulement à ne pas se rencontrer.

La transformation par polaires réciproques fournit les mêmes résultats relativement aux 27 droites qu'on peut placer sur une surface de troisième ordre. Dans la transformation les droites restent des droites, les points situés sur ces droites deviennent des plans qui les contiennent et réciproquement.

SUR UNE GÉNÉRATION DES COURBES PLANES UNICURSALES DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME ORDRE;

PAR M. ANDRÉ BIENAYMÉ,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Lacour).

I. — COURBES DU TROISIÈME ORDRE.

On sait que la projection sur un plan de l'intersection de deux surfaces du second degré ayant une génératrice commune est une courbe unicursale du troisième ordre. Nous nous proposons, en partant de la description de la courbe de l'espace, d'arriver en Géométrie plane à une description de sa projection.

Or, *quand, autour de trois droites données dans l'espace, on fait tourner trois plans formant trois faisceaux homographiques, le point d'intersection de ces trois plans décrit une courbe gauche du troisième ordre* (CHASLES, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 10 août 1857).

On pourrait déduire de là que la développable, ayant pour arête de rebroussement une cubique gauche, est le lieu des droites interceptant sur trois faisceaux de plans homographiques trois divisions dont les six points doubles sont confondus en un seul point; ce point est celui où la droite qui décrit la développable touche l'arête de rebroussement.

Revenons à la génération de Chasles, appelons D, D_1, D_2 les trois droites fixes; les trois intersections des plans variables deux à deux engendrent trois surfaces du second ordre, admettant chacune comme génératrices d'un même système deux des trois droites fixes. Considérons en particulier les deux surfaces qui admettent pour génératrice commune D. Soit p un point de leur intersection, c'est-à-dire de la cubique gauche; en p passe sur chaque surface une génératrice de système différent de D, rencontrant, l'une D et D_1 en l et l_1, l'autre D et D_2 en m et m_2; on a

$$(m\ldots) = (l\ldots)$$

(en désignant ainsi l'homographie des deux divisions marquées par m et l), puisque m et l sont les points d'intersection de plans homologues (D_2, p) et (D_1, p) de deux faisceaux homographiques.

On peut donc dire :

Quand deux surfaces du second ordre ont une génératrice commune D, deux génératrices respectivement de système différent de celui de D dans chaque surface, et qui se coupent en un point variable de la cubique d'intersection, décrivent respectivement sur deux génératrices du premier système dans chaque surface deux divisions homographiques.

Les deux génératrices variables rencontrent respectivement les deux génératrices fixes en deux points que nous avons appelés l_1, m_2, et la droite $l_1 m_2$ rencontre D en un point f. On peut donc dire :

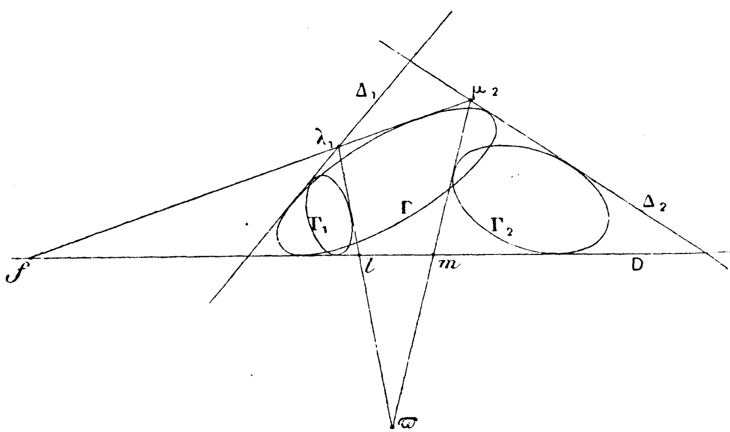
Étant données trois droites fixes D, D_1, D_2 *dans l'espace, une droite variable les rencontre en trois points* f, l_1, m_2, *on sait que* $(f\ldots) = (l_1\ldots) = (m_2\ldots)$; *sur* D *on prend deux divisions de points homographiques entre elles et aux précédentes,* l *et* m, *le point de concours des droites correspondantes,* ll_1, mm_2, *décrit une courbe gauche du troisième ordre.*

Il n'y a entre cette proposition et la description de Chasles qu'une différence d'énoncé, mais sous cette nouvelle forme la projection de la courbe de l'espace ou plutôt des éléments qui la déterminent est immédiate et nous sommes conduit à la proposition suivante dans le plan :

Proposition I. — *Soient, dans le plan, trois droites fixes* D, Δ_1, Δ_2, *et une droite variable qui les rencontre en des points* f, λ_1, μ_2, *décrivant trois divisions homographiques; sur* D *on prend deux divisions de points* l *et* m *homographiques entre elles et aux précédentes, le point de concours* ϖ *de* $l\lambda_1$ *et* $m\mu_2$ *décrit une courbe unicursale du troisième ordre.*

En effet (*fig.* 1), $f\lambda_1\mu_2$ enveloppe une conique Γ, tangente à D, Δ_1 et Δ_2; prenons un point de vue V et

Fig. 1.



D_2 arbitrairement dans le plan V Δ_2, considérons Δ_2 comme la projection de D_2 sur un plan passant par la droite D, qui, considérée dans l'espace, sera à elle-même sa projection dans le plan; μ_2 est la projection d'un point m_2 de D_2, $f\mu_2$ est la projection de fm_2; λ_1 est la projection d'un point l_1, intersection du plan fixe $V\Delta_1$ avec fm_2; toute la démonstration réside en ce que les points l_1 décrivent, dans le plan $V\Delta_1$, une droite D_1. Or $(f\ldots)=(\mu_2\ldots)$ par hypothèse, $(\mu_2\ldots)=(m_2\ldots)$, car le rapport anharmonique est projectif. Donc fm_2 dans l'espace engendre une surface du deuxième ordre S, admettant D et D_2 pour génératrices; mais le cône $V\Gamma$, de sommet V, de directrice Γ, est évidemment circonscrit à S, puisque toutes les génératrices fm_2 de S sont dans des plans $Vf\mu_2$ tangents au cône $V\Gamma$; le plan $V\Delta_1$ est tangent à ce cône : il coupe donc S suivant deux génératrices, dont l'une D_1 est le lieu des points l_1. Dès lors le point d'intersection de ll_1 et de mm_2 décrit une cubique gauche : donc sa projection ϖ décrit dans le plan une courbe du troisième ordre unicursale.

Les droites $l\lambda_1$ et $m\mu_2$ enveloppent chacune une conique; nous pouvons donc dire :

Étant données trois coniques Γ, Γ_1, Γ_2, *tangentes à une même droite* D, *soient* D_1 *et* D_2 *deux tangentes communes respectivement à* Γ *et* Γ_1, Γ *et* Γ_2; *une tangente variable à* Γ *rencontre* D_1 *et* D_2 *en deux points d'où l'on mène respectivement les secondes tangentes à* Γ_1 *et* Γ_2 : *l'intersection* p *de ces secondes tangentes décrit une courbe unicursale du troisième ordre.*

Cas particuliers. — En faisant se réduire à un système de deux points les coniques Γ_1 et Γ_2, ensemble ou séparément, Γ étant elle-même une conique véritable ou un système de deux points, on obtient différents énoncés conduisant à des cubiques unicursales particulières.

Donnons quelques exemples :

Proposition II. — *Par un point* G *d'une droite* D *on mène une transversale variable qui rencontre deux droites fixes* D_1, D_2 *en deux points* λ_1, μ_2; *de chacun de ces points respectivement on mène la seconde tangente à deux coniques* Γ_1, Γ_2, *tangentes respectivement à* D *et* D_1, D *et* D_2, *l'intersection des tangentes variables décrit une courbe unicursale du troisième ordre.*

Proposition III. — *Étant donnés une conique et un faisceau de droites, issues d'un point, qui correspondent anharmoniquement aux points dans lesquels une tangente variable rencontre une tangente fixe à cette conique, les rayons du faisceau rencontrent respectivement les tangentes en des points d'une cubique unicursale.*

Comme application de ce cas particulier, on peut démontrer la propriété bien connue de la podaire d'une parabole d'être une cubique unicursale.

Analogie avec la description des coniques de Chasles. — L'analogie est aussi complète qu'on peut le désirer, puisque dans le cas particulier de notre description où l'on suppose les deux coniques Γ_1 et Γ_2 décomposées en deux systèmes de deux points on retrouve la description des coniques de Chasles.

Remarquons que, lorsqu'une conique tangente à deux droites se décompose en un système de deux points, si l'un d'eux est le point d'intersection des deux droites, l'autre est arbitraire.

Faisons dégénérer en deux points les coniques Γ_1 et Γ_2 seulement, soient les points A et A', B et B', les points A' et B' étant choisis ainsi qu'il vient d'être dit; les droites $l\lambda_1$, $m\mu_2$ de la figure (1) passent par deux points fixes A, B, et forment deux faisceaux homographiques : donc leur intersection décrit une conique.

D'ailleurs, si l'on essayait de mettre le lieu décrit par leur intersection en perspective avec la courbe d'intersection de deux surfaces du second degré, on verrait encore que ces deux surfaces ont une génératrice commune; mais toutes les génératrices de la première s'appuient sur VA (V étant le point de vue), et celles de la seconde sur VB : VA et VB sont donc deux génératrices de ces surfaces respectivement et V un point de leur intersection qui est du troisième degré; la perspective de cette courbe quand on prenait le point de vue sur elle devait bien être une conique.

Autre description des coniques. — Si l'on suppose que les deux coniques formatrices Γ_1 et Γ_2 du cas général soient confondues en une seule conique, on a la propriété suivante :

Proposition IV. — *Étant données deux coniques* C *et* Γ, *inscrites dans le triangle des trois droites* D, D_1, D_2, *si l'on fait tourner une tangente sur* Γ, *et que des points* l_1, m_2 *où elle rencontre* D_1 *et* D_2 *on mène les secondes tangentes à* C, *leur intersection* p *décrit une conique.*

Ceci se voit directement par la mise en perspective. Soient l et m les points d'intersection de $l_1 p$, $m_2 p$ avec D. Les droites ll_1 et mm_2 peuvent être regardées comme les projections des génératrices de deux surfaces du second degré inscrites dans le cône ayant pour sommet le point de vue et pour base C; donc ces deux surfaces sont bitangentes, donc elles se coupent suivant deux courbes planes; or D fait déjà partie de leur intersection; elles admettent donc une deuxième génératrice commune (qui se projette suivant la quatrième tangente commune à C et à Γ); et une conique véritable, reste de leur intersection, se projette suivant le lieu de p.

Application. — On fera se réduire la conique Γ à un système de deux points. On retrouvera par là que le sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit a la parabole décrit une conique.

II. — Courbes du quatrième ordre.

Par induction nous énoncerons la description des quartiques unicursales planes, en enlevant au mode de génération donné pour les cubiques la particularité que présentent les trois coniques Γ, Γ_1, Γ_2, d'admettre une tangente commune.

Proposition V. — *Si deux tangentes variables à deux coniques décrivent sur deux taugentes fixes deux divisions homographiques, l'intersection des deux tangentes variables engendre une courbe unicursale du quatrième ordre.*

Pour le vérifier, projetons les coniques formatrices suivant deux cercles,

$$(x-a)\cos\alpha+(y-b)\sin\alpha-\text{R}=0$$

est l'équation d'une tangente à l'un d'eux, α étant l'angle du point du rayon de contact avec un rayon fixe, le rayon allant au point de contact de la tangente fixe, par exemple; si nous posons $\tan\frac{\alpha}{2}=t$, $\text{R}t$ représente l'abscisse du pied de la tangente variable sur la tangente fixe, comptée à partir du point de contact de cette dernière.

Un point du lieu est donc à l'intersection des droites

$$(1)\qquad (x-a)(1-t^2)+2t(y-b)-\text{R}(1+t^2)=0$$

et

$$(2)\qquad (x-a')(1-t'^2)+2t'(y-b')-\text{R}'(1+t'^2)=0,$$

t et t' étant liés par la relation homographique

$$\lambda tt' + \mu t + \nu t' + \rho = 0;$$

tirant t' en fonction de t et portant dans (2), on obtient une équation de la forme

$$A' t^2 + B' t + C' = 0,$$

qui, jointe à l'équation (1) que l'on peut écrire

$$A t^2 + B t + C = 0,$$

permet de construire le lieu, A, B, C, A', B', C' étant linéaires par rapport aux coordonnées d'un point de la courbe.

On a donc bien une quartique unicursale. Les deux coniques

$$\begin{cases} AB' - BA' = 0, \\ BC' - CB' = 0 \end{cases}$$

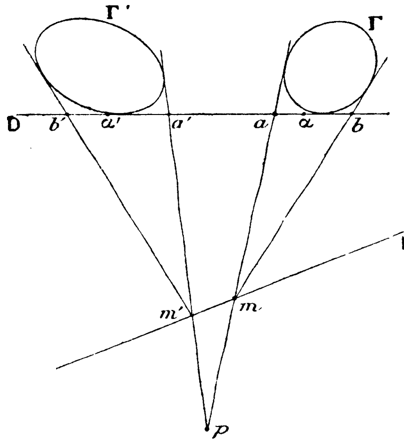
donnent par leur intersection les trois points doubles de la quartique et la solution étrangère

$$\begin{cases} B = 0, \\ B' = 0. \end{cases}$$

Autre démonstration du degré de la courbe obtenue d'après la construction précédente. — Considérons (*fig.* 2) les deux coniques formatrices Γ, Γ'; deux tangentes variables, pa et pa', sont assujetties à décrire sur une tangente commune D deux divisions de points $(a\ldots) = (a'\ldots)$. Soit une droite L, m et m' ses points d'intersection avec pa et pa', de m menons la seconde tangente à Γ et de m' à Γ', soient mb et $m'b'$ ces deux droites.

Quand m décrit L, à chaque point de L correspondent simultanément et indistinctement deux points a et b de D, mais à un point de D ne correspond qu'un seul point m de L. Donc, en vertu du principe de correspondance de Chasles, les segments ab sont en involution et correspondent anharmoniquement aux points m, de même les segments $a'b'$ sont en involution et cor-

Fig. 2.



respondent anharmoniquement aux points m'. C'est-à-dire que, si nous prenons les points $\alpha \ldots$, $\alpha' \ldots$, qui sont conjugués harmoniques, par rapport à a et b et par rapport à a' et b' respectivement, de deux points fixes arbitraires de D, nous avons

$$(m \ldots) = (\alpha \ldots) \qquad \text{et} \qquad (m' \ldots) = (\alpha' \ldots).$$

Prenons pour ces deux points fixes le point à l'infini de D, α est milieu de ab, et α' de $a'b'$. Si donc nous désignons par a, b, ... les abscisses des points a, b, ... comptées à partir d'origines arbitraires sur D et sur L, nous avons les cinq équations

$$aa' + \mathrm{U}a + \mathrm{V}a' + \mathrm{W} = 0, \tag{1}$$
$$a'^2 - 2a'\alpha' + \mathrm{A}'\alpha' + \mathrm{B}' = 0, \tag{2}$$
$$a^2 + 2a\alpha + \mathrm{A}\alpha + \mathrm{B} = 0, \tag{3}$$
$$\alpha m + \lambda\alpha + \mu m + \rho = 0, \tag{4}$$
$$\alpha' m' + \lambda'\alpha' + \mu' m' + \rho' = 0, \tag{5}$$

pour qu'un point de L soit point du lieu (*fig.* 2), il faut de plus la condition

$$m = m';$$

portant cette condition dans (4) et (5), nous obtenons

$$\frac{\lambda\alpha + \rho}{\alpha + \mu} = \frac{\lambda'\alpha' + \rho'}{\alpha' + \mu'}$$

ou

$$\alpha' = \frac{M\alpha + N}{L\alpha + P}.$$

Or (1) et (2) nous font également connaître α', car tirant de (1)

$$a' = -\frac{Ua + W}{a + V},$$

et portant dans (2), il vient

$$(Ua + W)^2 + 2\alpha'(a + V) + (A'\alpha' + B')(a + V)^2 = 0,$$

d'où

$$\alpha' = \frac{Qa^2 + Ra + S}{Q'a^2 + R'a + S'};$$

égalant les deux valeurs de α' tirées l'une de (4) et (5), l'autre de (1) et (2), il vient

$$\alpha = \frac{Xa^2 + Ya + Z}{X'a^2 + Y'a + Z'};$$

portant cette valeur dans (3), on obtient une équation du quatrième degré en a

$$\Delta_4 a^4 + \Delta_3 a^3 + \Delta_2 a^2 + \Delta_1 a + \Delta = 0,$$

dont les quatre racines font connaître quatre points a, donc quatre points m du lieu sur L.

Application. — Comme application, retrouvons que le limaçon de Pascal est une quartique unicursale. On sait engendrer le limaçon par le sommet A d'un angle de grandeur constante, droit par exemple, dont les côtés restent tangents à deux cercles C_1 et C_2.

Considérons une tangente commune à C_1 et C_2; montrons que les deux côtés de l'angle droit décrivent sur elle deux divisions homographiques. Or deux tangentes parallèles aux deux cercles décrivent sur elle deux divisions semblables et, d'autre part, deux tangentes rectangulaires à un même cercle décrivent évidemment aussi sur une tangente fixe deux divisions homographiques; donc le limaçon est retrouvé comme cas particulier de notre génération.

Intersection de la quartique avec les sécantes communes aux coniques fomatrices Γ_1, Γ_2. — Projetons les deux coniques Γ_1 et Γ_2 suivant deux cercles C_1 et C_2; on a facilement les directions asymptotiques dans ce cas particulier. En effet, considérons deux tangentes fixes à C_1 et C_2, D_1 et D_2; les deux tangentes variables Δ_1 et Δ_2, dont l'intersection décrit la courbe, donnent sur D_1 et D_2 deux divisions $(m_1 \ldots) = (m_2 \ldots)$; $m_1 m_2$ enveloppe une conique C tangente à D_1 et D_2; autour de C_1 et C_2 faisons tourner deux tangentes parallèles qui marquent sur D_1 et D_2 les divisions $(n_1 \ldots) = (n_2 \ldots)$; $n_1 n_2$ enveloppe une conique N tangente à D_1 et D_2; C et N admettent deux tangentes communes différentes de D_1 et D_2; l'une quelconque de ces deux tangentes donne sur D_1 et D_2 deux points homologues des divisions $m_1 \ldots$ et $m_2 \ldots$, par où passent deux droites Δ_1 et Δ_2 correspondantes et parallèles.

La conique N fait donc connaître deux directions asymptotiques de la quartique. Mais on peut s'assurer qu'il existe deux coniques N distinctes et deux seulement; donc on détermine les quatre directions asymptotiques dans le cas où les deux coniques formatrices sont deux cercles, et généralement on peut au moyen de six couples de deux coniques déterminer les vingt-quatre points d'intersection de la quartique et des six sécantes communes aux deux coniques formatrices.

Dans le cas de la cubique, C, C_1, C_2 ont une tangente commune, tangente à l'une des coniques N qui n'admet plus avec C qu'une tangente commune intéressante ici.

CONSIDÉRATIONS SUR LA GÉOMÉTROGRAPHIE;

PAR M. É. LEMOINE.

(Extrait d'une Lettre à M. ROUCHÉ.)

Dès que j'ai lu les observations que M. Soudée (voir *Nouvelles Annales*, 1893, p. 148) vous a écrites au sujet de l'examen fait par moi (voir *Nouvelles Annales*, 1892, p. 453) de la simplicité relative de diverses constructions du problème d'Apollonius, je me suis aperçu qu'elles portaient à côté de la méthode d'examen des constructions, méthode qui comprend aussi la façon de les diriger le plus simplement, que j'ai indiquée dans plusieurs Mémoires et, en particulier, d'une façon didactique, dans le Mémoire de l'Association française, Congrès de Pau, 1892, intitulé : *La Géométrographie* (1), mais qu'elles n'avaient pu être faites que parce que ce que j'avais exposé de la méthode dans ce journal, simplement pour rendre ma comparaison compréhensible aux lecteurs, n'était pas suffisant pour en donner connais-

---

(1) Chez Gauthier-Villars et fils, quai des Grands-Augustins, 55; 1892. Prix 2^{fr}.

sance et en faire comprendre l'esprit. J'écrivis immédiatement à M. Soudée en lui donnant les explications nécessaires et il reconnut très aimablement que j'avais raison, qu'il n'y avait plus lieu de faire des objections qui s'appliquaient, en réalité, à des choses que la *Géométrographie* ne disait nullement.

Comme, d'ailleurs, les mêmes objections se présenteraient à tout lecteur dans le même cas, je veux, non les réfuter en détail, il faudrait reproduire une partie de mon travail, mais faire quelques observations générales.

Je n'ai étudié jusqu'ici *en détail* que la *Géométrographie* de la Géométrie canonique des Grecs, c'est-à-dire de la droite et du cercle correspondant aux *constructions* faites avec la règle et le compas; l'équerre n'est pas admise, mais j'ai spécifié, dès l'origine de mes études sur cette matière (*Comptes rendus*, 1888) qu'il y avait une étude spéciale à faire pour le cas où l'on emploierait l'équerre, qui est indispensable en Géométrie descriptive, par exemple, et depuis j'ai montré qu'il y avait encore à étudier la *Géométrographie,* en admettant l'usage des règles divisées pour la statique graphique, etc.

La Géométrographie est toute spéculative, elle ne suit pas complètement la construction pratique, elle suppose la feuille d'épure infinie, les règles infinies, les compas aussi petits ou aussi grands qu'on le désire, etc., elle guide seulement la construction un peu comme la Mécanique rationnelle guide l'ingénieur.

J'ai choisi les mots coefficient de *simplicité,* coefficient d'*exactitude*, tout en ayant remarqué que coefficient de *complication* et coefficient d'*inexactitude* eussent été plus propres, mais comme ce que l'on recherche c'est la simplicité et l'exactitude, non la complication et l'inexactitude, j'ai accepté cette sorte d'antinomie dans les termes de même qu'on l'a acceptée en plusieurs cas dans la Science : ainsi le coefficient d'élasticité est d'autant plus petit que l'élasticité est plus grande.

Pour le géomètre, dès qu'une question est ramenée à des opérations qui peuvent s'effectuer avec la règle et le compas, le problème est considéré comme résolu et l'est effectivement à son point de vue. Il énonce l'*indication* d'une construction et s'arrête là. Il dira, par exemple :

On joint le centre radical P *de trois circonférences au centre* ω *du cercle inscrit au triangle formé par les trois polaires de* P *par rapport à ces trois circonférences*, aussi simplement qu'il dirait : *D'un point* K *de la droite* AB, *on abaisse une perpendiculaire* KH *sur la droite* CD *et l'on prolonge* KH, H *étant le pied de la perpendiculaire, d'une longueur égale à* KH, et parlera à l'occasion dans les mêmes termes de la simplicité ou de l'élégance de ces constructions. Or, le compas à la main, elles n'ont rien de comparable, la première exigeant environ 107 opérations élémentaires, la seconde en exigeant 12.

A la suite de la lettre de M. Soudée se trouve (*Nouvelles Annales*, p. 150; 1893) une lettre de M. Marchand à propos de ce même article; cette lettre, fort intéressante, montre que les solutions spéculatives examinées ont seulement des formes différentes, mais qu'au fond elles sont identiques, ce qui doit être vrai philosophiquement pour toutes les solutions d'une même question, et il montre le fil qui les relie. Je dois faire remarquer que, pour celui qui construit, elles sont essentiellement différentes, puisqu'il ne s'occupe précisément que de la forme à mettre à exécution.

Je crois alors utile de présenter ici un exemple plus simple, choisi au hasard, mais qui permettra de mettre en relief cette différence du point de vue où l'on s'est placé, *toujours jusqu'ici,* dans l'étude des questions géométriques, et de celui où je me place en Géométrographie, et qu'il est, à mon avis, indispensable de considérer *aussi.*

Je suppose que la solution d'un problème a été ramenée *finalement* à cette construction : *Diviser le diamètre* AB *d'un certain cercle au point* C' *tel que,* C *étant un point donné sur* AB, *on ait*

$$\frac{C'A}{BC'} = \frac{\overline{CA}^2}{\overline{BC}^2}.$$

Le géomètre s'arrêtera là, le problème est résolu.

Si on lui dit : Prenez le compas et exécutez la construction, il en choisira une à peu près quelconque, par exemple celle-ci :

Il tracera deux droites rectangulaires se coupant en C_1, prendra sur l'une $C_1A_1 = CA$, sur l'autre $C_1B_1 = CB$, joindra A_1B_1, projettera C_1 sur A_1B en γ, puis divisera AB en C' de telle sorte qu'on ait

$$\frac{A_1\gamma}{B_1\gamma} = \frac{AC'}{BC'},$$

C' sera placé ainsi par le géomètre au moyen d'une construction dont le symbole sera

$$\text{Op. : } (11\,R_1 + 7\,R_2 + 22\,C_1 + 13\,C_3),$$

et aura exigé 53 opérations élémentaires dont le tracé de 7 droites, de 13 cercles, probablement plus, s'il n'a pas opéré avec l'économie raisonnée qu'enseigne la *Géométrographie.*

Si, au contraire, on prend le problème au point où le géomètre l'avait considéré comme résolu, en cherchant méthodiquement la construction la plus simple du point C', on arrivera à la placer avec 17 opérations élémentaires, dont le tracé de 4 droites et de 2 cercles, en opérant ainsi : on place C_1 sur AB tel que $BC = AC_1$ et l'on trace la perpendiculaire élevée au milieu de AB, perpendiculaire qui coupe le cercle en K et en H, on trace KC_1 qui coupe le cercle en L, LC qui coupe le cercle en M, MH qui coupe AB en C'.

C' est alors obtenu simplement par le symbole

$$\text{Op.} : (8\,R_1 + 4\,R_2 + 3\,C_1 + 2\,C_3),$$

17 opérations élémentaires dont le tracé de 4 droites et de 2 cercles.

En effet, on a

$$L(CC_1AB) = H(C'OAB),$$

puisque les deux faisceaux qui partent de L ou de M et aboutissent aux quatre points M, K, A, B du cercle ont le même rapport anharmonique.

Or

$$(CC_1AB) = \frac{CA}{CB} : \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{\overline{CA}^2}{\overline{CB}^2}$$

et

$$(C'OAB) = \frac{C'A}{C'B} : \frac{OA}{OB} = \frac{C'A}{C'B},$$

donc

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{\overline{CA}^2}{\overline{CB}^2},$$

et, de quelque façon qu'on envisage la construction, il n'est pas possible de ne pas tenir compte de telles différences.

Rien ne dit d'ailleurs que ce soit le dernier mot des simplifications possibles à obtenir. Ainsi mon Mémoire de Pau sur la *Géométrographie,* cité plus haut, contenait l'examen de 63 constructions que j'avais déjà simplifiées par mes méthodes autant que je l'avais pu; 31 d'entre elles l'ont été encore davantage avec l'application plus étudiée de la même méthode par MM. Tarry, Bernès et par moi, et ces simplifications sont exposées dans un complément de mon Mémoire sur la Géométrographie, donné au Congrès de Besançon en 1893.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1895.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Mathématiques.

On donne une conique S et un triangle ABC conjugué par rapport à cette conique :

1° Démontrer que par un point quelconque P de S passent quatre coniques circonscrites au triangle ABC et touchant S chacune en un point autre que P;

2° Les points où ces quatre coniques touchent S sont situés sur une conique S_1 circonscrite au triangle ABC;

3° Quand le point P décrit la conique S, la conique S_1 enveloppe une courbe Γ du 4^e ordre;

4° D'un point M de la courbe Γ, on peut mener à cette courbe quatre tangentes autres que celle qui touche la courbe au point M. Démontrer que les points où ces quatre tangentes touchent Γ sont sur une même droite D et trouver l'enveloppe de la droite D quand le point M décrit la courbe Γ.

Physique.

I. Détermination de la densité des vapeurs.

II. Deux lentilles convergentes, de diamètres $2L$ et $2L'$, sont placées à une distance l'une de l'autre D, très grande par rapport à leurs distances focales f et f', les axes en coïncidence.

A une distance d de la première et concentriquement à l'axe, on place un objet lumineux ayant la forme d'un disque circulaire de rayon r, et de la même manière, à une distance d' derrière la seconde, un petit miroir sphérique de diamètre $2m$ et de distance focale φ; de telle sorte que les rayons émanés de l'objet, ramenés au point de départ, donnent de cet objet, ou tout au moins d'une portion de sa surface, une image réelle.

On demande :

1° Comment il faudra disposer de d et de d', de m et de φ pour utiliser au mieux, pour la formation de l'image, les rayons émanés de l'objet;

2° Quelle sera la grandeur de l'image de retour;

3° Son éclat intrinsèque;

4° Enfin quelle valeur il faudrait donner à L' pour avoir l'image entière du disque lumineux.

Chimie.

I. Hydracides étudiés dans le cours.

II. On dissout 24^{gr} de brome dans une solution concentrée contenant $16^{gr},8$ d'hydrate de potasse.

Le liquide porté à l'ébullition et évaporé à sec donne un résidu que l'on pèse.

Ce résidu calciné à une température élevée dégage un gaz dont on mesure le volume, et laisse un nouveau résidu dont on détermine le poids.

On mélange le gaz recueilli avec celui que l'on prépare en chauffant $28^{gr},8$ d'acide formique pur avec un excès d'acide sulfurique, et l'on fait passer une étincelle dans le mélange gazeux. Le résidu gazeux est agité avec une dissolution de potasse, et le nouveau résidu gazeux mesuré sec est mélangé avec un volume de chlore et exposé au soleil. On mesure ensuite le volume du gaz et on l'agite avec 10^{cc} d'eau.

On mesure le volume gazeux final.

On demande :

1° Le poids et la composition de chacun des résidus solides;

2° La nature et le volume à 0° et sous 760^{mm} des diverses masses gazeuses obtenues successivement.

Le coefficient de solubilité de l'acide carbonique dans l'eau est 1.

$$K = 39, \qquad Br = 80.$$

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Mathématiques et Mécanique.

I. On donne dans un plan un triangle fixe abc, et l'on considère un triangle ABC égal au triangle abc, et mobile dans le plan. On suppose le triangle mobile ABC d'abord superposé au triangle fixe abc, A en a, B en b, C en c.

Soit O un point du plan tel que, si l'on fait tourner autour de ce point le triangle mobile ABC de façon à l'amener de sa première position à une autre pour laquelle le côté AB est devenu parallèle au côté ac, le triangle ABC se place sur un triangle $a'b'c'$ (A en a', B en b', C en c'), tel que le sommet b' est situé sur la droite Oc.

1° Trouver la ligne (L) lieu des points O qui satisfont à cette condition.

2° Trouver le lieu décrit par chacun des sommets du triangle $a'b'c'$ quand le point O décrit la ligne (L).

II. Étant données, dans un plan, une parabole et une droite D perpendiculaire à l'axe de cette parabole, trouver sur l'axe de la parabole un point A tel que, si M est un point de la parabole et si P est le pied de la perpendiculaire à la droite D menée par le point M, la différence $\overline{MA}^2 - \overline{MP}^2$ est constante, quelle que soit la position du point M sur la parabole.

Trouver le lieu des points d'un plan tels que la différence des carrés des distances de chacun de ces points à un point A et à une droite D, donnée dans le plan, soit constante et égale à une quantité donnée.

Montrer que la connaissance de ce lieu permet de résoudre, avec la règle et le compas, le problème suivant :

Étant donnés dans un plan une droite D *et deux cercles* C, C', *mener un cercle qui soit tangent à la droite* D, *qui coupe le cercle* C *en deux points diamétralement opposés sur ce cercle* C, *et le cercle* C' *en deux points diamétralement opposés sur ce cercle* C'.

PREMIÈRE-SCIENCES (ENSEIGNEMENT MODERNE).

Mathématiques.

On considère l'ellipse E qui a pour grand axe AOA′ et pour foyers F et F′ :

1° Construire un cercle C bitangent (tangent en deux points) à la courbe E, ayant son centre en un point D donné sur AOA′, à une distance m du centre de l'ellipse. Déterminer géométriquement les points de contact.

2° Calculer la distance du centre de l'ellipse à la corde des contacts et le rayon du cercle C en fonction des données a, c, m.

Discuter ces valeurs. Examen du cas particulier où la corde des contacts passe par l'un des sommets du grand axe.

3° On considère deux cercles C et C′, ayant leurs centres sur AOA′, tous deux bitangents à l'ellipse E : prouver géométriquement que la somme (ou la différence) des longueurs des tangentes aux cercles C et C′, issues d'un point M de l'ellipse, ne varie pas quand ce point M se déplace sur la courbe.

Calculer la valeur de la constante en fonction de a, de c et des distances des cordes de contact au centre de l'ellipse.

RHÉTORIQUE.

Géométrie et Cosmographie.

On donne trois droites parallèles RR′, SS′, TT′, non situées dans un même plan, et sur la droite RR′ un point A, sur la droite SS′ un point B et sur la droite TT′ un point C. On convient d'appeler *mesures algébriques* de segments Aa, Bb, Cc, pris sur les parallèles données, les nombres qui sont les mesures des longueurs de ces segments, prises avec une même unité de longueur, chacun de ces nombres étant précédé du signe + ou du signe —, selon que le segment considéré est, par rapport au plan des trois points A, B, C, du même côté que la demi-droite AR, ou du côté opposé. On considère tous les plans qui coupent les trois parallèles données en des points a, b, c, tels que la somme des *mesures algébriques* des segments Aa, Bb, Cc soit constante et égale à un nombre donné.

1° Démontrer que tous les plans ainsi considérés ont un point commun.

2° Soit H un point donné dans l'espace. Trouver le lieu des projections de ce point H sur tous les plans considérés.

3° Soit H′ un second point donné dans l'espace. Trouver le lieu de la droite d'intersection de deux des plans considérés, tels que la projection du point H sur l'un se confonde avec la projection du point H′ sur l'autre.

4° Si, sans rien changer aux autres données du problème, on fait varier le nombre qui est la somme des mesures algébriques des segments Aa, Bb, Cc, le point commun G aux plans considérés se déplace, trouver la ligne décrite par ce point.

Déterminer sur cette ligne les positions du point G pour lesquelles l'angle HGH′ est égal à un angle donné, et discuter ce dernier problème dans le cas particulier où la droite HH′ est dans un plan perpendiculaire à la droite RR′.

SECONDE CLASSIQUE.

Algèbre et Géométrie.

I. Résoudre les équations

$$\frac{x}{a-1}+\frac{y}{a-3}+\frac{z}{a-5}=0,$$

$$\frac{x}{a-3}+\frac{y}{a-5}+\frac{z}{a-7}=0,$$

$$x+y+z=8.$$

Démontrer que les valeurs des inconnues peuvent être mises sous les formes suivantes :

$$x=(a-1)(a-3),$$
$$y=-2(a-3)(a-5),$$
$$z=(a-5)(a-7).$$

Déterminer le nombre a de manière que ces valeurs soient entières et positives.

II. On coupe un angle trièdre par un plan P qui rencontre les arêtes aux points A, B, C.

Trouver le lieu du point de rencontre des médianes du triangle ABC :

1° Lorsque le plan P se déplace, de manière que le point A reste fixe;

2° Lorsque le plan P se déplace, de manière que la droite AB reste fixe;

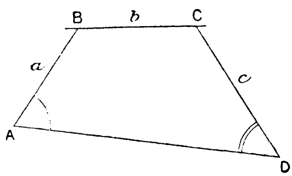
3° Lorsque le plan P se déplace, de manière que les différences (OB — OA) et (OC — OA) restent constantes. Le point O désigne le sommet de l'angle trièdre.

SECONDE MODERNE.

Mathématiques.

I. Dans le quadrilatère convexe ABCD, on donne

$$AB = a = 2652^{m},7,$$
$$BC = b = 3528^{m},6,$$
$$CD = c = 4715^{m},8,$$
$$\widehat{BAD} = 61^{\circ}32'15'',5,$$
$$\widehat{ADC} = 43^{\circ}58'45'',8.$$



Calculer le côté AD et les autres angles. (On se servira des Tables de logarithmes à 5 décimales.)

II. Étant donné un prisme oblique dont la base est le parallélogramme ABCD, et une droite xy, parallèle à la diagonale BD, dans le plan ABC, mener par xy un plan rencontrant les arêtes du prisme aux points A′, B′, C′, D′, de telle sorte que le volume du tronc de prisme ABCDA′B′C′D′ ait pour valeur m^3; on connaît l'aire p^2 de la section droite du prisme considéré. Indiquer toutes les constructions graphiques nécessaires pour obtenir les sommets de la section, m et p étant des lignes données.

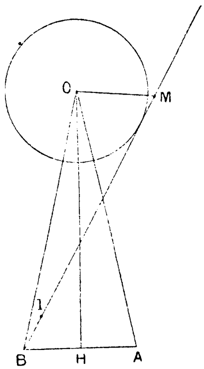
TROISIÈME CLASSIQUE.

Arithmétique, Algèbre et Géométrie.

I. Soit n un nombre entier quelconque; trouver le plus petit commun multiple des trois nombres

$$n, \quad n+1, \quad n+2.$$

II. Soit un triangle isoscèle OAB, ayant pour côtés égaux OA et OB, et pour hauteur OH; on décrit, du point O comme centre, un cercle C, de rayon arbitraire, et on lui mène deux



tangentes non symétriques par rapport à OH, issues l'une du point A, l'autre du point B; ces deux tangentes se coupent en un point M.

1° Trouver le lieu géométrique du point M, lorsque le rayon du cercle C varie.

2° Trouver, dans la même hypothèse, le lieu du point I, obtenu en portant sur MB, à partir de M, une longueur MI égale à MA.

3° Démontrer que le produit MA.MB est égal à la différence $\overline{OA}^2 - \overline{OM}^2$, ou à la différence $\overline{OM}^2 - \overline{OA}^2$, selon que l'on a

$$OA > OM \quad \text{ou} \quad OM > OA.$$

TROISIÈME MODERNE.

Mathématiques.

I. Soit M l'un des points du plan du triangle ABC, tels que les aires des triangles MBC, MCA, MAB soient proportionnelles aux nombres donnés a', b', c'.

1° Prouver que la droite qui joint deux quelconques des points M passe par un des sommets de ABC.

2° Un des points M étant connu, construire graphiquement tous les autres.

3° Calculer la somme algébrique des inverses des distances de tous les points M aux côtés de ABC, en fonction des longueurs a, b, c de ces côtés et des nombres a', b', c'.

II. Étant donnés quatre points A, B, C, D d'un même plan, on peut, par ces points, faire passer trois couples de deux droites (AB, CD), (AC, BD), (AD, BC).

1° Tracer par le point O, commun aux droites d'un même couple, une droite MON telle que le point O soit le milieu de la portion MN comprise entre les droites d'un deuxième couple. Examiner les cas possibles de figure, et donner le nombre des solutions.

2° Soit O′ le point commun aux droites de ce second couple. On représente par a, b, c, d les distances de ce point aux points A, B, C, D, et l'on propose de calculer la longueur MN : on supposera, pour ce calcul seulement, que les droites se coupant en O′ sont perpendiculaires entre elles; voir si la formule trouvée s'applique à tous les cas de la figure.

3° En supposant les quatre points A, B, C, D situés sur un même cercle, prouver que le centre de ce cercle se projette en O sur MN.

SUR LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DES FONCTIONS IMPLICITES;

PAR M. WORONTZOFF.

1. Soient

$$f_0(y),\quad f_1(y),\quad f_2(y),\quad \ldots,\quad f_m(y)$$

des fonctions algébriques ou transcendantes bien déterminées, r une racine simple de l'équation $f_0(y) = 0$ et

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} y = a + a_1 x + \frac{a_2}{1.2} x^2 + \frac{a_3}{1.2.3} x^3 + \ldots \\ + \frac{a_n}{1.2.3\ldots n} x^n + \mathrm{R} = a + \mathrm{X} \end{aligned} \right.$$

une racine commune des équations

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} & f_0(y) + x f_1(y) + x^2 f_2(y) \\ & \quad + x^3 f_3(y) + \ldots + x^m f_m(y) = 0 \end{aligned} \right.$$

et

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} & y - r + x \mathrm{F}_1(y) + x^2 \mathrm{F}_2(y) \\ & \quad + x^3 \mathrm{F}_3(y) + \ldots + x^m \mathrm{F}_m(y) = 0, \end{aligned} \right.$$

où

$$\mathrm{F}_1(y) = \frac{f_1(y)}{\Phi(y)}, \qquad \mathrm{F}_2(y) = \frac{f_2(y)}{\Phi(y)},$$

$$\mathrm{F}_3(y) = \frac{f_3(y)}{\Phi(y)}, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{F}_m(y) = \frac{f_m(y)}{\Phi(y)},$$

$$\Phi(y) = \frac{f_0(y)}{y - r}, \qquad \Phi(r) = f_0'(r), \qquad \Phi^n(r) = \frac{f_0^{(n+1)}(r)}{n+1}.$$

Nous nous proposons ici de déterminer les coefficients

$$a, \quad \frac{a_1}{1!}, \quad \frac{a_2}{2!}, \quad \ldots, \quad \frac{a_n}{n!},$$

dans la série (1).

2. Si $\mathrm{F}(u)$, $\mathrm{F}'(u)$, $\ldots$, $\mathrm{F}^{(n+1)}(u)$, pour les valeurs de u comprises entre $u_0 = f(\xi)$ et $u = f(\xi + z)$, et $f(t)$, $f'(t)$, $\ldots$, $f^{(n+1)}(t)$, pour les valeurs de t comprises entre $t_0 = \xi$ et $t = \xi + z$, sont des fonctions finies et continues, on a

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{F}[f(\xi + z)] \\ & \quad = \Big\{ \mathrm{F}(u_0) + \frac{(u - u_0)}{1} \mathrm{F}'(u_0) + \ldots \\ & \qquad + \frac{(u - u_0)^n}{1.2\ldots n} \mathrm{F}^{(n)}(u_0) \\ & \qquad + \frac{(u - u_0)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} \mathrm{F}^{(n+1)}[u_0 + \theta(u - u_0)] \Big\}_{u = f(\xi+z),\ u_0 = f(\xi)}; \end{aligned} \right.$$

$$(5)\quad \begin{cases} f(\xi+z) \\ \quad = f(\xi) + zf'(\xi) + z^2 \dfrac{f''(\xi)}{2!} + \ldots \\ \qquad + z^n \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!} + z^{n+1} f^{(n+1)} \dfrac{(\xi+\theta_1 z)}{(n+1)!} \\ \quad = C + C_1 z + \dfrac{C_2}{2!} z^2 + \dfrac{C_3}{3!} z^3 + \ldots \\ \qquad + \dfrac{C_n}{n!} z^n + z^{n+1} f^{(n+1)} \dfrac{(\xi+\theta_1 z)}{(n+1)!}, \end{cases}$$

où

$$C = f(\xi), \qquad C_n = f^{(n)}(\xi).$$

En remplaçant, dans le second membre de l'égalité (4), $f(\xi+z)$ par la série (5), on obtient

$$F[f(\xi+z)] = F[f(\xi)] + q_1 z + q_2 z^2 + q_3 z^3 + \ldots + q_n z^n + \ldots$$

et

$$\frac{\left\{ D_z^n F[f(\xi+z)] \right\}_{z=0}}{1.2\ldots n} \\ = q_n = \sum \frac{F^{(i)}(c)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!} \left(\frac{c_1}{1!}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{c_2}{2!}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{c_3}{3!}\right)^{\alpha_3} \cdots \left(\frac{c_n}{n!}\right)^{\alpha_n},$$

le signe sommatoire s'étendant à toutes les solutions entières positives des équations

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + n\alpha_n = n,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n = i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Mais

$$D_z^n F[f(\xi+z)] = D_\xi^n F[f(\xi+z)],$$
$$\left\{ D_z^n F[f(\xi+z)] \right\}_{z=0} = \left\{ D_\xi^n F[f(\xi+z)] \right\}_{z=0} = D_\xi^n F[f(\xi)];$$

par conséquent

$$(6)\quad \begin{cases} D_\xi^n F[f(\xi)] \\ \quad = n! \sum \dfrac{F^{(i)}[f(\xi)]}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots\alpha_n!} \\ \qquad \times \left[\dfrac{f'(\xi)}{1!}\right]^{\alpha_1} \left[\dfrac{f''(\xi)}{2!}\right]^{\alpha_2} \left[\dfrac{f'''(\xi)}{3!}\right]^{\alpha_3} \cdots \left[\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\right]^{\alpha_n} \\ \quad = n! \sum \dfrac{F^{(i)}(c)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha!\ldots\alpha_n!} \\ \qquad\qquad \times \left(\dfrac{c_1}{2!}\right)^{\alpha_1} \left(\dfrac{c_2}{2!}\right)^{\alpha_2} \left(\dfrac{c_3}{3!}\right)^{\alpha_3} \cdots \left(\dfrac{c_n}{n!}\right)^{\alpha_n} = D_\xi^n F(c), \end{cases}$$

où

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + n\alpha_n = n,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n = i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$$

(J. Bertrand, *Calcul différentiel*, p. 308).

3. Maintenant substituons $a + X$ au lieu de y, dans les équations (2) et (3), et supposons que les fonctions $f_0(a+X)$, $f_1(a+X)$, $f_2(a+X)$, ..., $f_m(a+X)$, $F_1(a+X)$, $F_2(a+X)$, ..., $F_m(a+X)$ soient développables suivant les puissances croissantes de X; on obtient alors, au moyen de la formule de Taylor,

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} & f_0(a) + X f_0'(a) + \frac{X^2}{2!} f_0''(a) + \ldots + \frac{X^n}{n!} f_0^{(n)}(a) + R_1 \\ & + x\Big[f_1(a) + X f_1'(a) + \frac{X^2}{2!} f_1''(a) + \ldots \\ & \qquad + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} f_1^{(n-1)}(a) + R_2\Big] \\ & + x^2\Big[f_2(a) + X f_2'(a) + \frac{X^2}{2!} f_2''(a) + \ldots \\ & \qquad + \frac{X^{n-2}}{(n-2)!} f_2^{(n-2)}(a) + R_3\Big] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + x^{m-2}\Big[f_{m-2}(a) + X f'_{m-2}(a) + \frac{X^2}{2!} f''_{m-2}(a) + \ldots \\ & \qquad + \frac{X^{n-m+2}}{(n-m+2)!} f^{(n-m+2)}(a) + R_{m-1}\Big] \\ & + x^{m-1}\Big[f_{m-1}(a) + X f'_{m-1}(a) + \frac{X^2}{2!} f''_{m-1}(a) + \ldots \\ & \qquad + \frac{X^{n-m+1}}{(n-m+1)!} f_{m-1}^{(n-m+1)}(a) + R_m\Big] \\ & + x^m\Big[f_m(a) + X f'_m(a) + \frac{X^2}{2!} f''_m(a) + \ldots \\ & \qquad + \frac{X^{n-m}}{(n-m)!} f_m^{(n-m)}(a) + R_{m+1}\Big] = 0\ (n > m) \end{aligned} \right.$$

et

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
& a - r + X + x\Big[F_1(a) + X F'_1(a) + \frac{X^2}{2!} F''_1(a) + \dots \\
& \qquad\qquad + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} F_1^{(n-1)}(a) + R'_1\Big] \\
& + x^2\Big[F_2(a) + X F'_2(a) + \frac{X^2}{2!} F''_2(a) + \dots \\
& \qquad\qquad + \frac{X^{n-2}}{(n-2)!} F_2^{(n-2)}(a) + R'_2\Big] \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + x^{m-2}\Big[F_{m-2}(a) + X F'_{m-2}(a) \\
& \qquad + \frac{X^2}{2!} F''_{m-2}(a) + \dots \\
& \qquad + \frac{X^{n-m+2}}{(n-m+2)!} F_{m-2}^{(n-m+2)}(a) + R'_{m-2}\Big] \\
& + x^{m-1}\Big[F_{m-1}(a) + X F'_{m-1}(a) \\
& \qquad + \frac{X^2}{2!} F''_{m-1}(a) + \dots \\
& \qquad + \frac{X^{n-m+1}}{(n-m+1)!} F_{m-1}^{(n-m+1)}(a) + R'_{m-1}\Big] \\
& + x^m\Big[F_m(a) + X F'_m(a) + \frac{X^2}{2!} F''_m(a) + \dots \\
& \qquad\qquad + \frac{X^{n-m}}{(n-m)!} F_m^{(n-m)}(a) + R'_m\Big] = 0 \; (n > m)
\end{aligned}
\right.
$$

où

$$
X = a_1 x + \frac{a_2}{2!} x^2 + \frac{a_3}{3!} x^3 + \dots + \frac{a_n}{n!} x^n + R.
$$

De l'identité (7), en y égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x, on déduit

$$
\begin{aligned}
& f_0(a) = 0, \\
& a_1 f'_0(a) + f_1(a) = 0, \\
& \frac{a_2}{1.2} f'_0(a) + \frac{a_1^2}{1.2} f''_0(a) + a_1 f'_1(a) + f_2(a) = 0, \\
& \frac{a_3}{1.2.3} f'_0(a) + \frac{a_1 a_2}{1.2} f''_0(a) + \frac{a_1^3}{1.2.3} f'''_0(a) \\
& \quad + \frac{a_2}{1.2} f'_1(a) + \frac{a_1^2}{1.2} f''_1(a) + a_1 f'_2(a) + f_3(a) = 0, \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;
\end{aligned}
$$

en considérant a comme fonction d'une variable fictive ξ, dont les dérivées successives seraient a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... et en ayant égard à la formule (6), on a généralement

$$(9)\left\{\begin{array}{l} D_\xi^p \frac{f_0(a)}{p!} + D_\xi^{p-1} \frac{f_1(a)}{(p-1)!} + D_\xi^{p-2} \frac{f_2(a)}{(p-2)!} + \dots \\ \qquad + D_\xi^2 \frac{f_{p-2}(a)}{2!} + D_\xi f_{p-1}(a) + f_p(a) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D_\xi^n \frac{f_0(a)}{n!} + D_\xi^{n-1} \frac{f_1(a)}{(n-1)!} + \dots \\ \qquad + D_\xi^{n-m+1} \frac{f_{m-1}(a)}{(n-m+1)!} + D_\xi^{n-m} \frac{f_m(a)}{(n-m)!} = 0, \end{array}\right.$$

où

$$p \leqq m, \qquad n \geqq m$$

et

$$D_\xi^k \frac{f_h}{k!}(a) = \sum \frac{f_h^{(i)}(a)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\dots\,\alpha_k!} \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{a_k}{k!}\right)^{\alpha_k},$$

le signe sommatoire s'étendant à toutes les solutions entières positives des équations

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k = k,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = i = 1, 2, 3, \dots, k.$$

L'identité (8) donne

$$(10)\left\{\begin{array}{r} a - r = 0, \\ a_1 + F_1(a) = 0, \\ \frac{a_2}{1.2} + a_1 F'_1(a) + F_2(a) = 0, \\ \frac{a_3}{1.2.3} + \frac{a_2}{1.2} F'_1(a) + \frac{a_1^2}{1.2} F''_1(a) + a_1 F'_2(a) + F_3(a) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \frac{a_p}{p!} + D_\xi^{p-1} \frac{F_1(a)}{(p-1)!} + D_\xi^{p-2} \frac{F_2(a)}{(p-2)!} + \dots \\ + D_\xi^2 \frac{F_{p-2}(a)}{2!} + D_\xi F_{p-1}(a) + F_p(a) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \frac{a_n}{n!} + D_\xi^{n-1} \frac{F_1(a)}{(n-1)!} + D_\xi^{n-2} \frac{F_2(a)}{(n-2)!} + \dots \\ + D_\xi^{n-m+1} \frac{F_{m-1}(a)}{(n-m+1)!} + D_\xi^{n-m} \frac{F_m(a)}{(n-m)!} = 0, \end{array}\right.$$

où

$$0 < p \leqq m, \qquad n \geqq m$$

et

$$D_\xi^k \frac{F_h(a)}{k!} = \sum \frac{F_h^{(i)}(a)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_k!}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{a_k}{k!}\right)^{\alpha_k}$$

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + k\alpha_k = k,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k.$$

Des égalités précédentes on tire

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
a &= r,\\
a_1 &= -\left[\frac{f_1(a)}{f_0'(a)}\right]_{a=r} = -[F_1(a)]_{a=r},\\
\frac{a_2}{1.2} &= -\left\{\frac{1}{f_0'(a)}\left[\frac{a_1^2}{1.2}f_0''(a) + a_1 f_1'(a) + f_2(a)\right]\right\}_{a=r}\\
&= -[a_1 F_1'(a) + F_2(a)]_{a=r},\\
\frac{a_3}{1.2.3} &= -\left\{\frac{1}{f_0'(a)}\left[\frac{a_1 a_2}{1.2}f_0''(a) + \frac{a_1^3}{1.2.3}f_0'''(a)\right.\right.\\
&\qquad + \frac{a_2}{1.2}f_1'(a) + \frac{a_1^2}{1.2}f_1''(a)\\
&\qquad \left.\left. + a_1 f_2'(a) + f_3(a)\right]\right\}_{a=r}\\
&= -\left[\frac{a_2}{1.2}F_1'(a) + \frac{a_1^2}{1.2}F_1''(a) + a_1 F_2'(a) + F_3(a)\right]_{a=r},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{a_p}{1.2\ldots p} &= -\left(\frac{1}{f_0'(a)}\left\{\sum \frac{f_0^{(j)}(a)}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_{p-1}!}\right.\right.\\
&\qquad \times\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\beta_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\beta_2}\cdots\left[\frac{a_{p-1}}{(p-1)!}\right]^{\beta_{p-1}}\\
&\qquad + D_\xi^{p-1}\frac{f_1(a)}{(p-1)!} + D_\xi^{p-2}\frac{f_2(a)}{(p-2)!} + \ldots\\
&\qquad \left.\left. + D_\xi^2 \frac{f_{p-2}(a)}{2!} + D_\xi f_{p-1}(a) + f_p(a)\right\}\right)_{a=r}\\
&= -\left[D_\xi^{p-1}\frac{F_1(a)}{(p-1)!} + D_\xi^{p-2}\frac{F_2(a)}{(p-2)!} + \ldots\right.\\
&\qquad \left. + D_\xi^2\frac{F_{p-2}(a)}{2!} + D_\xi F_{p-1}(a) + F_p(a)\right]_{a=r}\\
&= -\left[\sum_{k=1}^{k=p} D_\xi^{p-k}\frac{F_k(a)}{(p-k)!}\right]_{a=r}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.$$

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{a_n}{1.2\ldots n} &= -\left\{ \frac{1}{f_0'(a)} \left[\sum \frac{f_0^{(j)}(a)}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_{n-1}!} \right.\right. \\
&\qquad \times \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\beta_1} \left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\beta_2} \cdots \left[\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\right]^{\beta_{n-1}} \\
&\qquad + D_\xi^{n-1} \frac{f_1(a)}{(n-1)!} + D_\xi^{n-2} \frac{f_2(a)}{(n-2)!} + \ldots \\
&\qquad + D_\xi^{n-m+1} \frac{f_{m-1}(a)}{(n-m+1)!} \\
&\qquad\qquad \left.\left. + D_\xi^{n-m} \frac{f_m(a)}{(n-m)!} \right] \right\}_{a=r} \\
&= -\left[D_\xi^{n-1} \frac{F_1(a)}{(n-1)!} + D_\xi^{n-2} \frac{F_2(a)}{(n-2)!} + \ldots \right. \\
&\qquad \left. + D_\xi^{n-m+1} \frac{F_{m-1}(a)}{(n-m+1)!} + D_\xi^{n-m} \frac{F_m(a)}{(n-m)!} \right]_{a=r} \\
&= -\left[\sum_{k=1}^{k=m} D_\xi^{n-k} \frac{F_k(a)}{(n-k)!} \right]_{a=r}
\end{aligned}
\right.
$$

où

$$n > m \geqq p > 0$$

et

$$
\begin{gathered}
1\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + (p-1)\beta_{p-1} = p. \\
\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{p-1} = j = 2, 3, \ldots, p, \\
1\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + (n-1)\beta_{n-1} = n, \\
\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-1} = j = 2, 3, \ldots, n.
\end{gathered}
$$

Par conséquent on a

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
y = r - \frac{1}{f_0'(r)} \Bigg\{ & x f_1(r) + x^2 \left[S_2 + \sum_{k=1}^{k=2} D_\xi^{2-k} \frac{f_k(a)}{(2-k)!} \right]_{a=r} \\
& + x^3 \left[S_3 + \sum_{k=1}^{k=3} D_\xi^{3-k} \frac{f_k(a)}{(3-k)!} \right]_{a=r} + \ldots \\
& + x^p \left[S_p + \sum_{k=1}^{k=p} D_\xi^{p-k} \frac{f_k(a)}{(p-k)!} \right]_{a=r} + \ldots \\
& + x^n \left[S_n + \sum_{k=1}^{k=m} D_\xi^{n-k} \frac{F_k(a)}{(n-k)!} \right]_{a=r} + \ldots \Bigg\}
\end{aligned}
\right.
$$

$$(12)\quad \begin{cases} y = r - x\,F_1(r) - x^2\left[\sum_{k=1}^{k=2} D_\xi^{2-k}\,\frac{F_k(a)}{(2-k)!}\right]_{a=r} \\ \qquad - x^3\left[\sum_{k=1}^{k=3} D_\xi^{3-k}\,\frac{F_k(a)}{(3-k)!}\right]_{a=r} - \ldots \\ \qquad - x^p\left[\sum_{k=1}^{k=p} D_\xi^{p-k}\,\frac{F_k(a)}{(p-k)!}\right]_{a=r} - \ldots \\ \qquad - x^m\left[\sum_{k=1}^{k=m} D_\xi^{m-k}\,\frac{F_k(a)}{(m-k)!}\right]_{a=r} - \ldots \\ \qquad - x^n\left[\sum_{k=1}^{k=m} D_\xi^{n-k}\,\frac{F_k(a)}{(n-k)!}\right]_{a=r} - \ldots, \end{cases}$$

où

$$n \geqq m, \qquad m \geqq p > 1,$$

$$S_k = \sum \frac{f_0^{(j)}(a)}{\beta_1!\,\beta!\ldots\beta_{k-1}!} \times \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\beta_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\beta_2}\cdots\left[\frac{a_{k-1}}{(k-1)!}\right]^{\beta_{k-1}}$$

$$= \frac{1}{k!}\left[D_\xi^k f_0(a) - a_k f_0'(a)\right],$$

$$1\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + (k-1)\beta_{k-1} = k,$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{k-1} = j = 2, 3, \ldots, k;$$

$$(13)\quad \begin{cases} D_\xi^k F_h(a) = D_\xi^k \frac{f_h(a)}{\Phi(a)} = D_\xi^k \frac{f_h(a)}{\left[\frac{f_0(a)}{a-r}\right]} \\ \qquad = k!\sum \frac{D_a^i F_h(a)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_k!}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{a_k}{k!}\right)^{\alpha_k}, \\ \Phi^{(k)}(r) = \frac{f_0^{(k+1)}(r)}{k+1}, \end{cases}$$

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + k\alpha_k = k,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = i = 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad k.$$

En généralisant la première formule (12), on obtient

$$
(14)\quad \left\{
\begin{aligned}
F(y) = F(r) &+ \frac{x}{1}\,[D_\xi F(a)]_{a=r} \\
&+ \frac{x^2}{1.2}\left[D_\xi^2 F(a)\right]_{a=r} + \frac{x^3}{1.2.3}\left[D_\xi^3 F(a)\right]_{a=r} + \ldots \\
&+ \frac{x^q}{1.2\ldots q}\left[D_\xi^q F(a)\right]_{a=r} + \ldots \text{ (1)}.
\end{aligned}
\right.
$$

4. Considérons quelques cas particuliers :

1° Si l'on pose

$$
f_0(y) = r - y, \qquad f_1(y) = f(y),
$$
$$
f_2(y) = 0, \qquad f_3(y) = 0, \qquad \ldots, \qquad f_m(y) = 0,
$$

on a

$$
y = r + x f(y)
$$

ou

$$
x = \frac{y - r}{f(y)} = \varphi(y), \qquad F_1(y) = -f(y)
$$

et

$$
\begin{aligned}
y = \Big[a &+ x f(a) + \frac{x^2}{1} D_\xi f(a) \\
&+ \frac{x^3}{1.2} D_\xi^2 f(a) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots(n-1)} D_\xi^{n-1} f(a) + \ldots \Big]_{a=r}.
\end{aligned}
$$

La formule de Lagrange, démontrée rigoureusement, dans ces derniers temps, par M. Rouché (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XXXIX, et *Cours d'Algèbre supérieure* par J.-A. Serret, 1885, t, I, p. 466),

---

(1) Les relations (9) et (10) peuvent être déduites des équations (2) et (3) aussi à l'aide de cette formule, en prenant

$$
y = a + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{1.2} + \ldots.
$$

donne

$$y = \left\{ a + x f(a) + \frac{x^2}{1.2} \mathrm{D}_a [f(a)]^2 + \frac{x^3}{1.2.3} \mathrm{D}_a^2 [f(a)]^3 + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} \mathrm{D}_a^{n-1} [f(a)]^n + \ldots \right\}_{a=r}$$

$$= r + x f(r) + \frac{x^2}{1.2} \mathrm{D}_r [f(r)]^2 + \frac{x^3}{1.2.3} \mathrm{D}_r^2 [f(r)]^3 + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} \mathrm{D}_r^{n-1} [f(r)]^n + \ldots.$$

On a aussi (*Nouvelles Annales*, p. 362; 1888)

$$y = \left\{ a + x \left[\frac{1}{\varphi'(a)} \mathrm{D}_a \right] a + \frac{x^2}{1.2} \left[\frac{1}{\varphi'(a)} \mathrm{D}_a \right]^2 a + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} \left[\frac{1}{\varphi'(a)} \mathrm{D}_a \right]^n a + \ldots \right\}_{a=r}.$$

Par conséquent

$$\frac{a_n}{n!} = \left[\mathrm{D}_\xi^{n-1} \frac{f(a)}{(n-1)!} \right]_{a=r}$$

$$= \left\{ \sum \frac{f^{(i)}(a)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_{n-1}!} \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\alpha_2} \cdots \left[\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\right]^{\alpha_{n-1}} \right\}_{a=r,\, n>1}$$

$$= \left\{ \mathrm{D}_a^{n-1} \frac{[f(a)]^n}{n!} \right\}_{a=r}$$

$$= \sum (n-1)! \left[\frac{f(r)}{(n-i)!\,\alpha_1!\,\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}!} \right]^{n-i} \times \left[\frac{f'(r)}{1!}\right]^{\alpha_1} \left[\frac{f''(r)}{2!}\right]^{\alpha_2} \cdots \left[\frac{f^{(n-1)}(r)}{(n-1)!}\right]^{\alpha_{n-1}}_{n>1}$$

$$= \frac{1}{n!} \left\{ \left[\frac{1}{\varphi'(a)} \mathrm{D}_a \right]^n a \right\}_{a=r},$$

où

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (n-1)\alpha_{n-1} = n-1,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} = i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

2° Prenons

$$f_0(y) = f(y), \qquad f_1(y) = -1,$$

$$f_2(y) = 0, \qquad \ldots, \qquad f_m(y) = 0;$$

alors

$$f(y)=x, \qquad y=r+x\left[\frac{1}{\Phi(y)}\right], \qquad F_1(y)=-\frac{1}{\Phi(y)},$$

$$\Phi(y)=\frac{f(y)}{y-r},\ f(r)=0,$$

$$\Phi(r)=f'(r),\ \Phi^k(r)=\frac{f^{(k+1)}(r)}{k+1},$$

et

$$y=\left[a+x\frac{1}{\Phi(a)}+\frac{x^2}{1}D_\xi\frac{1}{\Phi(a)}+\frac{x^3}{1.2}D_\xi^2\frac{1}{\Phi(a)}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{x^n}{1.2\ldots(n-1)}D_\xi^{n-1}\frac{1}{\Phi(a)}+\ldots\right]_{a=r}.$$

La formule de Lagrange donne

$$y=\left\{a+x[\Phi(a)]^{-1}+\frac{x^2}{1.2}D_a[\Phi(a)]^{-2}\right.$$
$$+\frac{x^3}{1.2.3}D_a^2[\Phi(a)]^{-3}+\ldots$$
$$\left.+\frac{x^n}{1.2\ldots n}D_a^{n-1}[\Phi(a)]^{-n}+\ldots\right\}_{a=r}.$$

On a aussi

$$y=\left\{a+x\left[\frac{1}{f'(a)}D_a\right]a+\frac{x^2}{1.2}\left[\frac{1}{f'(a)}D_a\right]^2a+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{x^n}{1.2\ldots n}\left[\frac{1}{f'(a)}D_a\right]^n a+\ldots\right\}_{a=r}.$$

Par suite

$$\frac{a_n}{n!}=\left\{D_\xi^{n-1}\frac{[\Phi(a)]^{-1}}{(n-)!}\right\}_{a=r}$$
$$=-\left\{\frac{1}{f'(a)}\sum\frac{f^{(j)}(a)}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_{n-1}}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\beta_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\beta_2}\cdots\left[\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\right]^{\beta_{n-1}}\right\}_{a=r,\ n>1}$$
$$=\left\{D_a^{n-1}\frac{[\Phi(a)]^{-n}}{n!}\right\}_{a=r}=\sum\frac{(-1)^i(n+i-1)!\,[f'(r)]^{-(n+i)}}{n!\,\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_{n-1}!}$$
$$\times\left[\frac{f''(r)}{2!}\right]^{\alpha_1}\left[\frac{f'''(r)}{3!}\right]^{\alpha_2}\cdots\left[\frac{f_n(r)}{n!}\right]^{\alpha_{n-1}}_{n>1}=\frac{1}{n!}\left\{\left[\frac{1}{f'(a)}D_a\right]^n a\right\}_{a=r},$$

où

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (n-1)\alpha_{n-1} = n-1,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} = i = 1, 2, 3, \ldots, n-1,$$
$$1\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + (n-1)\beta_{n-1} = n,$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-1} = j = 2, 3, \ldots, n.$$

3° Soit

$$f(x, y) = P_0(y) + x P_1(y) \\ + x_2 P_2(y) + \ldots + x^{m-1} P_{m-1}(y) + x^m P_m(y) = 0,$$

où

$$P_0(y) = A_0 y^m + B_0 y^{m-1} + C_0 y^{m-2} + \ldots + K_0 y^2 + L_0 y + M_0,$$
$$P_1(y) = A_1 y^{m-1} + B_1 y^{m-2} + C_1 y^{m-3} + \ldots + K_1 y + L_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$P_{m-1}(y) = A_{m-1} y + B_{m-1}, \; P_m(y) = A_m.$$

Alors, en faisant $\frac{y}{x} = u$ et $\frac{1}{x} = z$, on a aussi

$$x^m [Q_0(u) + z Q_1(u) \\ + z^2 Q_2(u) + \ldots + z^{m-1} Q_{m-1}(u) + z^m Q_m(u)] = 0,$$
$$Q_0(u) + z Q_1(u) + z^2 Q_2(u) + \ldots \\ + z^{m-1} Q_{m-1}(u) + z^m Q_m(u) = 0,$$

où

$$Q_0(u) = A_0 u^m + A_1 u^{m-1} + A_2 u^{m-2} + \ldots + A_{m-1} u + A_m,$$
$$Q_1(u) = B_0 u^{m-1} + B_1 u^{m-2} + B u^{m-3} + \ldots + B_{m-2} u + B_{m-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$Q_{m-1}(u) = L_9 u + L_1, \; Q_m(u) = M_0.$$

Par suite, nous pouvons obtenir, dans ce cas, les séries suivantes

$$y = a + a_1 x + \frac{a_2}{1.2} x^2 + \frac{a_3}{1.2.3} x^3 + \ldots + \frac{a_n}{1.2\ldots n} x^n + \ldots,$$
$$u = b + b_1 z + \frac{b_2}{1.2} z^2 + \frac{b_3}{1.2.3} z^3 + \ldots + \frac{b_n}{1.2\ldots n} z^n + \ldots$$

et

$$y = xu \\ = bx + b_1 + \frac{b_2}{1.2.x} + \frac{b_3}{1.2.3.x^2} + \ldots + \frac{b_n}{1.2\ldots n x^{n-1}} + \ldots,$$

où les coefficients a, a_1, ..., $\frac{a_n}{n!}$ et b, b_1, ..., $\frac{b_n}{n!}$ se détermineront au moyen des formules (11), en y remplaçant respectivement

$$f'_0(r),\quad f''_0(r),\quad \ldots,\quad f_k(r),\quad f'_k(r),\quad f''_k(r),\quad \ldots,$$

par

$$P'_0(r),\quad P''_0(r),\quad \ldots,\quad P_k(r),\quad P'_k(r),\quad P''_k(r),\quad \ldots,$$

et par

$$Q'_0(r_1),\quad Q''_0(r_1),\quad \ldots,\quad Q_k(r_1),\quad Q'_k(r_1),\quad Q''_k(r_1),\quad \ldots,$$

et en supposant que r, r_1 soient des racines simples des équations $P_0(y)=0$, $Q_0(u)=0$ respectivement (J.-A. Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, 1885, t. I, p. 610).

4° Enfin, posons, dans l'équation (2), $f_0(y)=r-y$; on a alors

$$y=r+xf_1(y)+x^2f_2(y)+x^3f_3(y)+\ldots+x^mf_m(y)$$

et

$$\begin{aligned} y = r & \\ & + xf_1(r)+x^2\left[\sum_{k=1}^{k=2}\frac{D_\xi^{2-k}f_k(a)}{(2-k)!}\right]_{a=r} \\ & + x^3\left[\sum_{k=1}^{k=3}\frac{D_\xi^{3-k}f_k(a)}{(3-k)!}\right]_{a=r} + \ldots \\ & + x^p\left[\sum_{k=1}^{k=p}\frac{D_\xi^{p-k}f_k(a)}{(p-k)!}\right]_{a=r} + \ldots \\ & + x^m\left[\sum_{k=1}^{k=m}\frac{D_\xi^{m-k}f_k(a)}{(m-k)!}\right]_{a=r} + \ldots \\ & + x^n\left[\sum_{k=1}^{k=m}\frac{D_\xi^{n-k}f_k(a)}{(n-k)!}\right]_{a=r} + \ldots; \end{aligned}$$

ou, généralement,

$$\begin{aligned}F(y)= F(r)+ \frac{x}{1}\,[D_\xi\, F(a)]_{a=r} \\ + \frac{x_2}{1.2}\left[D_\xi^2\, F(a)\right]_{a=r} \\ + \frac{x_3}{1.2.3}\left[D_\xi^3\, F(a)\right]_{a=r}+\ldots \\ + \frac{x^q}{1.2\ldots q}\left[D_\xi^q\, F(a)\right]_{a=r}+\ldots,\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\left[\frac{D_\xi^q\, F(a)}{q\,!}\right]_{a=r} = \sum \frac{F^{(i)}(r)}{\alpha_1\,!\,\alpha_2\,!\ldots\alpha_q\,!}\,[f_1(r)]^{\alpha_1} \\ \times\left[\sum_{k=1}^{k=2}\frac{D_\xi^{2-k} f_k(a)}{(2-k)!}\right]_{a=r}^{\alpha_2}\ldots \\ \times\left[\sum_{k=1}^{k=p}\frac{D_\xi^{p-k} f_k(a)}{(p-k)!}\right]_{a=r}^{\alpha_p}\ldots \\ \times\left[\sum_{k=1}^{k=m}\frac{D_\xi^{q-k} f_k(a)}{(q-k)!}\right]_{a=r}^{\alpha_q},\end{aligned}$$

$$(p \leqq m).$$

5. Soit

$$Y = \alpha + a_1 x + \frac{a_2}{1.2}\,x^2 + \ldots + \frac{a_m}{1.2\ldots m}\,x^m + \ldots$$

une racine de l'équation générale (algébrique ou transcendante)

$$f(y, x) = 0.$$

Prenons la fonction de t

$$\Phi(t) = f(y, x, t) = f(y, z),$$

où $z = xt$ et les variables y, x ne dépendent pas de t, de sorte que

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^k f}{\partial t^k} = x^k\,\frac{\partial^k f}{\partial z^k},$$

et supposons que cette fonction, pour les valeurs de t

comprises entre o et 1, soit développable, par la formule de Maclaurin, suivant les puissances croissantes de t; on a alors

$$\begin{aligned}
f(y, xt) = f(y, z) = \psi(t) &= \psi(0) + t\psi'(0) \\
&+ \frac{t^2}{1.2}\psi''(0) + \ldots + \frac{t^m}{1.2\ldots m}\psi^{(m)}(0) + \ldots \\
&= f(y, 0) + tx[D_z f(y, z)]_{z=0} \\
&+ \frac{t^2 x^2}{1.2}[D_z^2 f(y, z)]_{z=0} + \ldots \\
&+ \frac{t^m x^m}{1.2\ldots m}[D_z^m f(y, z)]_{z=0} + \ldots,
\end{aligned}$$

en posant

$$\begin{gathered}
f(y, 0) = f_0(y), \qquad [D_z f(y, z)]_{z=0} = f_1(y), \\
\left[\frac{D_z^2 f(y, z)}{1.2}\right]_{z=0} = f_2(y), \qquad \ldots, \\
\left[\frac{D_z^m f(y, z)}{1.2\ldots m}\right]_{z=0} = f_m(y), \qquad \ldots,
\end{gathered}$$

on obtient, pour $t = 1$, $(z = x)$,

$$f(y, x) = f_0(y) + xf_1(y) + x^2 f_2(y) + \ldots + x^m f_m(y) + \ldots = 0.$$

Par conséquent, en désignant par r une racine simple de l'équation $f(y, 0) = 0$ et en considérant a comme fonction d'une variable fictive ξ, dont les dérivées successives seraient $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$, on trouve à l'aide des formules (11), (12)

$$\begin{aligned}
a &= r, \\
a_1 &= -\left[\frac{D_x f(a, x)}{D_a f(a, x)}\right]_{a=r,\, x=0}, \\
\frac{a_2}{1.2} &= -\left\{\frac{1}{D_a f(a, x)}\left[\frac{a_1^2}{1.2} D_a^2 f(a, x) \right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. + a_1 D_a D_x f(a, x) + \frac{D_x^2 f(a, x)}{1.2}\right]\right\}_{a=r,\, x=0},
\end{aligned}$$

. . . . ,

$$\frac{a_m}{1.2\ldots m} = -\left(\frac{1}{D_a f(a,x)}\left\{\sum \frac{D_a^j f(a,x)}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_{m-1}} \times\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\beta_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\beta_2}\cdots\left[\frac{a_{m-1}}{(m-1)!}\right]^{\beta_{m-1}} + \sum_{k=1}^{k=m}\frac{D_\xi^{m-k}D_x^k f(a,x)}{(m-k)!\,k!}\right\}\right)_{a=r,\ x=0}$$

et

$$\begin{aligned}
y = r - \frac{1}{[D_a f(a,x)]_{\substack{a=r\\x=0}}}\Bigg\{ & x\,[D_x f(a,x)]_{\substack{a=r\\x=0}} \\
& + x^2\left[S'_2 + \sum_{k=1}^{k=2}\frac{D_\xi^{2-k}D_x^k f(a,x)}{(2-k)!\,k!}\right]_{\substack{a=r\\x=0}} \\
& + x^3\left[S'_3 + \sum_{k=1}^{k=3}\frac{D_\xi^{3-k}D_x^k f(a,x)}{(3-k)!\,k!}\right]_{\substack{a=r\\x=0}} + \ldots \\
& + x^m\left[S'_m + \sum_{k=1}^{k=m}\frac{D_\xi^{m-k}D_x^k f(a,x)}{(m-k)!\,k!}\right]_{\substack{a=r\\x=0}} + \ldots\Bigg\},
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
S'_k &= \sum \frac{D_a^j f(a,x)}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_{k-1}!}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\beta_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\beta_2}\cdots\left[\frac{a_{k-1}}{(k-1)!}\right]^{\beta_{k-1}} \\
&= \frac{1}{k!}\left[D_\xi^k f(a,x) - a_k D_a f(a,x)\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{D_\xi^k D_x^h f(a,x)}{k!\,h!} \\
&\quad = \sum \frac{D_a^i D_x^h f(a,x)}{h!\,\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_k!}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\alpha_2}\cdots\left[\frac{a_k}{k!}\right]^{\alpha_k},
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&1\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + (k-1)\beta_{k-1} = k,\\
&\beta_1 + \beta_2 \quad + \ldots + \beta_{k-1} = j = 2, 3, \ldots, k,\\
&1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + k\alpha_k = k,\\
&\alpha_1 + \alpha_2 \quad + \ldots + \alpha_k = i = 1, 2, \ldots, k.
\end{aligned}\right.$$

Aussi, en ayant égard à l'égalité

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k!}\left[D_\xi^k f_0(a) - a_k f'_0(a)\right]\\ &= \sum \frac{f_0^{(j)}(a)}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_{k-1}!}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\beta_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\beta_2}\cdots\left[\frac{a_{k-1}}{(k-1)!}\right]^{\beta_{k-1}} = S_k,\end{aligned}$$

nous pouvons exprimer une racine de l'équation $f(y, x) = 0$, et, par suite, celle de l'équation (2), de la manière suivante

$$\begin{aligned} y = r &+ x\left[\frac{a_1}{1!} - \sum_{k=0}^{k=1}\frac{D_\xi^{1-k} f_k(a)}{(1-k)!\,f'_0(a)}\right]_{a=r}\\ &+ x^2\left[\frac{a_2}{1!} - \sum_{k=0}^{k=2}\frac{D_\xi^{2-k} f_k(a)}{(2-k)!\,f'_0(a)}\right]_{a=r}\\ &+ x^3\left[\frac{a_3}{1!} - \sum_{k=0}^{k=3}\frac{D_\xi^{3-k} f_k(a)}{(3-k)!\,f'_0(a)}\right]_{a=r} + \ldots\\ &+ x^m\left[\frac{a_m}{m!} - \sum_{k=0}^{k=m}\frac{D_\xi^{m-k} f_k(a)}{(m-k)!\,f'_0(a)}\right]_{a=r} + \ldots. \end{aligned}$$

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CUBIQUES UNICURSALES;

PAR M. A. ASTOR.

On trouve, dans la Géométrie de Clebsch, qu'une cubique unicursale a trois points d'inflexion réels ou un seul, suivant que le point double est isolé ou non. Je me propose d'établir cette propriété par des calculs élémentaires. J'indiquerai, de plus, quelques résultats que je crois nouveaux, et dont voici les principaux.

On sait que, par un point de la courbe, on peut, en dehors de la tangente en ce point, lui mener deux autres tangentes; nous appellerons, pour abréger, la droite qui joint les points de contact de ces tangentes à la corde polaire du point donné. Nous dirons aussi que deux points de la courbe sont conjugués lorsque les rayons qui les joignent au point double forment avec les deux tangentes en ce point un faisceau harmonique. Cela posé, on a les théorèmes suivants :

1° *La corde polaire enveloppe une conique inscrite à l'angle des tangentes au point double aux points où les côtés de cet angle sont rencontrés par la droite qui joint les trois points d'inflexion ;*

2° *La corde polaire d'un point passe par le point conjugué et forme, avec le rayon de ce point, d'une part, et les deux tangentes qui en sont issues, un faisceau harmonique.*

3° *Le lieu du milieu de la corde polaire est une cubique unicursale ayant même point double que la proposée. Si deux directions asymptotiques de la cubique forment avec les tangentes au point double un faisceau harmonique, ce lieu devient la parallèle à la troisième asymptote menée par le point double. Et c'est le seul cas où le degré du lieu puisse s'abaisser.*

Supposons d'abord les deux tangentes au point double réelles et distinctes; prenons-les pour axes de coordonnées; l'équation de la courbe pourra s'écrire

$$(1) \qquad mx^3 + nx^2y + pxy^2 + qy^3 - lxy = 0;$$

posant $y = tx$, on en déduit

$$(2) \quad x = \frac{lt}{qt^3 + pt^2 + nt + m}, \qquad y = \frac{lt^2}{qt^3 + pt^2 + nt + m}.$$

Nous appellerons, pour abréger, le point de la courbe dont les coordonnées sont données par les formules (2) le point t, de sorte que les points t et $-t$ seront deux points conjugués.

L'équation de la corde qui joint les deux points t et t' s'écrit immédiatement, comme il suit, sous forme de déterminant :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ lt & lt^2 & qt^3+pt^2+nt+m \\ lt' & lt'^2 & qt'^3+pt'^2+nt'+m \end{vmatrix} = 0.$$

Développant et divisant par $l(t'-t)$, il vient

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} [qt^2t'^2 - ntt' - m(t+t')]x \\ \quad -[qtt'(t+t')+ptt'-m]y + ltt' = 0. \end{array}\right.$$

Si nous faisons, dans (3), $t'=t$, nous aurons l'équation de la tangente en t, savoir :

$$(4)\qquad (qt^4 - nt^2 - 2mt)x - (2qt^3+pt^2-m)y + lt^2 = 0.$$

Elle est du quatrième degré en t; il y a donc quatre tangentes passant par un point donné du plan. Si nous supposons que ce point soit un point θ de la courbe, l'équation en t devra avoir deux racines égales à θ, et l'équation restante, quand on aura divisé par $(t-\theta)^2$, donnera les valeurs de t correspondant aux deux autres points de contact. L'équation en t est

$$\theta(qt^4 - nt^2 - 2mt) \\ \quad - \theta^2(2qt^3+pt^2-m) + (q\theta^3+p\theta^2+n\theta+m)t^2 = 0,$$

et, si l'on divise par $(t-\theta)^2$, il reste l'équation

$$(5)\qquad q\theta t^2 + m = 0.$$

Les deux racines de cette équation étant égales et de signes contraires, les deux points de contact sont deux points conjugués, ce qui est un résultat connu.

L'équation (5) peut être considérée comme donnant la valeur de θ correspondant au point où la tangente en t coupe de nouveau la courbe. Ce point t sera un point d'inflexion si cette équation donne $\theta = t$. Les trois points d'inflexion sont donc donnés par l'équation

$$(6) \qquad qt^3 + m = 0,$$

qui montre bien qu'il y en a un seul réel et deux imaginaires conjugués.

L'équation de la corde polaire de θ s'obtient en remplaçant, dans (3), $t + t'$ par o et tt' par $\frac{m}{q\theta}$. Cette équation est

$$(7) \qquad (m - n\theta)x + \theta(q\theta - p)y + l\theta = 0.$$

En l'ordonnant par rapport à θ, elle devient

$$qy\theta^2 - (nx + py - l)\theta + mx = 0,$$

et l'enveloppe de cette droite est la conique

$$(8) \qquad (nx + py - l)^2 - 4mqxy = 0.$$

La droite $nx + py - l = 0$ est la droite sur laquelle sont situés les trois points d'inflexion, car l'équation qui donne les valeurs de t correspondant à ses points de rencontre avec la courbe est

$$nt + pt^2 - (qt^3 + pt^2 + nt + m) = 0$$

ou

$$qt^3 + m = 0.$$

Nous vérifions donc le premier résultat que nous avons énoncé.

Formons maintenant l'équation qui représente les deux tangentes issues de θ. Ces deux droites auront pour équations

$$(qt'^4 + nt'^2 - 2mt')x - (2qt'^3 + pt'^2 - m)y + lt'^2 = 0,$$
$$(qt''^4 - nt''^2 - 2mt'')x - (2qt''^3 + pt''^2 - m)y + lt''^2 = 0,$$

t' et t'' étant les racines de l'équation

$$q\theta t^2 + m = 0.$$

Si nous remplaçons dans chacune d'elles t'^2 ou t''^2 par $-\frac{m}{q\theta}$, elles deviennent

$$(m+n\theta)x + \theta(p+q\theta)y - l\theta + 2q\theta(y-\theta x)t' = 0,$$
$$(m+n\theta)x + \theta(p+q\theta)y - l\theta + 2q\theta(y-\theta x)t'' = 0.$$

Multipliant membre à membre et remplaçant $t'+t''$ par 0 et $t't''$ par $\frac{m}{q\theta}$, on a, pour l'équation qui représente les deux tangentes,

$$(9)\quad [(m+n\theta)x + \theta(p+q\theta)y - l\theta]^2 + 4mq\theta(y-\theta x)^2 = 0.$$

La forme de cette équation montre immédiatement le second théorème énoncé, car l'équation

$$(10)\qquad (m+n\theta)x + \theta(p+q\theta)y - l\theta = 0,$$

s'obtenant en remplaçant θ dans (7) par $-\theta$, représente la corde polaire du point $-\theta$, et l'on voit que cette corde passe au point θ et forme avec le rayon $y-\theta x$ de ce point et les deux tangentes (9) qui en sont issues un faisceau harmonique.

Proposons-nous maintenant d'avoir le lieu du milieu de la corde polaire, dont l'équation est

$$(7)\qquad (m-n\theta)x + \theta(q\theta - p)y + l\theta = 0.$$

On pourrait obtenir le milieu en remarquant que c'est le point de rencontre de la corde (7) avec le diamètre conjugué de sa direction par rapport à la conique représentée par l'équation (9); mais il est plus simple de procéder de la façon suivante :

Appelons x', y', x'', y'' les coordonnées des deux points de contact, x_1, y_1 celles du point milieu; nous aurons

$$x_1 = \frac{x' + x''}{2}, \qquad y_1 = \frac{y' + y''}{2}. \tag{11}$$

Or x', y', x'', y'' s'obtiennent au moyen des formules

$$x = \frac{lt}{qt^3 + pt^2 + nt + m}, \tag{12}$$

$$y = \frac{lt^2}{qt^3 + pt^2 + nt + m}, \tag{13}$$

en y remplaçant successivement t par les racines t' et t'' de l'équation

$$q\theta t^2 + m = 0. \tag{5}$$

On aura donc l'équation qui donne x' et x'' en éliminant t entre (5) et (12); de même on aura celle qui donne y' et y'' en éliminant t entre (5) et (13); ces éliminations se font aisément, et l'on trouve, pour x_1 et y_1, les valeurs suivantes :

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{-lq\theta(m - n\theta)}{m\theta(q\theta - p)^2 + q(m - n\theta)^2}, \\ y_1 &= \frac{-lm\theta(q\theta - p)}{m\theta(q\theta - p)^2 + q(m - n\theta)^2}. \end{aligned} \right.$$

Le lieu est donc une courbe unicursale de troisième ordre ayant même point double que la proposée, car x_1 et y_1 sont nuls en même temps quand θ est nul et quand il est infini.

Cherchons si le degré du lieu peut s'abaisser. Cela ne peut arriver que si le dénominateur des deux fractions qui donnent x_1 et y_1 a un facteur commun avec chacun des numérateurs; or ce facteur ne peut être θ, car le terme indépendant du dénominateur, étant qm^2, ne saurait s'annuler que si $m = 0$ ou $q = 0$, auquel cas la courbe donnée se décomposerait. Dès lors, pour qu'il y ait un facteur commun, il faut que les deux binomes

$m - n\theta$ et $q\theta - p$ égalés à zéro aient leur racine commune, c'est-à-dire que

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}.$$

Alors le lieu se réduira à une droite passant par l'origine

$$\frac{y_1}{x_1} = -\frac{m}{n} \qquad \text{ou} \qquad mx_1 + ny_1 = 0.$$

Il est facile d'avoir l'interprétation géométrique de ce résultat. Posons en effet

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} = \frac{1}{\lambda},$$

l'équation de la courbe devient

$$(mx^2 + py^2)(x + \lambda y) - lxy = 0.$$

Deux directions asymptotiques forment avec les tangentes au point double un faisceau harmonique, et l'on voit que, réciproquement, s'il en est ainsi, les coefficients m, n, p, q satisferont à la relation $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$. La troisième direction asymptotique est donnée par

$$x + \lambda y = 0 \qquad \text{ou} \qquad mx + ny = 0,$$

et l'on voit que le lieu du milieu se confond avec cette troisième direction asymptotique. Les propriétés énoncées sont donc démontrées dans le cas où les tangentes au point double sont réelles.

Remarque. — Les équations (7) et (10) des cordes polaires des points conjugués θ et $-\theta$ peuvent s'écrire

$$mx + q\theta^2 y - (nx + py - l)\theta = 0,$$
$$mx + q\theta^2 y + (nx + py - l)\theta = 0,$$

ce qui montre qu'elles se coupent toujours sur la droite

$nx + py - l = 0$ qui joint les points d'inflexion. D'autre part, la droite

$$mx + q\theta^2 y = 0$$

ou

$$\frac{y}{x} = -\frac{m}{q\theta^2}$$

est le rayon correspondant au point de la courbe dont la corde qui joint les points θ et $-\theta$ est la corde polaire. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Si l'on prend un point de la cubique, les cordes polaires des deux points de contact des deux tangentes issues de ce point passent par le point de rencontre de la droite des inflexions et du rayon correspondant au point choisi et forment avec ces deux droites un faisceau harmonique.

Supposons maintenant le point double isolé. Plaçons-y toujours l'origine, et prenons pour axes deux droites quelconques faisant avec les tangentes un faisceau harmonique. Soient

$$\lambda x + \mu i y = 0, \qquad \lambda x - \mu i y = 0$$

les équations de ces deux tangentes, et posons

$$X = \lambda x + \mu i y, \qquad Y = \lambda x - \mu i y.$$

Je dis que l'équation d'une quelconque des courbes considérées peut s'écrire

$$(I) \qquad m X^3 + n X^2 Y + p XY^2 + q Y^3 - l XY = 0,$$

c'est-à-dire sous la forme (1) du cas précédent, x et y étant remplacés par X et Y.

Soit, en effet,

$$M x^3 + N x^2 y + P x y^2 + Q y^3 - (\lambda^2 x^2 + \mu^2 y^2) = 0$$

l'équation d'une de ces courbes ; elle sera identique à l'équation (1) si l'on a

$$\begin{aligned}
m+n+p+\ q &= \frac{\mathrm{M}\,l}{\lambda^3},\\
3m+n-p-3q &= -\frac{\mathrm{N}\,li}{\lambda^2\mu},\\
-3m+n+p-3q &= \frac{\mathrm{P}\,l}{\lambda\mu^2},\\
-\ m+n-p+\ q &= -\frac{\mathrm{Q}\,li}{\mu^3}.
\end{aligned}$$

Par des combinaisons simples de ces équations, on obtient les suivantes

$$n+q=\frac{l}{2}\left(\frac{\mathrm{M}}{\lambda^3}-\frac{\mathrm{Q}\,i}{\mu^3}\right),\qquad n-3q=\frac{l}{2}\left(\frac{\mathrm{P}}{\lambda\mu^2}-\frac{\mathrm{N}\,i}{\lambda^2\mu}\right),$$

$$m+p=\frac{l}{2}\left(\frac{\mathrm{M}}{\lambda^3}+\frac{\mathrm{Q}\,i}{\mu^3}\right),\qquad 3m-\ p=-\frac{l}{2}\left(\frac{\mathrm{P}}{\lambda\mu^2}+\frac{\mathrm{N}\,i}{\lambda^2\mu}\right);$$

et l'on voit que ces équations déterminent toujours m, n, p et q en fonction de l qui demeure indéterminée et pour laquelle on peut prendre une valeur réelle quelconque. De plus, il est facile de voir que m et q, n et p sont imaginaires conjuguées. On trouve, en effet,

$$\begin{aligned}
m &= \frac{l}{8}\left[\frac{\mathrm{M}}{\lambda^3}-\frac{\mathrm{P}}{\lambda\mu^2}+\left(\frac{\mathrm{Q}}{\mu^3}-\frac{\mathrm{N}}{\lambda^2\mu}\right)i\right],\\
n &= \frac{l}{8}\left[\frac{3\mathrm{M}}{\lambda^3}+\frac{\mathrm{P}}{\lambda\mu^2}-\left(\frac{3\mathrm{Q}}{\mu^3}+\frac{\mathrm{N}}{\lambda^2\mu}\right)i\right],\\
q &= \frac{l}{8}\left[\frac{\mathrm{M}}{\lambda^3}-\frac{\mathrm{P}}{\lambda\mu^2}-\left(\frac{\mathrm{Q}}{\mu^3}-\frac{\mathrm{N}}{\lambda^2\mu}\right)i\right],\\
p &= \frac{l}{8}\left[\frac{3\mathrm{M}}{\lambda^3}+\frac{\mathrm{P}}{\lambda\mu^2}+\left(\frac{3\mathrm{Q}}{\mu^3}+\frac{\mathrm{N}}{\lambda^2\mu}\right)i\right].
\end{aligned}$$

Tous les calculs faits dans le cas des tangentes réelles subsistent donc avec leur signification, sauf celui qui concerne le lieu des milieux des cordes polaires; car il est clair que les valeurs X_1 et Y_1 que l'on obtient par les formules (14) n'ont plus la même signification que précédemment; mais nous verrons qu'on peut en déduire aisément les coordonnées du point milieu d'une corde polaire. Il est clair, de plus, que l'interprétation des résultats, quand elle a trait à la distinction de quantités réelles ou imaginaires, ne subsiste plus, et qu'il y a lieu de les interpréter à nouveau.

Par exemple, les points d'inflexion sont toujours donnés par l'équation

$$(6) \qquad qt^3 + m = 0;$$

je dis que ces trois points sont réels.

L'équation

$$\frac{Y}{X} = t \qquad \text{ou} \qquad \frac{\lambda x - \mu i y}{\lambda x + \mu i y} = t$$

équivaut à

$$\frac{y}{x} = \frac{\lambda}{\mu}\,\frac{t-1}{t+1}\,i.$$

Si nous posons $\frac{t-1}{t+1}i = T$, l'équation devient

$$\frac{y}{x} = \frac{\lambda}{\mu}T,$$

et, en prenant pour T une valeur réelle, l'intersection de cette droite avec la courbe donne un point réel. Dans tous les cas, nous appellerons indistinctement un *point de la courbe* le point t ou le point T, et il ne sera réel que tout autant que T lui-même le sera. Si T est donné, t est déterminé par l'équation

$$t = \frac{T + i}{i - T}.$$

Cela posé, l'équation qui donne les valeurs de t correspondant aux points d'inflexion étant

$$qt^3 + m = 0,$$

celle qui donne les valeurs correspondantes de T sera

$$q\left(\frac{T+i}{T-i}\right)^3 - m = 0.$$

Remarquant que m et q sont imaginaires conjugués, posons

$$m = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$q = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi);$$

nous aurons

$$\left(\frac{T+i}{T-i}\right)^3 = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi;$$

par suite, les trois valeurs de $\frac{T+i}{T-i}$ sont données par la formule

$$\cos 2\frac{\varphi + k\pi}{3} + i\sin 2\frac{\varphi + k\pi}{3},$$

où k a les valeurs 0, 1 et 2. Or, si nous écrivons

$$\frac{T+i}{T-i} = \cos 2\frac{\varphi + k\pi}{3} + i\sin 2\frac{\varphi + k\pi}{3},$$

nous en déduisons

$$T = \frac{\sin 2\frac{\varphi + k\pi}{3} - \left(1 + \cos 2\frac{\varphi + k\pi}{3}\right)i}{1 - \cos 2\frac{\varphi + k\pi}{3} - \sin 2\frac{\varphi + k\pi}{3}\, i},$$

et, comme

$$\frac{\sin 2\frac{\varphi + k\pi}{3}}{1 - \cos 2\frac{\varphi + k\pi}{3}} = \frac{1 + \cos 2\frac{\varphi + k\pi}{3}}{\sin 2\frac{\varphi + k\pi}{3}} = \cot\frac{\varphi + k\pi}{3},$$

on voit que les trois valeurs de T sont réelles et égales à

$$\cot\frac{\varphi}{3}, \quad \cot\frac{\varphi + \pi}{3}, \quad \cot\frac{\varphi + 2\pi}{3},$$

ce qui montre bien que les trois points d'inflexion sont réels. La droite qui les joint a pour équation

$$nX + pY - l = 0,$$

en remplaçant n et p, X et Y par leurs valeurs, on trouve, pour l'équation de cette droite en coordonnées ordinaires,

$$\left(\frac{3M}{\lambda^2} + \frac{P}{\mu^2}\right)x + \left(\frac{3Q}{\mu^2} + \frac{N}{\lambda^2}\right)y - 4 = 0.$$

On transformerait de même l'équation (8) de la conique enveloppe des cordes polaires, où, bien entendu, x et y seraient remplacés par X et Y.

Je me bornerai à la remarque suivante :

L'équation (5) du cas précédent

$$q\theta t^2 + m = 0,$$

qui donne les valeurs de t correspondant aux points de contact des tangentes issues de θ, montre que, si ces tangentes sont réelles pour le point θ, elles sont imaginaires pour le point conjugué $-\theta$; dans le cas actuel, où le point double est isolé, les tangentes issues d'un point réel quelconque de la courbe sont toujours réelles.

Les valeurs de t correspondant aux points de contact sont données par l'équation

$$t^2 = -\frac{m}{q\theta} = \frac{m}{q}\,\frac{\Theta - i}{\Theta + i}$$

en posant $\theta = \dfrac{\Theta + i}{i - \Theta}$, et alors Θ est réel, comme nous l'avons dit.

Posons, comme précédemment,

$$m = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad q = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

et de plus

$$\Theta - i = r(\cos\omega + i\sin\omega), \qquad \Theta + i = r(\cos\omega - i\sin\omega);$$

alors

$$t^2 = \cos 2(\varphi + \omega) + i \sin 2(\varphi + \omega),$$

et, par suite, les valeurs de t sont données par la formule

$$\cos(\varphi + \omega + k\pi) + i \sin(\varphi + \omega + k\pi),$$

où k a les valeurs o et 1.

Les valeurs correspondantes de T se trouvent au moyen de l'équation

$$\frac{T + i}{T - i} = -[\cos(\varphi + \omega\, k\pi) + i \sin(\varphi + \omega + k\pi)],$$

et l'on en déduit, par un calcul analogue à celui des points d'inflexion,

$$T = -\operatorname{tang}\frac{\varphi + \omega + k\pi}{2};$$

d'où les deux valeurs

$$-\operatorname{tang}\frac{\varphi + \omega}{2}, \quad \cot\frac{\varphi + \omega}{2}.$$

Les deux valeurs de T sont donc réelles, et leur produit est égal à -1, ce qui nous ferait retrouver, si nous ne le savions déjà, que les deux points de contact sont conjugués, car les équations des deux rayons qui leur correspondent étant

$$y + \frac{\lambda}{\mu}\operatorname{tang}\frac{\varphi + \omega}{2}x = 0,$$

$$y - \frac{\lambda}{\mu}\cot\frac{\varphi + \omega}{2}x = 0,$$

l'équation qui représente ces deux rayons est

$$\mu^2 y^2 + \lambda\mu\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi + \omega}{2} - \cot\frac{\varphi + \omega}{2}\right)xy - \lambda^2 x^2 = 0,$$

et l'on voit qu'ils forment un faisceau harmonique avec les deux droites dont l'équation est

$$\mu^2 y^2 + \lambda^2 x^2 = 0.$$

Pour ce qui concerne le lieu des milieux des cordes polaires, il n'est pas nécessaire de faire un nouveau calcul; car, si nous écrivons les équations

$$X_1 = \frac{-lq\,\theta(m-n\theta)}{m\theta(q\theta-p)^2+q(m-n\theta)^2},$$
$$Y_1 = \frac{-lm\,\theta(q\theta-p)}{m\theta(q\theta-p)^2+q(m-n\theta)^2},$$

X_1 et Y_1 sont liées aux coordonnées x', y', x'', y'' des points de contact des tangentes issues de θ par les formules

$$X_1 = \frac{\lambda x' + \mu i y' + \lambda x'' + \mu i y''}{2},$$
$$Y_1 = \frac{\lambda x' - \mu i y' + \lambda x'' - \mu i y''}{2},$$

ou, en appelant toujours x_1 et y_1 les coordonnées du point milieu,

$$X_1 = \lambda x_1 + \mu i y_1, \qquad Y_1 = \lambda x_1 - \mu i y_1;$$

d'où l'on déduit

$$\lambda x_1 = \frac{X_1 + Y_1}{2}, \qquad \mu y_1 = \frac{Y_1 - X_1}{2}\,i,$$

et, par suite, les coordonnées du point milieu sont données par les formules

$$x_1 = \frac{-l\theta[q(m-n\theta)+m(q\theta-p)]}{2\lambda[m\theta(q\theta-p)^2+q(m-n\theta)^2]},$$
$$y_1 = \frac{-l\theta[m(q\theta-p)-q(m-n\theta)]}{2\mu[m\theta(q\theta-p)^2+q(m-n\theta)^2]}\,i,$$

et l'on en aurait les expressions sous forme réelle en remplaçant m, n, p, q et θ par leurs valeurs.

Mais il vaut mieux conserver les formules

$$\lambda x_1 + \mu i y_1 = \frac{-lq\,\theta(m-n\theta)}{m\theta(q\theta-p)^2+q(m-n\theta)^2},$$
$$\lambda x_1 - \mu i y_1 = \frac{-lm\,\theta(q\theta-p)}{m\theta(q\theta-p)^2+q(m-n\theta)^2},$$

et l'on en tire les mêmes conséquences que dans le cas où les tangentes au point double sont réelles; il faut et il suffit, pour que le degré s'abaisse, que

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q},$$

et alors le lieu devient la droite

$$\frac{\lambda x_1 - \mu i y_1}{\lambda x_1 + \mu i y_1} = -\frac{m}{n}$$

ou

$$m X_1 + n Y_1 = 0.$$

L'interprétation de ces résultats est exactement la même, et le troisième théorème que nous avons énoncé se trouve démontré dans tous les cas.

Nous pouvons remarquer que ce théorème s'applique à toutes les cubiques unicursales dont deux directions asymptotiques et les tangentes au point double ou réciproquement sont deux droites rectangulaires et les deux droites isotropes. C'est, par exemple, le cas de la strophoïde, droite ou oblique.

CALCUL D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE;

Par M. Maurice d'OCAGNE,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

---

1. L'intégrale que j'ai ici en vue est définie de la manière suivante :

Posant

$$\varphi(u_1, u_2) = a_1 u_1^2 + 2 b u_1 u_2 + a_2 u_2^2 + 3 c_1 u_1 + 2 c_2 u_2 + d,$$

on considère tous les éléments infiniment petits du second ordre de la forme

$$e^{-\varphi(u_1, u_2)}\, du_1\, du_2,$$

répondant à tous les systèmes de valeurs de u_1 et u_2 tels que l'on ait

$$u_1 + u_2 = t,$$

et on en fait la somme.

Cette somme, qui peut s'écrire

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varphi(u_1, u_2)}\, du_1\, du_2 \qquad (\text{pour } u_1 + u_2 = t),$$

est elle-même un infiniment petit du premier ordre évidemment de la forme

$$I = f(t)\, dt.$$

Le problème qu'il s'agit de résoudre consiste à déterminer la fonction $f(t)$.

Ce problème est d'une importance capitale dans certaines questions de Calcul des probabilités, comme je le fais voir dans un travail qui paraîtra prochainement. Mais il présente, je pense, un intérêt suffisant comme exercice de Calcul intégral pour être traité à part ici.

2. Prenons les variables u_1 et u_2 pour des coordonnées courantes x et y et considérons la surface S dont l'équation est

$$z = e^{-\varphi(u_1, u_2)}.$$

L'intégrale I, qui vient d'être définie, n'est autre que le volume de la tranche infiniment mince comprise entre cette surface, le plan des $u_1\, u_2$ et les deux plans parallèles à l'axe des z

$$u_1 + u_2 = t$$

et

$$u_1 + u_2 = t + dt,$$

que nous désignerons par P_t et P_{t+dt}.

Soit σ l'aire comprise, sur le plan P_t, entre la trace de ce plan sur celui des $u_1 u_2$ et son intersection avec la surface S. On a, en remarquant que l'écartement normal des plans P_t et P_{t+dt} est égal à $\frac{dt}{\sqrt{2}}$,

$$\text{(1)} \qquad I = \frac{\sigma\, dt}{\sqrt{2}}.$$

Tout revient donc à calculer σ.

Pour cela, transportons l'origine au point O' où la bissectrice de l'angle $u_1 O u_2$ coupe le plan P_t, l'axe des z conservant sa direction et l'axe des u'_1 se confondant avec la trace de P_t sur le plan $u_1 O u_2$.

L'équation de la surface S devient alors

$$z = e^{-\varphi\left[\frac{(u'_1+u'_2)\sqrt{2}+t}{2},\ \frac{(-u'_1+u'_2)\sqrt{2}+t}{2}\right]},$$

et sa courbe d'intersection par le plan P_t, devenu le plan des $u'_1 z$, a pour équation ($u'_2 = 0$)

$$z = e^{-\varphi\left(\frac{u'_1\sqrt{2}+t}{2},\ \frac{-u'_1\sqrt{2}+t}{2}\right)}.$$

Donc, en appelant $\psi(u'_1)$ la fonction de u'_1 qui figure dans l'exposant

$$\text{(2)} \qquad \sigma = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\psi(u'_1)}\, du'_1.$$

Telle est l'intégrale définie au calcul de laquelle nous sommes ramenés.

L'expression développée de $\psi(u'_1)$ est la suivante

$$\psi(u'_1) = a_1 \frac{(u'_1\sqrt{2}+t)^2}{4} + 2b\frac{t^2-2u'^2_1}{4} + a_2\frac{(-u'_1\sqrt{2}+t)^2}{4}$$
$$+ 2c_1\frac{u'_1\sqrt{2}+t}{2} + 2c_2\frac{-u'_1\sqrt{2}+t}{2} + d,$$

ou

$$\psi(u'_1) = lu'^2_1 + 2mu'_1 + n, \tag{3}$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} l &= \frac{a_1-2b+a_2}{2}, \\ m &= \frac{(a_1-a_2)t+2(c_1-c_2)}{2\sqrt{2}}, \\ n &= \frac{(a_1+2b+a_2)t^2+4(c_1+c_2)t+4d}{4}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Remarquons que la formule (3) peut s'écrire

$$\psi(u'_1) = \left(\sqrt{l}\,u'_1 + \frac{m}{\sqrt{l}}\right)^2 + \frac{nl-m^2}{l}.$$

La formule (2) devient donc, si l'on fait sortir la partie constante du signe $\int$,

$$\sigma = e^{-\frac{nl-m^2}{l}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{l}\,u'_1+\frac{m}{\sqrt{l}}\right)^2} du'_1,$$

ou, en posant $\sqrt{l}\,u'_1 + \frac{m}{\sqrt{l}} = v$,

$$\sigma = e^{-\frac{nl-m^2}{l}} \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv.$$

Or, on sait que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2}\,dv = \sqrt{\pi}.$$

Par suite,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{l}}\, e^{-\frac{nl-m^2}{l}},$$

et la formule (1) donne

$$\mathrm{I} = \sqrt{\frac{\pi}{2l}}\, e^{-\frac{nl-m^2}{l}}\, dt.$$

Il suffit, pour que le problème soit achevé, de remplacer, dans cette expression, l, m et n par leurs valeurs (4), ce qui n'offre aucune difficulté. On trouve ainsi finalement

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{I} &= \sqrt{\frac{\pi}{a_1 - 2b + a_2}} \\ &\times e^{-\frac{t^2(a_1 a_2 - b^2) + 2t[a_1 c_2 + a_2 c_1 - b(c_1 + c_2)] + d(a_1 - 2b + a_2) - (c_1 - c_2)^2}{a_1 - 2b + a_2}}\, dt. \end{aligned} \right.$$

BIBLIOGRAPHIE.

Leçons sur les coordonnées tangentielles, par *G. Papelier*, ancien élève de l'École Normale, professeur de Mathématiques spéciales au lycée d'Orléans, avec une Préface de *P. Appell*, Membre de l'Institut, professeur à la Sorbonne. 1e Partie : Géométrie plane. In-8° de vi-325 pages. Paris, Nony et Cie; 1894. Prix : 5fr.

La Géométrie analytique, créée par Descartes dans un Ouvrage paru en 1637, repose sur l'emploi de méthodes qui permettent de donner une forme algébrique aux problèmes de Géométrie. Ces méthodes consistent à faire correspondre à chaque point du plan un système de deux nombres, appelés *coordonnées* du point; une équation entre ces coordonnées représente une courbe; les points communs à deux courbes s'obtiennent en résolvant leurs équations.

Tout problème de Géométrie se trouve ainsi ramené à une question de calcul; inversement, tout fait analytique peut être interprété géométriquement. Ainsi le problème des tangentes conduit à la notion de la dérivée, ou fournit une représentation géométrique de cette notion; l'idée d'invariant algébrique ou différentiel conduit à la découverte de propriétés géométriques, laissées invariables par certaines transformations.

Mais le système de coordonnées cartésiennes dans le plan ou dans l'espace est loin d'être le seul qui permette de représenter géométriquement les faits algébriques et analytiques. On peut en effet développer l'idée de Descartes sous un autre point de vue, en définissant, par un système de nombres, non plus un *point* du plan ou de l'espace, mais un être géométrique quelconque, ligne droite ou courbe, surface plane ou courbe. Ces nombres qui sont, par exemple, les coefficients figurant dans les équations cartésiennes de l'élément géométrique considéré, s'appellent encore, par extension, les coordonnées de l'élément. Ainsi une droite dans un plan est définie par deux nombres qui sont ordinairement les inverses des segments qu'elle détache sur les axes; un plan dans l'espace est défini par trois nombres analogues; un cercle dans le plan est défini par trois coordonnées qui sont les coordonnées cartésiennes du centre et la puissance de l'origine par rapport au cercle; une droite dans l'espace est définie par quatre nombres, etc.

Une équation entre trois variables a, b, c représente alors, soit une surface lieu de points, si a, b, c sont regardées comme les coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace, soit une surface enveloppe de plans, si a, b, c sont regardées comme les coordonnées d'un plan, soit un système de cercles dans un plan fixe, si les variables sont regardées comme les coordonnées d'un cercle, etc.; de même, une équation entre quatre variables peut être interprétée comme représentant une surface dans l'espace à quatre dimensions, ou un système de droites dans l'espace à trois dimensions, etc.

En résumé, on peut interpréter géométriquement, d'une infinité de manières, les faits algébriques et analytiques relatifs à des équations contenant un nombre quelconque de variables.

Les interprétations les plus intéressantes sont évidemment les plus simples.

Pour la Géométrie plane, il existe deux systèmes également simples : celui qui consiste à prendre comme élément géométrique le *point* défini par *deux coordonnées*, et celui qui consiste à prendre comme élément la *droite* définie également par *deux coordonnées*.

Le développement du premier point de vue fait l'objet de la *Géométrie ponctuelle;* celui du second fait l'objet de la *Géométrie tangentielle*. Les propriétés algébriques des systèmes d'équations à deux variables donnent alors, suivant la façon dont on les interprète, des propriétés des ensembles de points ou des propriétés des ensembles de droites. Les deux séries de théorèmes que l'on obtient de cette manière ne sont donc que la traduction géométrique des mêmes faits algébriques; et l'on passe d'un théorème de l'une des séries au théorème correspondant ou corrélatif de l'autre, en y remplaçant les points par des droites et réciproquement.

Nous sommes ainsi amenés à un autre point de vue, d'après lequel le passage de la Géométrie ponctuelle à la Géométrie tangentielle peut être regardé comme un mode particulier de transformation des figures, faisant correspondre des droites aux points et inversement.

Le fait que tout théorème peut être transformé ainsi a reçu de Chasles le nom de *principe de dualité*.

Voici, sur l'origine et le développement de ces idées, quelques renseignements historiques empruntés en majeure partie à l'*Aperçu historique* de Chasles.

De Beaune semble avoir eu le premier l'idée de définir certaines courbes à l'aide des propriétés de leurs tangentes; par une question de cette nature posée à Descartes, il donna naissance à la *méthode inverse des tangentes*, dont Descartes jeta les fondements en regardant un point d'une courbe comme l'intersection de deux tangentes infiniment voisines.

La théorie des développées, due à Huygens, fournit ensuite des exemples particulièrement importants de courbes regardées comme enveloppées par des droites.

Mais on peut dire qu'Euler, en considérant une courbe quelconque comme enveloppe d'une droite de la forme

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = \varphi(\alpha),$$

donna le premier exemple d'une courbe définie dans un système de coordonnées tangentielles; ce système, dans lequel les éléments de longueur et les rayons de courbure de la courbe et de ses développées successives ont des expressions particulièrement simples, se trouve indiqué à la page 58 de ce volume.

Les coordonnées de la droite sous la forme actuellement employée ont été introduites à peu près à la même époque par Chasles (*Aperçu historique*, 1837, et *Mémoire de Géométrie*, 1829) et par Plücker (*Journal de Crelle*, t. 5, 1829).

Quant aux méthodes de transformation qui ont conduit au principe de dualité, elles ont d'abord été employées sur la sphère. D'après un théorème dû à Snellius, vers 1630, toute figure sphérique possède une figure supplémentaire, de telle nature qu'à chaque point de la première corresponde un arc de grand cercle de la deuxième et inversement.

En 1685, La Hire, dans son *Traité des coniques*, indique les propriétés réciproques des points et droites qu'on nomme actuellement *pôles* et *polaires* par rapport à une conique. Ces propriétés ont été étendues par Monge aux surfaces du second ordre, et c'est de l'époque de Monge seulement que datent l'importance et les usages de cette théorie des pôles et polaires.

Une des premières et des plus célèbres applications fut celle qui permit à Brianchon de déduire, du théorème de Pascal sur six points d'une conique, une propriété correspondante de six tangentes (1806).

Le principe de dualité dans sa généralité a d'abord été énoncé par Poncelet (*Annales de Mathématiques*, t. VIII, 1817-1818), qui l'a déduit de la théorie des pôles et polaires; ce principe a été ensuite établi, indépendamment des coniques, par Gergonne, par Möbius (*Barycentrischer Calcul*, 1827) et par Chasles.

L'Ouvrage de M. Papelier a pour objet le développement de la Géométrie tangentielle depuis les premiers éléments jusqu'à la théorie des coniques et des courbes algébriques. L'auteur s'est efforcé de suivre pas à pas les méthodes employées dans la Géométrie ponctuelle, de sorte que le lecteur, déjà familiarisé avec cette dernière, n'aura aucun effort nouveau à faire : il n'aura qu'à transposer les méthodes et les théorèmes qu'il connaît, en remplaçant les points par des droites et réciproquement.

Quant aux commençants, ils suivront avec autant de facilité cette manière de présenter les faits que la manière ordinaire.

Cet Ouvrage, écrit avec clarté et rigueur, renferme des développements sur certaines questions qu'on ne traite pas habituellement en coordonnées tangentielles : telles sont la discussion de la forme d'une courbe dans le voisinage d'une tangente ou d'une asymptote à l'aide du polygone de Newton, la classification des coniques, l'étude géométrique du contact de deux coniques, les invariants simultanés de deux coniques. De nombreux exercices sont traités dans le texte ou proposés au lecteur avec des indications sur leur solution.

Le Livre de M. Papelier est appelé à rendre de grands services, en familiarisant l'esprit des élèves avec une autre face de la Géométrie analytique, et en les mettant à même de tirer de chaque résultat de calcul deux théorèmes corrélatifs.

P. Appell.

COURBES AUTOPOLAIRES;

Par M. Paul APPELL.

1° *Coniques autopolaires.* — Soit S une conique fixe; une conique Σ est *autopolaire par rapport à* S ou simplement *autopolaire* quand elle coïncide avec sa polaire réciproque par rapport à S.

Soient a un point de Σ et B la tangente en ce point; la polaire A du point a est tangente à Σ et son point de contact est le pôle b de B. Le triangle de côtés A, B, ab est conjugué à S; appelant $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ les équations des trois droites A, B et ab, les équations des coniques S et Σ seront de la forme

$$(S)\qquad X^2+Y^2+Z^2=0,$$

$$(\Sigma)\qquad 2XY+\lambda Z^2=0.$$

Il reste à déterminer λ de façon que Σ soit autopolaire. Un calcul facile montre que la polaire réciproque de Σ par rapport à S est

$$2\lambda XY + Z^2 = 0;$$

comme elle doit coïncider avec Σ, on a

$$\lambda^2 = 1, \qquad \lambda = \pm 1.$$

Ainsi il y a deux coniques tangentes en a et b à A et B autopolaires par rapport à S :

$$2XY + Z^2 = 0, \qquad 2XY - Z^2 = 0.$$

Ces deux coniques sont bitangentes à S, les cordes de contact étant

$$X \pm Y = 0.$$

Cette dernière propriété est évidente géométriquement.

2° *Équation générale des coniques autopolaires par rapport à une conique donnée*

$$(S) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = 0.$$

Toute conique autopolaire étant bitangente à S aura une équation de la forme

$$f(X, Y, Z) \equiv (uX + vY + wZ)^2 + \lambda(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0.$$

Les coordonnées du pôle de la tangente au point X, Y, Z sont

$$(1) \qquad X' = \tfrac{1}{2} f'_X, \qquad Y' = \tfrac{1}{2} f'_Y, \qquad Z' = \tfrac{1}{2} f'_Z.$$

Pour avoir le lieu de ce pôle X′, Y′, Z′, quand X, Y, Z décrit la conique $f(X, Y, Z) = 0$, il faut éliminer X, Y, Z entre $f = 0$ et les équations (1). Le calcul est le même que pour former l'équation tangentielle de $f = 0$.

Si l'on écrit

$$f(X, Y, Z) \\ = AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY,$$

la polaire réciproque est

$$(2) \quad aX'^2 + a'Y'^2 + a''Z'^2 + 2bY'Z' + 2b'Z'X' + 2b''X'Y' = 0,$$

où a, a', a'', b, b', b'' sont les mineurs du discriminant

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix},$$

par rapport aux éléments A, A', ...

$$a = A'A'' - B^2, \qquad b'' = BB' - A''B'', \qquad \ldots.$$

Faisant le calcul, on trouve

$$\begin{aligned} a &= \lambda(v^2 + w^2 + \lambda), & b &= -\lambda vw, \\ a' &= \lambda(w^2 + u^2 + \lambda), & b' &= -\lambda wu, \\ a'' &= \lambda(u^2 + v^2 + \lambda), & b'' &= -\lambda uv. \end{aligned}$$

Pour que la conique (2) soit identique à $f(X, Y, Z)$, il faut et il suffit, comme on le voit immédiatement, que

$$u^2 + v^2 + w^2 + 2\lambda = 0.$$

L'équation générale des coniques Σ autopolaires à S est donc

$$(\Sigma) \quad 2(uX + vY + wZ)^2 - (u^2 + v^2 + w^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0.$$

Elle contient deux paramètres arbitraires, les rapports $\dfrac{u}{w}$ et $\dfrac{v}{w}$.

Comme exercice, nous indiquerons la question inverse : *Étant donnée une conique, trouver les coniques par rapport auxquelles elle est autopolaire.*

3° *Courbes autopolaires.* — Une courbe quelconque est autopolaire par rapport à S si elle coïncide avec sa polaire réciproque par rapport à S.

Supposons que, dans l'équation générale des coniques Σ, on mette, pour u, v, w, des fonctions quelconques d'un paramètre t. Alors l'enveloppe des coniques (Σ), quand ce paramètre t varie, se compose d'abord de la conique donnée S, puis d'une courbe C qui est autopolaire. En effet, soient a un point de contact de C avec Σ, B la tangente commune en a; si l'on prend la figure polaire réciproque, les polaires réciproques de C et Σ sont deux courbes C′ et Σ′ tangentes au point b qui est le pôle de B. Mais Σ′ coïncide avec Σ; l'enveloppe de la conique Σ est donc formée de la courbe C et de sa polaire réciproque C′. Si cette enveloppe ne se décompose pas en deux courbes distinctes, polaires réciproques l'une de l'autre, elle est donc autopolaire.

Exemple. — Soit $u = t$, $v = 0$, $w = 1$, la conique mobile (Σ) devient

$$2(tX + Z)^2 - (t^2 + 1)(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0,$$
$$t^2(X^2 - Y^2 - Z^2) + 4tXZ + Z^2 - X^2 - Y^2 = 0.$$

L'enveloppe est alors, après réductions,

$$(X^2 + Z^2)^2 - Y^4 = 0.$$

Elle se décompose en la conique S et une conique

$$X^2 + Z^2 - Y^2 = 0,$$

qui est évidemment autopolaire.

Réciproquement, toute courbe autopolaire C *peut être engendrée de cette façon.*

En effet, soient a un point de C et B la tangente en ce point; par hypothèse, la polaire A de a est tangente à C en un point b pôle de B. On peut alors tracer une conique autopolaire Σ tangente en a et b aux droites A et B, c'est-à-dire à la courbe C; on peut même en tracer deux, comme nous l'avons vu dans le premier paragraphe. La courbe C est l'enveloppe de ces coniques Σ qui la touchent chacune en deux points.

L'exemple le plus simple de cubique autopolaire est $y - 2x^3 = 0$, qui est autopolaire par rapport à

$$3x^2 - y^2 + 1 = 0.$$

4° Cette méthode, que j'ai indiquée sommairement dans le *Bulletin de la Société mathématique* (7 février 1894), est entièrement analogue à celle que M. Moutard a employée pour les courbes anallagmatiques; elle s'étend facilement à l'espace, elle s'étend également à la recherche des courbes laissées invariables par certaines transformations de Cremona; enfin elle est dans un rapport étroit avec la théorie de certaines équations aux dérivées partielles du premier ordre.

M. Kœnigs a communiqué aussi à la Société mathématique, le 7 février 1894, une méthode permettant de trouver les cônes qui sont identiques à leurs supplémentaires : cette méthode donne évidemment une autre solution du problème que nous venons de traiter.

Enfin nous devons signaler sur un sujet analogue un article de M. Fouret *Sur les courbes planes ou surfaces qui sont leur propre polaire réciproque par rapport à une infinité de coniques* (*Bulletin de la Société philomathique*, p. 42-45; 1877). Dans cette Note, M. Fouret montre que les seules courbes possédant la propriété indiquée sont les courbes triangulaires signalées par MM. Klein et Lie.

SUR LES QUADRIQUES AUTOPOLAIRES;

PAR M. V. HIOUX.

On peut comme il suit étendre aux quadriques certains des résultats de M. Appell.

THÉORÈME. — *Si l'on désigne par* P, Q, R *et* S *quatre fonctions indépendantes, entières et du premier degré des coordonnées cartésiennes x, y, z, et si deux quadriques* (Σ) *et* (Σ_1) *sont représentées par les équations*

$$(\Sigma)\qquad PQ + RS = 0,$$

$$(\Sigma_1)\qquad PQ - RS = 0,$$

chacune d'elles est autopolaire par rapport à l'autre.

En effet, le plan polaire d'un point $M(P', Q', R', S')$ par rapport à Σ a pour équation

$$PQ' + QP' + RS' + SR' = 0.$$

Si ce point M est pris sur Σ_1, on a la relation

$$P'Q' - R'S' = 0$$

Pour avoir l'enveloppe des plans, il faut, en outre, tenir compte des relations

$$\frac{P}{P'} = \frac{Q}{Q'} = \frac{S}{-R'} = \frac{R}{-S'}.$$

L'équation de l'enveloppe est, par suite,

$$PQ - RS = 0,$$

c'est-à-dire que l'enveloppe est Σ_1.

Exemple :

$$(\Sigma)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

$$(\Sigma_1)\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

Si l'on pose $m^2=\frac{a^2}{b^2}$ et $n^2=\frac{a^2}{c^2}$, les équations peuvent s'écrire

$$(x-a)(x+a)+(my-nz)(my+nz)=0,$$
$$(x-a)(x+a)-(my-nz)(my+nz)=0.$$

Ces deux hyperboloïdes répondent à la question.

Remarque. — Représentons la quadrique Σ par l'équation

$$(\Sigma)\qquad lz^2+2kxy-t^2=0$$

avec

$$t=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1.$$

Par le point de contact B de Oy avec la quadrique, par exemple, menons une sécante arbitraire qui rencontre (Σ) en un second point C et le plan zOx en D. Soit M le conjugué harmonique de C par rapport aux points B et D. Si la sécante tourne autour de B, le point M décrit la quadrique (Σ_1) ayant pour équation

$$lz^2-2kxy-t^2=0.$$

En effet, menons un plan $y=\mu x$ qui coupe (Σ) suivant une conique (c). Un cône de sommet B et de base (c) a pour équation

$$lz^2+2k\mu x^2-t^2=0.$$

Le plan $y=-\mu x$, conjugué du précédent par rapport à zOy et zOx, coupe ce cône suivant une conique (M). Sur toute génératrice partant de B, à un point C de (c) correspond le point demandé M de (M).

En éliminant μ entre l'équation du cône et $y = -\mu x$, on obtient le lieu des coniques (M) et l'on voit que, si l'on élimine μ entre la même équation et celle du plan $y = \mu x$, on obtient le lieu des coniques (C) ou la surface (Σ). L'autre surface associée est Σ_1, dont l'équation est

$$z^2 - 2kxy - t^2 = 0.$$

Les équations de (Σ) et de (Σ_1) sont, comme on le voit, de la forme

$$\mathrm{PQ} + \mathrm{RS} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{PQ} - \mathrm{RS} = 0.$$

Le procédé pour obtenir l'une des quadriques, l'autre étant donnée, se trouve indiqué suffisamment.

Nota. — Considérons deux quadriques (Σ) et (Σ') rapportées à leur tétraèdre conjugué commun; leurs équations peuvent s'écrire

$$(\Sigma) \qquad a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{Y}^2 + c\mathrm{Z}^2 + d\mathrm{T}^2 = 0,$$
$$(\Sigma') \qquad a'\mathrm{X}^2 + b'\mathrm{Y}^2 + c'\mathrm{Z}^2 + d'\mathrm{T}^2 = 0.$$

Si l'on cherche la polaire réciproque de (Σ') par rapport à (Σ), on obtient une surface (Σ'') représentée par l'équation

$$\frac{a^2}{a'}\mathrm{X}^2 + \frac{b^2}{b'}\mathrm{Y}^2 + \frac{c^2}{c'}\mathrm{Z}^2 + \frac{d^2}{d'}\mathrm{T}^2 = 0.$$

Exprimons maintenant que (Σ'') et (Σ') coïncident, nous avons les relations

$$\frac{a'^2}{a^2} = \frac{b'^2}{b^2} = \frac{c'^2}{c^2} = \frac{d'^2}{d^2}.$$

On voit que l'on est ramené à une simple question de signes, car on peut désigner par $k^2 = 1$ la valeur commune de tous ces rapports. On aura

$$a' = \pm a, \qquad b' = \pm b, \qquad c' = \pm c, \qquad d' = \pm d.$$

1° Dans l'équation de (Σ), changeons le signe d'un seul carré, du dernier, par exemple, nous aurons une autre quadrique

$$(\Sigma_1) \qquad aX^2 + bY^2 + cZ^2 - dT^2 = 0,$$

qui sera sa polaire réciproque par rapport à (Σ).

2° Changeons dans l'équation de (Σ) les signes des deux derniers carrés, par exemple, nous aurons une quadrique (Σ_2), savoir :

$$(\Sigma_2) \qquad aX^2 + bY^2 - cZ^2 - dT^2 = 0,$$

jouissant de la même propriété que (Σ_1).

Il est inutile de changer les signes de trois carrés, car on retomberait dans le premier cas.

D'ailleurs, en changeant les signes des quatre carrés, on retrouverait la quadrique (Σ).

On constate que deux quadriques (Σ) et (Σ_1) de la première catégorie sont inscrites dans un même cône suivant la même courbe; elles sont circonscrites l'une à l'autre.

Si, au contraire, on considère deux quadriques associées (Σ) et (Σ_2) de la seconde catégorie, leurs équations sont de la forme

$$PQ + RS = 0, \qquad PQ - RS = 0.$$

Elles ont comme génératrices communes les quatre côtés d'un quadrilatère gauche.

Supposons que l'on se donne

$$(\Sigma) \quad \left(\frac{P+Q}{2}\right)^2 - \left(\frac{P-Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{R+S}{2}\right)^2 - \left(\frac{R-S}{2}\right)^2 = 0.$$

Pour avoir (Σ_1), changeons les signes des deux derniers carrés, nous trouvons

$$(\Sigma_1)\quad \left(\frac{P+Q}{2}\right)^2-\left(\frac{P-Q}{2}\right)^2-\left(\frac{R+S}{2}\right)^2+\left(\frac{R-S}{2}\right)^2=0.$$

Ainsi à $PQ+RS=0$ correspond $PQ-RS=0$.

NOTE SUR LE PROBLÈME DU BILLARD CIRCULAIRE [1];

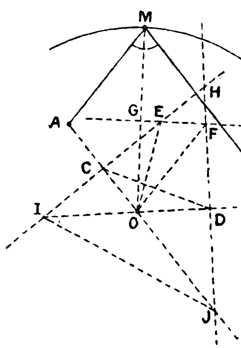
Par M. AURIC,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Soient une circonférence O et deux points A et B; il s'agit de trouver sur la circonférence un point M tel que

$$\widehat{AMO}=\widehat{OMB};$$

Considérons les cercles circonscrits aux deux triangles AMO, OMB. Les centres E, F de ces cercles

Fig. 1.



se trouvent à l'intersection des perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés OA, OM, OB.

[1] Voir *Nouvelles Annales*, t. I, p. 36; 1842.

On a d'ailleurs

$$\widehat{CEO} = \widehat{AMO} = \widehat{OMB} = \widehat{OFD},$$

car l'angle inscrit est égal à la moitié de l'angle au centre correspondant. Les deux triangles rectangles CEO, OFD sont semblables, et l'on a

$$\frac{CE}{DF} = \frac{OC}{OD} = \frac{OA}{OB} = \text{const.}$$

Cette relation prouve que la droite EF enveloppe une parabole. En effet, considérons les droites CE, DF comme les projections horizontales de deux droites situées dans l'espace et telles que les deux couples de points (C, D) (E, F) aient la même cote verticale. Le lieu des droites EF ainsi considérées est un paraboloïde à plan directeur horizontal ayant comme directrices les deux droites CE, DF; par suite, toutes les droites EF sont tangentes au contour apparent de ce paraboloïde, qui est évidemment une parabole.

Parmi les positions particulières prises par la droite EF se trouvent : 1° la droite CE lorsque le point F coïncide avec H; 2° la droite DF lorsque le point E vient en H; 3° la droite CD; 4° la droite IJ obtenue par le prolongement des droites AO, BO. On a en effet, par la similitude des triangles COI, ODJ,

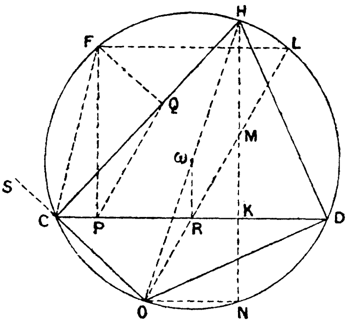
$$\frac{CI}{DJ} = \frac{OC}{OD} = \frac{OA}{OB}.$$

Rappelons que, lorsqu'un triangle est circonscrit à une parabole, le point de concours des hauteurs appartient à la directrice et le cercle circonscrit passe par le foyer.

Il en résulte que la directrice passe par O, point de concours des hauteurs du triangle HIJ, et que le foyer se trouve sur le cercle circonscrit à HCD, lequel est décrit sur HO comme diamètre.

Soient donc le triangle HCD, ω le cercle circonscrit décrit sur OH comme diamètre, M le point de concours des hauteurs.

Fig. 2.



On sait, d'après un théorème connu, que $KM = KN$; or l'angle $\widehat{HNO}$ est droit; il en résulte que ON et CD sont parallèles et que, par suite, la directrice OM passe par R milieu de CD.

Soient f le foyer de la parabole, P, Q ses projections sur les tangentes CD, CH ; la droite PQ est la tangente au sommet, et, par suite, est parallèle à OL; or le quadrilatère fCPQ est inscriptible; d'où

$$\widehat{fCQ} = \widehat{fPQ},$$

ou

$$\widehat{fCS} = \widehat{QPD} = \text{LON};$$

or

$$\widehat{\text{LON}} = \tfrac{1}{2}(\text{arc DL} + \text{arc DN}),$$

$$\widehat{fCS} = \tfrac{1}{2}(\text{arc} fC + \text{arc CO}),$$

comme arc CO = arc DE; il en résulte que arc fC = arc DL, c'est-à-dire que fL est parallèle à CD.

La parabole est donc entièrement déterminée; il suffit de construire le cercle circonscrit à OCD, de joindre O au milieu de CD et de mener Lf parallèle à CD; f est le foyer, OL la directrice.

Revenant à la figure primitive, on voit que EF est tangente à un cercle de centre O et de rayon $OG = \frac{1}{2}OM$. Par suite, les solutions cherchées seront les tangentes communes à la parabole et à ce cercle; il y aura quatre, trois ou deux solutions selon que le cercle est extérieur, tangent ou sécant à la parabole.

Lorsque le point O, centre du cercle, se trouve sur l'axe de la parabole, le problème s'achève avec la règle et le compas, car les solutions sont symétriques par rapport à cet axe; dans ce cas, l'angle fOL est droit, c'est-à-dire que fL est un diamètre du cercle circonscrit.

Les solutions trouvées ne sont pas toujours des solutions dans le véritable sens du mot; en d'autres termes, la bille ne pourrait pas toujours suivre matériellement le chemin qui lui est tracé; on s'en rend parfaitement compte en examinant quelques cas particuliers.

SUR QUELQUES THÉORÈMES DE LA GÉOMÉTRIE DES CONIQUES;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

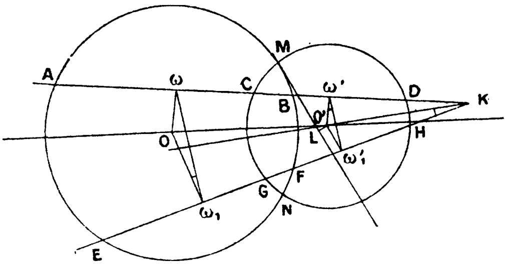
Cette Note a pour but de montrer comment, par une série de transformations, on peut déduire un grand nombre de propositions, déjà connues ou nouvelles, du théorème de Géométrie suivant :

1. *L'enveloppe d'une droite coupant harmonique-*

ment deux cercles donnés est une conique ayant pour foyers les centres des deux cercles.

Voici d'abord comment on peut démontrer simplement cette proposition, qui a d'ailleurs déjà été souvent remarquée. Soient O et O′ les deux cercles donnés, (ABCD), (EFGH) deux positions de la droite mobile,

Fig. 1.



K leur point de rencontre. Menons des centres O et O′ les perpendiculaires $O\omega$, $O\omega_1$, $O'\omega'$, $O'\omega'_1$ sur les deux droites et joignons $\omega\omega_1$, $\omega'\omega'_1$. Les cercles ω et ω_1 de diamètres AB et EF coupent orthogonalement le cercle O′ : donc le point O′ est situé sur leur axe radical. Le point K étant visiblement aussi un point de cet axe radical, la droite KO′ est perpendiculaire sur la ligne des centres $\omega\omega_1$. Les deux angles $O\omega_1\omega$, $O'K\omega_1$ sont alors égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires, mais on a

$$\widehat{O'K\omega_1} = \widehat{O'\omega'\omega'_1}$$

dans le quadrilatère inscriptible $O'\omega'K\omega'_1$. Les deux triangles $O\omega\omega_1$, $O'\omega'\omega'_1$ qui ont déjà un angle égal $\left(\widehat{\omega O\omega_1} = \widehat{\omega' O'\omega'_1}\right)$ sont semblables, et l'on a la relation

$$\frac{O\omega}{O'\omega'_1} = \frac{O\omega_1}{O'\omega'} \qquad \text{ou} \qquad O\omega \times O'\omega' = O\omega_1 \times O'\omega'_1\,;$$

ce qui prouve que la droite mobile enveloppe une conique ayant pour foyers O et O′.

Les tangentes aux cercles O et O′ en leurs points d'intersection M et N sont évidemment des positions de la droite mobile : donc la conique enveloppe est tangente à ces quatre droites. On voit aussi que, R et R′ désignant les rayons des deux cercles, le carré du demi-petit axe de l'enveloppe a pour valeur $R \times O'L$ ou $RR' \cos O'ML$. Quand les deux cercles se coupent orthogonalement, l'enveloppe se réduit aux deux points O et O′.

2. Transformons la proposition précédente en lui appliquant le principe de dualité. Remarquons que la conique enveloppe ayant pour foyers O et O′ est tangente aux droites isotropes issues de O et O′, c'est-à-dire est tangente aux tangentes aux deux cercles menées par les points cycliques I et J. La proposition corrélative sera alors la suivante :

Le lieu des points tels que les tangentes menées de chacun d'eux à deux cercles O et O′ forment un faisceau harmonique est une conique passant par les huit points de contact des quatre tangentes communes.

3. Généralisons les deux propriétés précédentes en leur faisant subir une transformation homographique quelconque amenant les points cycliques à distance finie. On aura les deux théorèmes suivants, relatifs à deux coniques quelconques du plan :

1° *L'enveloppe d'une droite coupant harmoniquement deux coniques est une autre conique tangente aux huit tangentes à ces deux coniques en leurs points d'intersection;*

2° *Le lieu des points tels que les tangentes menées* *de chacun d'eux à deux coniques forment un faisceau harmonique est une conique passant par les huit points de contact des tangentes communes.*

4. Un cas particulier intéressant, que nous allons considérer, est celui où l'une des coniques est formée de deux points. Dans cette supposition, le second théorème s'énoncera de la façon suivante :

Le lieu des points tels que les tangentes menées de chacun d'eux à une conique soient conjuguées des droites les joignant à deux points fixes est une conique passant par ces deux points et les points de contact des tangentes menées de chacun d'eux à la conique donnée.

Ce théorème peut encore s'énoncer ainsi :

Le lieu des points tels que les droites les joignant à deux points fixes soient conjuguées par rapport à une conique est une conique passant par les deux points et les points de contact des tangentes menées de chacun d'eux à la conique donnée.

Si P est le point de rencontre des polaires des deux points A et B par rapport à la conique donnée S, P est le point d'intersection de deux sécantes communes à S et à la conique lieu Σ : donc P est un pôle double de ces deux coniques et, comme la polaire de P par rapport à S est la droite AB, cette droite est aussi la polaire de P par rapport à Σ.

Corollaire. — Deux points quelconques A et B, et les points de rencontre avec une conique de leurs polaires par rapport à cette conique, sont situés sur une même conique. La droite AB a même pôle par rapport aux deux coniques.

5. Remarquons que toutes les tangentes menées des différents points du lieu précédent à la conique S déterminent une involution sur la droite joignant les deux points fixes, involution dont les points doubles sont ces deux points fixes. Le théorème pourra donc aussi s'exprimer ainsi :

Étant données une conique et une involution sur une droite de son plan, le lieu des points de rencontre des tangentes menées de chaque couple de points homologues est une conique passant par les points doubles de l'involution et par les points de contact des tangentes menées à la conique par ces points doubles.

Corollaire. — Étant donnés une conique et quatre points A, B, C, D sur une droite, si de chacun d'eux on mène les tangentes à la conique, les huit points de rencontre des tangentes des couples (AB) (CD) sont sur une conique passant par les deux points doubles de l'involution définie par (AB) et (CD) et par les points de contact des tangentes menées des deux points doubles à la conique.

6. Supposons que la droite Δ soit tangente à la conique. Alors une des tangentes menées de chacun des points doubles de l'involution à la conique ayant son point de contact sur la droite, la conique lieu se décompose en deux droites : la droite donnée est celle qui passe par les points de contact des deux autres tangentes menées des points doubles à la conique. De là le théorème suivant :

Le lieu des points de rencontre des tangentes menées à une conique par chaque couple de points homologues d'une involution déterminée sur une tangente à la conique est une droite.

Le théorème corrélatif par dualité s'énoncera ainsi :

7. *Les cordes interceptées dans une conique par un faisceau involutif ayant son sommet sur la conique passent par un point fixe qui est le pôle de la corde interceptée dans la conique par les rayons doubles.*

C'est le théorème de Frégier généralisé.

Dans le cas particulier où les rayons doubles sont les droites isotropes, tous les couples de rayons homologues de l'involution sont rectangulaires ; on obtient le théorème de Frégier.

8. Considérons de nouveau une conique S et une droite D dans son plan.

Soient A et B deux points quelconques de la droite, C et D deux points conjugués par rapport à A et B. La conique Σ du lieu (5), relative à l'involution dont C et D sont les points doubles, passe par C et D et par les points de rencontre des tangentes à S menées par A et B. Soient E et F deux autres points conjugués par rapport à A et B. La conique Σ, relative à l'involution dont E et F sont les points doubles, passe par E et F et par les points de rencontre des tangentes menées à S par A et B, ... ; toutes les coniques Σ forment donc un faisceau et l'on voit qu'elles déterminent une involution sur la droite D, involution dont les points doubles sont A et B. Toutes les coniques circonscrites à un quadrilatère déterminent donc sur la troisième diagonale du quadrilatère complet une involution dont les points doubles sont les deux sommets du quadrilatère complet situés sur cette diagonale. Cette propriété peut d'ailleurs être considérée comme une conséquence du théorème de Desargues. En particulier, deux des diagonales du quadrilatère qui constituent une des coniques du faisceau divisent harmoniquement la troisième diagonale.

Cas où la droite D *est la droite de l'infini.* — Considérons sur la droite de l'infini l'involution dont les points cycliques sont les points doubles. Alors tous les couples de points homologues sont les points à l'infini dans deux directions rectangulaires. La conique Σ, relative à une conique quelconque S, passant par les points cycliques, est un cercle; ce cercle est le lieu des points de rencontre des tangentes à la conique perpendiculaires entre elles; donc :

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une conique est un cercle.

Ce cercle orthoptique est concentrique à la conique, puisque nous avons fait remarquer que la droite D, ici la droite de l'infini, avait même pôle par rapport aux deux coniques S et Σ.

La parabole est tangente à la droite de l'infini, donc (6) :

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une parabole est une droite.

Le cercle orthoptique d'une conique passera aussi par les points de rencontre de la conique avec les polaires des points cycliques. Les couples de sécantes communes à la conique et au cercle orthoptique sont donc les deux couples de directrices et les polaires des points cycliques. On peut, en particulier, définir les directrices d'une conique comme étant les couples de sécantes communes à la conique et aux polaires des points cycliques [1].

---

[1] Cette définition, où n'interviennent pas les foyers, peut être

9. Il est évident que les points doubles de toutes les involutions, admettant pour couple de points conjugués deux points donnés, forment une involution dont les deux points donnés sont les points doubles. Considérons, en particulier, toutes les involutions de la droite de l'infini dont les points cycliques constituent un couple de points conjugués. Les coniques Σ relatives à une conique S et à toutes ces involutions seront des hyperboles équilatères concentriques à la conique S. Toutes ces hyperboles équilatères auront quatre points communs : ce seront les points de rencontre des tangentes à la conique S issues des points cycliques, c'est-à-dire les foyers de la conique S (8). On peut donc énoncer le théorème suivant :

Les foyers d'une conique sont quatre points (deux réels et deux imaginaires) communs à une infinité d'hyperboles équilatères concentriques à la conique; chacune de ces hyperboles passe par les extrémités des diamètres de la conique conjugués à ses asymptotes.

Les axes de la conique, formant un système de diamètres conjugués rectangulaires, constituent l'une de ces hyperboles équilatères; donc :

Les foyers d'une conique sont les points de rencontre de ses axes et d'une hyperbole équilatère concentrique à la conique, en particulier de l'hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes de coordonnées. On retrouve ainsi par la Géométrie ce résultat curieux auquel, comme on sait, on est conduit dans

---

prise pour point de départ d'une méthode de recherche analytique de l'équation du système des directrices d'une conique.

l'une des méthodes analytiques de recherche des foyers ([1]).

En nous appuyant sur les théorèmes précédemment vus, nous nous proposons dans ce qui va suivre de démontrer une proposition générale dont le théorème connu de M. Faure sur les cercles circonscrits aux triangles conjugués par rapport à une conique n'est qu'un cas particulier. Auparavant nous établirons encore la propriété suivante :

Une conique Σ *étant harmoniquement circonscrite à une conique* S, *les tangentes menées d'un point quelconque* M *de* Σ *à* S *sont conjuguées des droites joignant le point* M *aux points de rencontre de* S *avec la polaire du point* M.

On sait qu'une conique Σ est dite harmoniquement

([1]) On voit que l'on peut remplacer l'hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes de coordonnées par l'une quelconque des hyperboles du faisceau. Ainsi l'équation de l'ellipse étant prise sous la forme

$$(1) \qquad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

l'hyperbole du faisceau, ayant pour asymptotes les bissectrices des angles des axes de l'ellipse, aura pour axe transverse l'axe focal de l'ellipse, ses sommets seront les foyers. Nous savons que cette hyperbole passe par les extrémités des diamètres de l'ellipse conjugués aux droites de coefficients angulaires $+1$ et -1, en particulier, du diamètre $y = -\dfrac{b^2}{a^2}x$. Remplaçant y par cette valeur dans (1), il vient

$$x^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2}.$$

En formant $x^2 - y^2$, on aura la valeur du carré du demi-axe transverse de l'hyperbole équilatère, c'est-à-dire la distance du foyer de l'ellipse au centre de la courbe; or

$$x^2 - y^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2} - \frac{b^4}{a^2 + b^2} = \frac{a^4 - b^4}{a^2 + b^2} = a^2 - b^2.$$

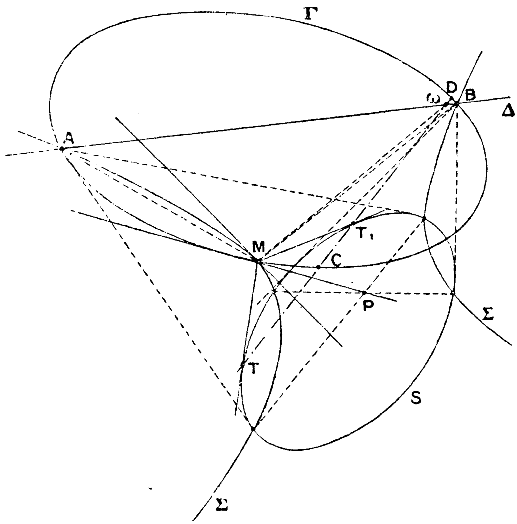
circonscrite à une conique S quand elle est circonscrite à un triangle ABC conjugué par rapport à S. Soit alors Γ la conique enveloppe des droites coupant harmoniquement S et Σ. La conique Σ étant circonscrite au triangle ABC conjugué par rapport à S, les trois droites AB, AC, BC, sont divisées harmoniquement par S et Σ ce sont donc trois tangentes à la conique Γ. Il en est de même, comme nous le savons, des tangentes MT, NT à la conique S en deux points M et N de rencontre de S et Σ. Or les pôles des cinq tangentes AB, AC, BC, MT, NT à la conique Γ par rapport à la conique S sont situés sur Σ, donc Σ est la polaire réciproque de Γ par rapport à S. Il en résulte que la polaire d'un point quelconque de Σ par rapport à S étant tangente à Γ coupe harmoniquement S et Σ.

Remarque. — En transformant homographiquement de façon que deux des sommets B et C du triangle ABC deviennent les points cycliques, la conique conjuguée S devient une hyperbole équilatère ayant pour centre le point a transformé de A, la conique circonscrite Σ devient un cercle, passant par le centre a de l'hyperbole; on a l'énoncé suivant :

La polaire d'un point quelconque d'un cercle passant par le centre d'une hyperbole équilatère, par rapport à cette hyperbole, est divisée harmoniquement par les deux courbes.

Soient maintenant une conique S et une droite Δ dans son plan, joignant deux points quelconques A et B; soit Σ la conique passant par A, B et les points de contact des tangentes menées de A et B à S. Σ est le lieu des points tels que les tangentes menées de chacun d'eux à S soient conjuguées des droites les joignant aux points A et B (4). Considérons une troisième conique Γ passant par les points A et B, et circonscrite à un triangle quelconque conjugué par rapport à S. On sait que les tangentes MT, MT_1 de tout point M de Γ à S sont conjuguées par rapport aux droites joignant M aux points de rencontre C et D avec Γ de la polaire de M par rapport à S. Soit alors M un des points de rencontre de Γ avec Σ. La conjuguée de la tangente en M à Σ par rapport aux droites MA et MB est évidemment la droite joignant le point M au pôle P de la corde AB par rapport à Σ, qui est aussi le pôle de AB par rapport à S. Or je dis que cette droite MP est la tangente en M à la conique Γ.

Fig. 2.



En effet, les deux couples de droites (MA, MB), (MC, MD) sont conjuguées par rapport aux tangentes MT, MT_1. Donc, d'après le théorème de Frégier, le point de rencontre ω de AB et CD appartient à la conjuguée de la tangente en M à Γ par rapport aux rayons doubles MT, MT_1 de l'involution; en d'autres termes, la conjuguée de $M\omega$ par rapport aux droites MT, MT_1, est la tangente en M à Γ. Or cette conjuguée est la droite MP, car la droite MP étant la polaire de ω par rapport à S puisqu'elle joint les pôles P et M des deux droites AB et TT_1 passant par ω, les droites MP et $M\omega$ sont conjuguées par rapport à la conique S et, par suite, forment un faisceau harmonique avec les tangentes MT et MT_1.

Il résulte de la démonstration précédente le théorème suivant :

Étant donnée une conique S *et deux points* A *et* B, *si l'on considère la conique* Σ *passant par* A, B *et les points de contact des tangentes à* S *issues de* A *et* B, *toute conique* Γ *passant par* A, B *et circonscrite à un triangle quelconque conjugué à la conique* S, *coupe* Σ *en deux points tels que les tangentes à* Γ *et* Σ *en chacun de ces points soient conjuguées par rapport aux droites les joignant aux points* A *et* B.

Pour déduire de là le théorème de M. Faure, il suffit de considérer le cas particulier où les points A et B sont les points cycliques. Alors la conique Σ est le cercle orthoptique de S, les coniques Γ sont les cercles circonscrits aux triangles conjugués par rapport à S; on obtient le théorème énoncé par M. Faure :

Les cercles C, *circonscrits aux triangles conjugués par rapport à une conique, coupent orthogonalement un cercle fixe, qui est le cercle orthoptique de la conique.*

En effet, les tangentes aux cercles C et au cercle orthoptique en leurs points d'intersection avec ce cercle, étant conjuguées par rapport aux droites isotropes, sont rectangulaires.

En particulier :

1° Le cercle orthoptique d'une hyperbole équilatère est réduit au centre de la courbe, donc :

Tout cercle circonscrit à un triangle conjugué par rapport à une hyperbole équilatère passe par le centre de la courbe.

2° Le cercle orthoptique d'une parabole est dégénéré en une droite, la directrice, donc :

Le lieu des centres des cercles circonscrits aux triangles conjugués par rapport à une parabole est la directrice.

Les directrices de toutes les paraboles conjuguées par rapport à un triangle passent par le centre du cercle circonscrit au triangle.

Le centre du cercle circonscrit à un triangle est l'orthocentre du triangle formé en joignant les milieux des côtés, et toutes les paraboles conjuguées par rapport au premier triangle sont inscrites dans le second ; donc :

Les directrices des paraboles inscrites dans un triangle passent par l'orthocentre du triangle.

PROBLÈME SUR LE FROTTEMENT;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Le problème suivant, quoique fort simple, offre quelque intérêt parce qu'on peut le discuter plus complètement que bien des problèmes relatifs au frottement : une application numérique en a été proposée comme question de licence à Marseille en 1892.

Dans un plan vertical, un disque circulaire, pesant et homogène, repose sur une horizontale fixe OX qu'il touche au point A ; une barre pesante OD, parfaitement mobile autour de son extrémité O, appuie sur le disque, qu'elle touche au point B ; les coefficients de frottement du disque sur OX et sur OD, au départ comme en cas de glissement, ont une même valeur f. Déterminer la valeur minimum que peut atteindre f sans que le système cesse d'être en équilibre ; chercher ensuite, pour les diverses valeurs de f inférieures à ce minimum, de quelle manière le disque, maintenu d'abord en repos, puis abandonné en liberté, commencerait à se mouvoir.

Pour embrasser tous les cas, écrivons les équations propres à déterminer, d'une manière générale, le mouvement du système. Soient

m la masse du disque ;
R son rayon ;
x la longueur des tangentes OA, OB ;
ω la vitesse angulaire du disque autour de son centre C, comptée positivement lorsque la vitesse qu'elle imprimerait au point A du disque est dirigée dans le sens de AO ;
M la masse de la barre OD ;
l la distance de son centre de gravité au point O ;
μ son moment d'inertie par rapport à ce point ;
2θ l'angle DOX.

Aux points A, B, le disque est soumis à deux réactions normales a, b et à deux réactions tangentielles α, β, dirigées suivant AO, BO, puisque, sans l'intervention du frottement, les points A, B du disque glisseraient dans les directions OA, OB, l'angle AOX diminuant.

Comme le centre de gravité C du disque reste à une hauteur constante, on a

$$(1)\qquad a - mg - b\cos 2\theta - \beta \sin 2\theta = 0;$$

la variation de l'abscisse x de ce centre est déterminée par l'équation

$$(2)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = b\sin 2\theta - \beta\cos 2\theta - \alpha;$$

enfin l'on a, pour le mouvement du disque autour d'une perpendiculaire à son plan menée par le centre de gravité,

$$\frac{1}{2}m\mathrm{R}^2\frac{d\omega}{dt} = \mathrm{R}(\alpha - \beta),$$

$$(3)\qquad m\mathrm{R}\frac{d\omega}{dt} = 2(\alpha - \beta).$$

Pour trouver le mouvement de la barre OD, nous prendrons les moments par rapport à une perpendiculaire au plan DOX menée par le point O :

$$(4)\qquad 2\mu\frac{d^2\theta}{dt^2} = bx - \mathrm{M}gl\cos 2\theta.$$

Mais on a évidemment

$$x = \mathrm{R}\cot\theta,\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mathrm{R}}{\sin^2\theta}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2\mathrm{R}\cos\theta}{\sin^3\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Si l'on n'envisage le mouvement que pendant un temps très court, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ est absolument négligeable vis-à-vis de $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ et l'on peut prendre $-\frac{\sin^2\theta}{\mathrm{R}}\frac{d^2x}{dt^2}$ pour $\frac{d^2\theta}{dt^2}$;

substituant dans l'équation (4), on en tire

$$(5) \qquad 2\mu \sin^2\theta \frac{d^2 x}{dt^2} = R(Mgl\cos 2\theta - bx).$$

Cherchons quelles doivent être les réactions pour qu'il y ait équilibre : en annulant les premiers membres des équations (2) et (3), on en tire

$$\alpha = \beta = b\tang\theta,$$

l'équation (1) donne alors

$$a = mg + b,$$

et l'équation (5) fait connaître b et, par suite, les autres réactions correspondant à l'équilibre; mais, pour qu'elles puissent être réalisées, il faut que α soit au plus égal à fa, β à fb; d'après les relations que je viens d'écrire, il faut et il suffit pour cela que $\tang\theta$ soit $\leqq f$; il y aura équilibre dès que f sera au moins égal à $\tang\theta$ ou à $\frac{R}{x}$.

Si l'on attribue à f des valeurs décroissantes à partir de $\tang\theta$, c'est au point B, où la réaction normale est la plus faible, que se produira d'abord un glissement. Cherchons dans quelles conditions le disque, d'abord maintenu en repos, se mettra en mouvement en roulant sans glisser sur OX quand on le laissera libre. La réaction tangentielle β sera égale à fb, et, comme l'accélération initiale du point A est perpendiculaire à OX, nous aurons, au début du mouvement,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - R\frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Eu égard à ces relations, on tire des équations (2) et (3)

$$(6) \qquad 3\alpha = b(\sin 2\theta + 2f - f\cos 2\theta),$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{4b}{3m}\cos^2\theta(\tang\theta - f).$$

Cette valeur de $\frac{d^2x}{dt^2}$ devant évidemment être positive, on voit que f doit être $< \operatorname{tang}\theta$; si on la substitue dans (5), on en déduit

$$(7)\quad [2\mu \sin^2 2\theta(\operatorname{tang}\theta - f) + 3m\mathrm{R}x]b = 3\mathrm{M}mgl\mathrm{R}\cos 2\theta.$$

Pour qu'il n'y ait pas glissement au point A, il faut que la valeur (6) de 3α soit au plus égale au produit de $3f$ par la valeur de a tirée de l'équation (1), ou que l'on ait

$$b(\sin 2\theta + 2f - f\cos 2\theta) \leqq 3f[mg + b(\cos 2\theta + f\sin 2\theta)];$$

remplaçons b par sa valeur tirée de l'équation (7) et chassons le dénominateur toujours positif si $f < \operatorname{tang}\theta$; il vient, après de simples réductions,

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(3 - \frac{2\mu}{\mathrm{MR}l}\operatorname{tang} 2\theta\right)f^2 \\ &\quad + \left(\cot\theta - 3\operatorname{tang}\theta + \frac{4\mu}{\mathrm{MR}l}\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{6mx}{\mathrm{M}l\sin 4\theta}\right)f - 1 \geqq 0. \end{aligned} \right.$$

Pour $f = \operatorname{tang}\theta$, le trinome prend la valeur $\frac{6m\mathrm{R}}{\mathrm{M}l\sin 4\theta}$, toujours positive; si le coefficient de f^2 est positif, le trinome admet une racine positive f' et une racine négative; f doit être supérieur à f', tout en restant inférieur à $\operatorname{tang}\theta$ qui est, comme on le vérifie, lui-même supérieur à f'; si le coefficient de f^2 est négatif, le trinome a deux racines positives entre lesquelles est compris $\operatorname{tang}\theta$; f doit lui-même être compris entre $\operatorname{tang}\theta$ et la plus petite, f', des racines. Ainsi, dans tous les cas, on connaît le minimum au-dessous duquel f ne doit pas descendre pour qu'il y ait roulement.

Lorsque f est inférieur à f', le disque glisse sur les deux barres et l'on a $\alpha = fa$; les équations (1), (2), (3), (5) font connaître a, b, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d\omega}{dt}$; la vitesse du point A du disque est d'abord dirigée dans le sens où x croît et $\frac{d^2x}{dt^2} - R\frac{d\omega}{dt}$ est d'abord positif; si l'on exprime cette condition, on trouve que f doit satisfaire à l'inégalité (8) changée de sens. Il n'existe pas de valeurs de f pour lesquelles le disque roulerait sur OD en glissant sur OX, ce qui, *a priori,* semblait bien évident.

SOLUTION, PAR LA GÉOMÉTRIE VECTORIELLE, DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1892 POUR LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

Par M. GENTY.

Soient Q *une quadrique circonscrite à un ellipsoïde donné* E *et* A *le pôle, par rapport à l'ellipsoïde, du plan* P *de la courbe de contact des deux surfaces :*

1° *Démontrer qu'il y a, en général, trois quadriques* Q_1, Q_2, Q_3 *homofocales avec l'ellipsoïde* E *et telles que les plans polaires* P_1, P_2, P_3 *du point* A *par rapport aux quadriques* Q_1, Q_2, Q_3 *passent par le centre de la quadrique* Q.

2° *Les plans* P_1, P_2, P_3 *sont les plans principaux de la quadrique* Q, *et les coniques* C_1, C_2, C_3 *intersections des surfaces* (P_1, Q_1), (P_2, Q_2), (P_3, Q_3) *sont les focales de cette quadrique.*

3° *Les projections orthogonales des coniques* C_1, C_2, C_3 *sur les plans principaux de l'ellipsoïde* E *sont des coniques homofocales.*

On projettera, en particulier, ces coniques sur le plan principal qui contient l'axe majeur et l'axe moyen de l'ellipsoïde, et l'on cherchera le lieu décrit *par le foyer des coniques projetées, quand la quadrique Q varie en restant circonscrite à l'ellipsoïde, le plan P de la courbe de contact ne changeant pas.*

Soient

$$S\rho\varphi^{-1}\rho = 1,$$

l'équation de l'ellipsoïde E et α le vecteur du point A.

L'équation de la quadrique Q sera

$$S\rho\varphi^{-1}\rho - 1 + l(S\rho\varphi^{-1}\alpha - 1)^2 = 0$$

ou

$$S\rho\Phi\rho - 2lS\rho\varphi^{-1}\alpha + l - 1 = 0,$$

en posant

$$\Phi\rho = \varphi^{-1}\rho + l\varphi^{-1}\alpha S\rho\varphi^{-1}\alpha.$$

Le vecteur du centre C de cette quadrique est

$$\gamma = m\alpha,$$

où l'on a posé

$$m = \frac{l}{1 + lS\alpha\varphi^{-1}\alpha}.$$

1° Une quadrique quelconque homofocale avec l'ellipsoïde E a pour équation

$$S\rho(\varphi - k)^{-1}\rho = 1.$$

Le plan polaire du point A par rapport à cette quadrique a pour équation

$$S\rho(\varphi - k)^{-1}\alpha = 1,$$

et, pour que ce plan passe par le point C, il faut qu'on ait

$$(1) \qquad mS\alpha(\varphi - k)^{-1}\alpha = 1,$$

équation du troisième degré en k.

On reconnaît facilement que les trois racines de cette équation sont réelles. Au surplus, si m est positif, l'équation (1) donne les trois surfaces homofocales avec l'ellipsoïde E qui passent par le point ayant pour vecteur $\sqrt{m}\alpha$. Si m est négatif, les trois quadriques Q_1, Q_2 et Q_3 sont encore réelles, mais elles n'ont aucun point commun réel.

2° Soient k_1, k_2 et k_3 les racines de l'équation (1); le plan P_1 aura pour équation

$$S\rho(\varphi - k_1)^{-1}\alpha = 1.$$

Or on a

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi - k_1)^{-1}\alpha &= \varphi^{-1}(\varphi - k_1)^{-1}\alpha + l\varphi^{-1}\alpha S\alpha\varphi^{-1}(\varphi - k_1)^{-1}\alpha \\ &= \frac{1}{k_1}[(\varphi - k_1)^{-1}\alpha - \varphi^{-1}\alpha] \\ &\quad + \frac{l}{k_1}\varphi^{-1}\alpha[S\alpha(\varphi - k)^{-1}\alpha - S\alpha\varphi^{-1}\alpha],\end{aligned}$$

ou, en tenant compte de l'équation (1),

$$\Phi(\varphi - k_1)^{-1}\alpha = \frac{1}{k_1}(\varphi - k_1)^{-1}\alpha.$$

On trouvera de même

$$\Phi(\varphi - k_2)^{-1}\alpha = \frac{1}{k_2}(\varphi - k_2)^{-1}\alpha,$$

$$\Phi(\varphi - k_3)^{-1}\alpha = \frac{1}{k_3}(\varphi - k_3)^{-1}\alpha.$$

Donc les plans P_1, P_2 et P_3 sont les plans principaux de la quadrique Q, et si l'on désigne par ξ, η et ζ les orienteurs des axes de cette quadrique, et si l'on prend le centre C pour origine, son équation pourra se mettre sous la forme

$$\frac{S^2\rho\xi}{k_1} + \frac{S^2\rho\eta}{k_2} + \frac{S^2\rho\zeta}{k_3} = 1 - m.$$

Dans le cas particulier où la quadrique Q se confond avec le cône circonscrit ayant son sommet au point A, on retrouve ce théorème bien connu :

Les axes de figure d'un cône circonscrit à un ellipsoïde sont les normales aux trois surfaces homofo-

cales avec cet ellipsoïde qui passent par le sommet du cône.

Le point C étant pris pour origine, le plan P_1 a pour équation

$$S\rho\xi = 0 \qquad \text{ou} \qquad S\rho(\varphi - k)^{-1}\alpha = 0,$$

et la conique C_1, intersection des surfaces P_1 et Q_1 a elle-même pour seconde équation

$$S\rho(\varphi - k)^{-1}\rho = 1 - m,$$

ou

$$(2) \quad S\rho\eta S\rho(\varphi - k_1)^{-1}\eta + S\rho\zeta S\rho(\varphi - k_1)^{-1}\zeta = 1 - m.$$

Or, si l'on pose

$$T^2(\varphi - k_1)^{-1}\alpha = a_1^2,$$
$$T^2(\varphi - k_2)^{-1}\alpha = b_1^2,$$
$$T^2(\varphi - k_3)^{-1}\alpha = c_1^2,$$

on a

$$(\varphi - k_1)^{-1}\eta = \frac{1}{b_1}(\varphi - k_1)^{-1}\alpha(\varphi - k_2)^{-1}\alpha$$
$$= \frac{1}{b_1(k_1 - k_2)}(b_1\eta - a_1\xi),$$

et de même

$$(\varphi - k_1)^{-1}\zeta = \frac{1}{c_1(k_1 - k_3)}(c_1\zeta - a_1\xi).$$

L'équation (2) devient alors

$$\frac{S^2\rho\eta}{k_2 - k_1} + \frac{S^2\rho\zeta}{k_3 - k_1} = 1 - m;$$

c'est précisément l'équation d'une conique focale de la quadrique Q.

Dans le cas particulier déjà considéré ci-dessus, on retrouve ce théorème de Chasles :

Les lignes focales d'un cône circonscrit à un ellipsoïde sont les génératrices de l'hyperboloïde réglé ho-

mofocal avec l'ellipsoïde qui passe par le sommet du cône.

3° On sait que les projections orthogonales des trois coniques focales d'une quadrique sur un plan quelconque sont des coniques homofocales. Nous allons établir directement cette proposition en prenant pour plan de projection le plan

$$S\nu\rho = 0,$$

mené par le point C parallèlement au plan principal de l'ellipsoïde E qui contient l'axe majeur et l'axe moyen de cette surface. Soient λ et μ les orienteurs de ces deux axes.

Si dans les équations de la conique C on remplace ρ par $\rho + t\nu$, et qu'on élimine t, il vient

$$\frac{S^2\rho\nu\xi}{k_2 - k_1} + \frac{S^2\rho\nu\eta}{k_3 - k_1} = (1 - m)S^2\nu\xi\,;$$

c'est l'équation de la projection C'_1 de la conique C_1 sur le plan considéré.

On obtiendrait les projections C'_2 et C'_3 des coniques C_2 et C_3 sur ce même plan, par une permutation tournante entre les vecteurs ξ, η, ζ et les scalaires k_1, k_2 et k_3.

Nous allons chercher les foyers de la conique C'_1.

Écrivons son équation sous la forme

$$S\rho\psi\rho = L,$$

en posant

$$\psi\rho = \frac{S\rho\nu\zeta}{k_2 - k_1}V\nu\zeta + \frac{S\rho\nu\eta}{k_3 - k_1}V\nu\eta,$$

$$L = (1 - m)S^2\nu\xi,$$

et soit ϖ le vecteur d'un foyer F de cette conique.

L'équation des tangentes menées du point F à la conique, ce point étant pris pour origine, sera

$$S\rho\psi\rho(S\varpi\psi\varpi - L) = S^2\rho\psi\varpi,$$

et, pour que F soit un foyer, il faut que cette équation soit vérifiée quand on remplace ρ par $\lambda \pm i\mu$, ce qui donne les deux conditions

$$(4)\qquad \begin{aligned} (S\varpi\psi\varpi - L)(S\lambda\psi\lambda - S\mu\psi\mu) &= S^2\lambda\psi\varpi - S^2\mu\psi\varpi, \\ (S\varpi\psi\varpi - L)S\lambda\psi\mu &= S\lambda\psi\varpi S\lambda\psi\varpi. \end{aligned}$$

Multiplions la première équation par $S\lambda\psi\mu$, la seconde par $S\lambda\psi\lambda - S\mu\psi\mu$, et retranchons-les membre à membre, il vient

$$S\lambda\psi\mu(S^2\lambda\psi\varpi - S^2\mu\psi\varpi) = (S\lambda\psi\lambda - S\mu\psi\mu)S\lambda\psi\varpi S\mu\psi\varpi,$$

équation qu'on ramène très simplement à la forme

$$(5)\qquad S\nu\varpi\psi\varpi = 0.$$

L'équation (4) peut elle-même s'écrire sous la forme

$$(6)\qquad SV\varpi\lambda V\psi\mu\psi\nu = (1-m)S^2\nu\xi S\lambda\psi\mu.$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \psi\varpi &= \frac{S\varpi\nu\zeta}{k_2-k_1}V\nu\zeta + \frac{S\varpi\nu\eta}{k_3-k_1}V\nu\eta, \\ \psi\mu &= \frac{S\lambda\zeta}{k_2-k_1}V\nu\zeta + \frac{S\lambda\eta}{k_3-k_1}V\nu\eta. \\ V\nu\psi\varpi &= \frac{S\varpi\nu\zeta}{k_2-k_1}(\nu S\zeta\nu - \zeta) + \frac{S\varpi\nu\eta}{k_3-k_1}(\nu S\eta\nu - \eta), \\ V\psi\varpi\psi\mu &= \frac{S^1\varpi\lambda S^2\nu\xi}{(k_2-k_1)(k_3-k_1)}\nu. \end{aligned}$$

En tenant compte de ces relations, les équations (5) et (6) deviennent

$$\begin{gathered} k_1 S\varpi\nu\zeta S\varpi\xi + k_2 S\varpi\nu\eta S\varpi\eta + k_3 S\varpi\nu\zeta S\varpi\zeta = 0, \\ S\varpi\lambda S\varpi\mu = (1-m)(k_1 S\lambda\xi S\mu\xi + k_2 S\lambda\eta S\mu\eta + k_3 S\lambda\zeta S\mu\zeta). \end{gathered}$$

La symétrie de ces équations montre que les trois coniques C'_1, C'_2, C'_3 sont bien homofocales.

On a d'ailleurs

$$k_1\xi = \Phi^{-1}\xi, \qquad k_2\eta = \Phi^{-1}\eta, \qquad k_3\zeta = \Phi^{-1}\zeta;$$

et les équations aux foyers deviennent

$$(7)\qquad \begin{cases} S\varpi\nu\Phi^{-1}\varpi = 0, \\ S\varpi\lambda\, S\varpi\mu = (1-m)\,S\lambda\,\Phi^{-1}\mu. \end{cases}$$

Or il est facile de trouver l'expression de Φ^{-1}. Posons, en effet,

$$\Phi\rho = \varphi^{-1}\rho + l\varphi^{-1}\alpha S\rho\varphi^{-1}\alpha = \sigma,$$

il viendra

$$\rho = \Phi^{-1}\sigma = \varphi\sigma - l\alpha S\rho\varphi^{-1}\alpha,$$

ou, en projetant avec $\varphi^{-1}\alpha$,

$$S\rho\varphi^{-1}\alpha = S\alpha\sigma - lS\rho\varphi^{-1}\alpha S\alpha\varphi^{-1}\alpha;$$

d'où

$$S\rho\varphi^{-1}\alpha = mS\alpha\sigma,$$

et, par suite,

$$\Phi^{-1}\sigma = \varphi\sigma - m\alpha S\alpha\sigma.$$

Si alors on désigne par x et y les coordonnées courantes dans le plan principal de l'ellipsoïde E, par x', y' les coordonnées de la projection A_1 du point A sur ce plan et par a, b, c les demi-axes de l'ellipsoïde, on aura

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}\varpi &= a^2x\lambda + b^2y\mu + c^2z\nu - mS\alpha\varpi(x'\lambda + y'\mu + z'\nu), \\ \Phi^{-1}\lambda &= a^2\lambda - mx'\alpha, \\ S\mu\Phi^{-1}\lambda &= -mx'y', \end{aligned}$$

et les équations (7) prennent la forme

$$\begin{gathered} (a^2-b^2)xy = m(xx'+yy')(x'y-y'x), \\ xy = (m^2-m)x'y', \end{gathered}$$

ou, en revenant à l'origine primitive,

$$(8)\qquad \begin{cases} (a^2-b^2)(x-mx')(y-my') \\ \quad = m(x'y-y'x)[x'(x-mx')+y'(y-my')], \\ xy - m(xy'+x'y-x'y') = 0. \end{cases}$$

De la seconde équation on déduit

$$m = \frac{xy}{xy' + x'y - x'y'},$$

d'où

$$x - mx' = \frac{xy'(x - x')}{xy' + x'y - x'y'},$$

$$y - my' = \frac{x'y(y - y')}{xy' + x'y - x'y'}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (8), il vient pour l'équation du lieu des foyers

$$(a^2 - b^2)(x - x')(y - y')$$
$$= (x'y - y'x)[x(x - x') + y(y - y')];$$

équation d'une strophoïde ayant le point A_1 pour point double.

THÉORÈME;

PAR M. G. TARRY.

On appelle figures *affines* les figures homographiques dans lesquelles les droites à l'infini se correspondent.

THÉORÈME. — *Lorsqu'une figure, qui reste toujours semblable à une figure donnée, se meut de manière que deux de ses points décrivent deux figures affines, ou bien deux droites, dans l'un et l'autre cas tous les points de la figure décriront des lignes affines ou bien des droites.*

Toutes ces droites passent par un point fixe, qui est à lui-même son homologue dans deux quelconques des figures affines.

Applications. — I. Quand les extrémités d'une droite de longueur constante parcourent deux droites fixes, un point quelconque lié invariablement à la droite décrit une ellipse.

II. Quand deux points d'une figure de similitude constante parcourent deux droites fixes, si la droite qui joint ces deux points passe par un point fixe, tous les points de la figure décrivent des hyperboles.

III. Quand deux points d'une figure de similitude constante parcourent deux circonférences fixes, avec des vitesses angulaires égales et de sens contraire, tous les points de la figure décrivent des ellipses ou des droites.

IV. Quand deux points d'une figure de similitude constante parcourent une ellipse fixe, de manière à se trouver simultanément aux extrémités de deux diamètres conjugués, tous les points de la figure décrivent des ellipses.

Si l'on considère les deux points mobiles comme étant les sommets opposés d'un carré, les deux autres sommets décriront des circonférences concentriques à l'ellipse. Les rayons de ces circonférences sont égaux à la demi-somme et à la demi-différence des axes de l'ellipse, divisée par $\sqrt{2}$. Les bissectrices des angles formés par deux rayons correspondants quelconques sont les droites fixes des axes de l'ellipse.

SUR LA STROPHOÏDE;

PAR M. ENRIQUE VALDÈS.

Le relevé de quelques erreurs contenues dans le travail de M. Balitrand (*Nouvelles Annales*, novembre

1893) nous a conduit à rassembler dans cette Note quelques-unes des propriétés de la strophoïde; l'étude de cette courbe sera simplifiée par la connaissance de ses points remarquables.

En prenant pour origine le point double D, pour axe des y la parallèle Δ à l'asymptote réelle et pour axe des x la perpendiculaire à cette asymptote, l'équation de la strophoïde est

$$x^3 + xy^2 - ax^2 - 2bxy + ay^2 = 0,$$

et, pour abréger, nous écrirons c^2 au lieu de $a^2 + b^2$.

1. L'asymptote réelle a pour équation

$$x + a = 0.$$

2. Les asymptotes isotropes

$$x + iy = a + bi,$$
$$x - iy = a - bi$$

se coupent en un point réel qui est le foyer singulier F de la strophoïde; son vecteur (droite qui joint ce point à l'origine) a pour équation

$$bx - ay = 0,$$

et ses coordonnées sont a et b.

3. Les coordonnées du foyer singulier vérifient l'équation de la strophoïde, d'où

Théorème. — *La strophoïde passe par le foyer singulier.*

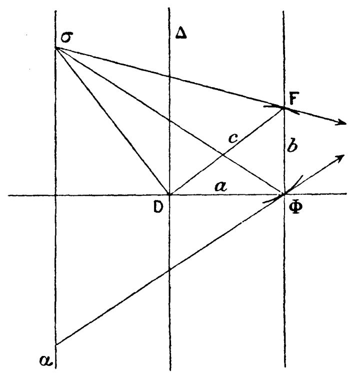
4. L'asymptote réelle rencontre la strophoïde en un point σ dont le vecteur a pour équation

$$ax + by = 0,$$

et dont les coordonnées sont $-a$ et $\frac{a^2}{b}$.

Pour obtenir le point σ, il suffit donc de joindre D à F et d'élever en D à DF la perpendiculaire qui rencontre l'asymptote réelle au point σ (*fig.* 1).

Fig. 1.



D'autre part, on sait que les *points de section* d'une cubique sont trois points en ligne droite; donc, puisque deux de ces points sont confondus en F (les asymptotes isotropes y passent toutes deux ainsi que la strophoïde), on voit que la droite σF est tangente à la strophoïde au point F ; on a donc ces théorèmes :

Théorème. — *L'asymptote réelle et le foyer singulier sont équidistants de la droite* Δ.

Théorème. — *La droite* σF *qui joint le point de section au foyer singulier est vue du point double sous un angle droit et est tangente à la strophoïde au foyer singulier.*

5. Le cercle circonscrit au triangle asymptotique a pour équation

$$(x-a)^2+(y-b)^2=0$$

(c'est le foyer singulier); il rencontre l'asymptote réelle en deux points imaginaires conjugués, et les tangentes en ces points ont pour équations

$$x + iy = a + bi, \qquad x - iy = a - bi$$

(ce sont les asymptotes isotropes); les symédianes du triangle, issues de ces points, sont donc ces mêmes asymptotes isotropes et, puisque celles-ci se rencontrent au foyer singulier, nous pouvons énoncer le théorème suivant, déjà énoncé sous une forme plus générale (*Nouvelles Annales*, juin 1892):

Théorème. — *Le point de Lemoine du triangle asymptotique de la strophoïde coïncide avec son foyer singulier.*

6. Les coordonnées $x = a$, $y = 0$ vérifient l'équation de la strophoïde; d'où

Théorème. — *La strophoïde passe par le point* Φ, *projection du foyer singulier sur la perpendiculaire abaissée du point double sur l'asymptote réelle.*

7. La tangente au point Φ a pour équation

$$ax - 2by - a^2 = 0;$$

elle rencontre l'asymptote réelle au point dont l'ordonnée est $-\frac{a^2}{b}$; d'où

Théorème. — *La tangente au point* Φ *et la droite* $\sigma\Phi$ *font des angles égaux avec la droite* DΦ.

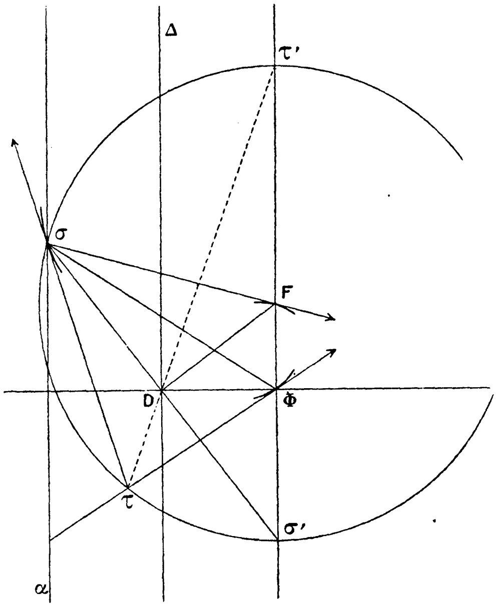
8. Le tangentiel de Φ est un point τ, dont le vecteur a pour équation

$$x(b^2 + c^2) - aby = 0;$$

d'autre part, la tangente au point de section σ a pour équation (*fig.* 2)

$$a(a^2 + 3b^2)x + 2b^3y + a^2c^2 = 0,$$

Fig. 2.



et l'équation du vecteur du tangentiel de ce point est

$$(b^2 + c^2)x - aby = 0;$$

par suite, on a le théorème suivant :

Théorème. — *Les points σ et Φ ont le même tangentiel τ.*

9. Soit σ' le symétrique de σ par rapport au point double ; le triangle isoscèle $\sigma F \sigma'$ (*fig.* 2) montre que DF est la bissectrice de $\sigma F \sigma'$, que $D\sigma$ est la bissectrice de $\alpha\sigma F$ et que

$$\sigma F = \sigma' F = \frac{c^2}{b};$$

le cercle de centre F et de rayon σF a donc pour équation

$$x^2+y^2-2ax-2by-\frac{a^2c^2}{b^2}=0.$$

Les vecteurs des points communs à ce cercle et à la strophoïde ont pour équation

$$(x^2+y^2)^2[a(b^2+c^2)x^2+2b^3xy-ab^2y^2]=0,$$

ce qui nous fait savoir en premier lieu que ce cercle est tangent à la strophoïde en chacun des points cycliques.

Si maintenant nous divisons

$$a(b^2+c^2)x^2+2b^3xy-ab^2y^2$$

par $ax+by$ vecteur de σ, nous obtenons pour quotient

$$(b^2+c^2)x-aby,$$

que nous reconnaissons être le vecteur du point τ. On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Le cercle qui a pour centre le foyer singulier de la strophoïde et pour rayon la distance de ce point au point de section est tangent à la strophoïde en chacun des points cycliques et passe par le tangentiel commun à σ et à Φ.*

De là la détermination du point τ.

Ce cercle rencontre la droite $x=a$ en deux points dont les ordonnées sont

$$-\frac{a^2}{b} \quad \text{et} \quad \frac{b^2+c^2}{b},$$

l'un est σ', l'autre τ' est situé sur le vecteur de τ.

10. Le carré de la distance du point double à la droite $\sigma\Phi$ est $\frac{a^4}{a^2+2b^2}$: c'est aussi le carré de la distance

du point double à la droite $\sigma\tau$. D est donc le centre du cercle inscrit dans le triangle $\sigma\tau\Phi$.

11. Le cercle de centre F et de rayon FD a pour équation

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0.$$

Il rencontre la droite $x = a$ en deux points A et A′ (*fig.* 3), dont les ordonnées sont $b \pm c$ et la droite $y = b$ en deux points B et B′ dont les abscisses sont $a \pm c$.

Les droites DA et DA′ ont pour équation

$$ax^2 + 2bxy - ay^2 = 0;$$

ce sont donc les tangentes au point double, et puisque

$$\tfrac{1}{2}\,\text{arc DA} = \widehat{\sigma\,\text{DA}} = \widehat{\Phi\,\text{DA}}:$$

Théorème. — *Les tangentes au point double sont les bissectrices de l'angle* $\Phi D\sigma$ *et de l'angle* $FD\Delta$.

Les droites DB et DB′ ont pour équation

$$bx^2 - 2axy - by^2 = [bx - (a+c)y][bx - (a-c)y] = 0.$$

Elles sont rectangulaires et rencontrent la strophoïde en deux points T et T′ dont les coordonnées sont

$$\text{T}\begin{cases} x = c, \\ y = \dfrac{bc}{c+a}, \end{cases} \qquad \text{T}'\begin{cases} x = -c, \\ y = \dfrac{bc}{c-a}. \end{cases}$$

On remarque que les tangentes en ces points sont parallèles à l'asymptote réelle, que la droite TT′, dont l'équation est

$$ax + by - c^2 = 0,$$

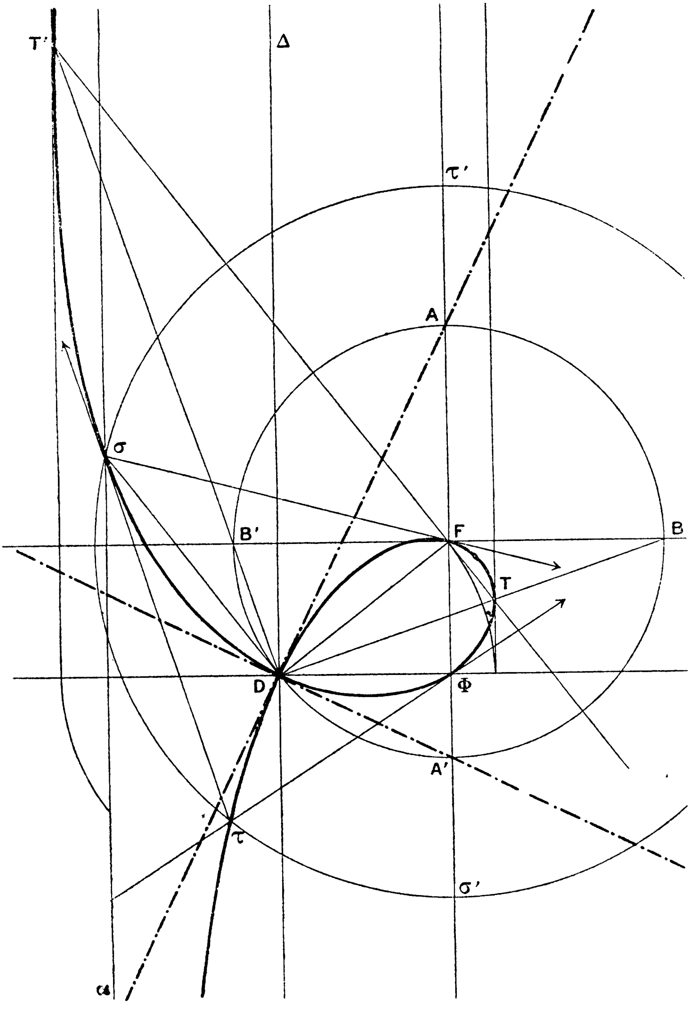
passe par le foyer singulier et est perpendiculaire à DF, enfin que

$$\tfrac{1}{2}\,\text{arc DB}' = \widehat{\sigma\,\text{DT}'} = \Phi\,\text{DT};$$

d'où

Théorème. — *La droite qui joint les points où la*

Fig. 3.



tangente est parallèle à l'asymptote réelle passe par le foyer singulier, est perpendiculaire à DF *et est vue du point double sous un angle droit.*

Théorème. — *Les droites* DT *et* DT′ *sont également inclinées sur les tangentes au point double; elles rencontrent l'asymptote réelle en deux points dont* σ *est le milieu.*

(La seconde partie de ce théorème est due à M. S. Lattès, R. M. S., décembre 1892.)

12. L'angle $\sigma\tau\Phi$ double de $\sigma\tau\tau'$ a pour mesure arc $\sigma\tau'$ et est égal à l'angle $\sigma F\tau'$; par suite

Théorème. — *Les quatre points* F, σ, τ, Φ *sont sur un cercle.*

13. Toute parallèle $x = \lambda$ à l'asymptote réelle rencontre la strophoïde en deux points à distance finie dont les *coefficients vectoriels* sont les racines de l'équation

$$(\lambda + a)t^2 - 2bt + \lambda - a = 0;$$

ils satisfont à la relation

$$bt_1 t_2 + a(t_1 + t_2) - b = 0;$$

d'où

Théorème. — *Les vecteurs des points d'intersection de la strophoïde avec une parallèle à* Δ *sont également inclinés sur* DT *et* DT′ *et, par suite, sur les tangentes au point double.*

Nous appellerons deux tels points : *points correspondants.*

14. Les sept points D, F, σ, τ, Φ, T, T′ étant maintenant déterminés, nous allons aborder la très intéressante étude de M. Balitrand.

Prenons pour nouvel axe des x la tangente DA′ et pour nouvel axe des y la tangente DA, de telle sorte que la nouvelle équation de la strophoïde est

$$(x^2+y^2)\left[x\sqrt{\frac{c+b}{2c}}+y\sqrt{\frac{c-b}{2c}}\right]-2cxy=0,$$

et le nouveau coefficient angulaire d'une droite

$$-\sqrt{\frac{c+b}{c-b}}\left(\frac{am-b+c}{am-b-c}\right).$$

Ainsi les coefficients vectoriels de

$$\Delta\infty,\quad F,\quad \sigma,\quad \tau,\quad \Phi,\quad T,\quad T',$$

qui étaient

$$\infty,\quad \frac{b}{a},\quad -\frac{a}{b},\quad \frac{b^2+c^2}{ab},\quad 0,\quad \frac{b}{a+c},\quad \frac{b}{a-c},$$

deviennent

$$-C,\quad C,\quad -\frac{1}{C},\quad -C^3,\quad \frac{1}{C},\quad 1,\quad -1$$

$\left(\text{en posant } \sqrt{\frac{c+b}{c-b}}=C\right)$.

15. En considérant les points d'intersection de la strophoïde avec une droite, on obtient la proposition suivante :

Le produit des coefficients vectoriels de trois points collinéaires est constant et égal au coefficient angulaire de l'asymptote réelle

$$t_1 t_2 t_3 = -C \quad (\text{p. } 432, \text{ relation } 10).$$

Réciproquement :

Lorsque le produit des coefficients vectoriels de trois *points de la strophoïde est* $-C$, *ces trois points sont collinéaires.*

Car, si par t_1 et t_2 on fait passer la droite $t_1 t_2$, qui rencontre de nouveau la strophoïde en t, on doit avoir $t_1 t_2 t = -C$; d'où

$$t_3 = t.$$

Ces deux propositions conduisent aux suivantes :

Lorsque deux points de la strophoïde sont correspondants, le produit de leurs coefficients vectoriels est égal à 1.

Lorsque le produit des coefficients vectoriels de deux points de la strophoïde est égal à 1, *ces deux points sont correspondants.*

Lorsque deux points de la strophoïde sont en ligne droite avec le foyer singulier, leurs vecteurs sont rectangulaires.

Lorsque les vecteurs de deux points de la strophoïde sont rectangulaires, ces deux points sont en ligne droite avec le foyer singulier.

Lorsque deux points de la strophoïde sont en ligne droite avec σ, τ, Φ, T *ou* T', *le produit de leurs coefficients vectoriels est* C^2, $\frac{1}{C^2}$, $-C^2$, $-C$ *ou* C.

Lorsque le produit des coefficients vectoriels de deux points de la strophoïde est C^2, $\frac{1}{C^2}$, $-C^2$, $-C$ *ou* C, *ces deux points sont en ligne droite avec* σ, τ, Φ, T *ou* T'.

16. En considérant les points d'intersection non cycliques de la strophoïde avec un cercle, on obtient la proposition suivante :

Théorème. — *Le produit des coefficients vectoriels* *de quatre points concycliques est constant et égal au carré du coefficient angulaire de l'asymptote réelle*

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = C^2 \quad \text{(p. 431, rectification de la relation 7).}$$

Réciproquement :

Lorsque le produit des coefficients vectoriels de quatre points de la strophoïde est C^2, *ces quatre points sont concycliques.*

Car, si par les trois points t_1, t_2, t_3 on fait passer le cercle $t_1 t_2 t_3$ qui rencontre de nouveau la strophoïde en t, on doit avoir $t_1 t_2 t_3 t = C^2$; d'où

$$t_4 = t.$$

De même que précédemment, ces deux propositions conduisent aux suivantes :

Lorsque trois points de la strophoïde sont concycliques avec F, σ, τ, Φ, T *ou* T', *le produit de leurs coefficients vectoriels est* C, $-C^3$, $-\frac{1}{C}$, C^3, C^2 *ou* $-C^2$.

Lorsque le produit des coefficients vectoriels de trois points de la strophoïde est C, $-C^3$, $-\frac{1}{C}$, C^3, C^2 *ou* $-C^2$, *ces trois points sont concycliques avec* F, σ, τ, Φ, T *ou* T'.

THÉORÈME. — *Lorsque quatre points sont concycliques, si par chaque couple on fait passer un cercle, les deux cercles obtenus rencontrent la strophoïde en quatre nouveaux points qui sont concycliques* (p. 437, 1er théorème).

17. Points correspondants.

Théorème. — *Lorsque quatre points sont concycliques, les collinéaires de chaque couple sont des points correspondants.*

Car, de $t_1 t_2 t_3 t_4 = C^2$, $t_1 t_2 \theta_1 = -C$, $t_3 t_4 \theta_2 = -C$, on déduit

$$\theta_1 \theta_2 = 1.$$

Toutes les démonstrations étant à peu près identiques, nous ne ferons qu'énoncer les théorèmes suivants :

Théorème. — *Lorsqu'un cercle passe par le point double, la tangente au cercle en ce point passe par le correspondant ou collinéaire des deux autres points d'intersection de la strophoïde avec le cercle.*

Théorème. — *Lorsqu'un cercle passe par un point et par le tangentiel de ce point, il rencontre la strophoïde en deux autres points qui sont en ligne droite avec le correspondant du premier.*

Théorème. — *Lorsqu'un cercle passe par deux points collinéaires avec σ, il rencontre la strophoïde en deux points correspondants.*

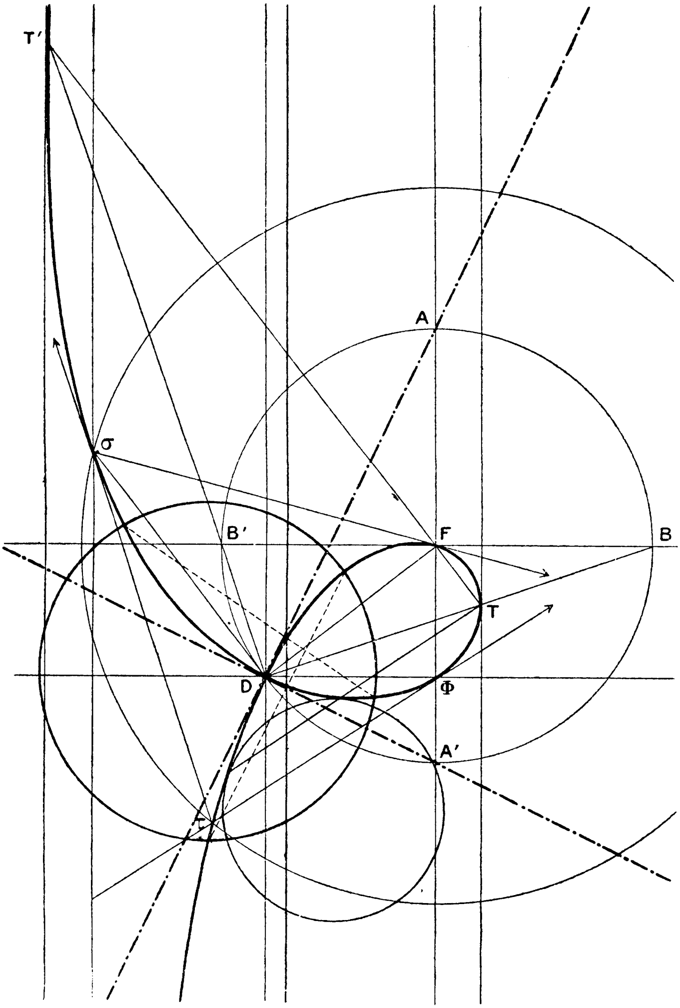
En particulier :

Lorsqu'un cercle passe par F *et σ, ses deux autres points d'intersection avec la strophoïde sont en ligne droite avec* Φ.

Lorsqu'un cercle passe par F *et* T′, *ses deux autres points d'intersection avec la strophoïde sont en ligne droite avec* T.

Lorsqu'un cercle passe par σ *et* τ, *il rencontre la strophoïde en deux points correspondants.*

Fig. 4.



Lorsqu'un cercle passe par T *et* T', *il rencontre la* *strophoïde en deux autres points qui sont en ligne droite avec* Φ.

(Les réciproques de ces propositions sont vraies.)

THÉORÈME. — *Lorsqu'un cercle passe par* F, *les tangentiels des trois autres points d'intersection avec la strophoïde sont en ligne droite.*

THÉORÈME. — *Lorsqu'un cercle passe par* F *et* T, *les tangentiels des deux autres points d'intersection avec la strophoïde sont deux points correspondants.*

18. CERCLES TANGENTS.

THÉORÈME. — *Lorsqu'un cercle est tangent à la strophoïde, les deux autres points d'intersection sont en ligne droite avec le correspondant du collinéaire du point de contact.*

THÉORÈME. — *Lorsqu'un cercle est tangent à la strophoïde en* F, *il rencontre la courbe en deux autres points qui sont correspondants.*

THÉORÈME. — *Lorsqu'un cercle est tangent à la strophoïde en* F *et passe par* T, *il est tangent en* T; *inversement, s'il est tangent en* T *et passe par* F, *il est tangent en* F. (De même pour T'.)

THÉORÈME. — *Lorsqu'un cercle passe par deux points collinéaires avec* σ *et par* T, *il est tangent en* T (et de même pour T').

THÉORÈME. — *Lorsqu'un cercle est tangent en* F, *les tangentiels des deux points d'intersection sont en ligne droite avec* σ.

19. Cercles osculateurs.

Lorsque trois des points communs à la strophoïde et à un cercle se confondent en M, le cercle est osculateur en ce point.

Si t et t_1 sont les coefficients vectoriels du point d'osculation et du quatrième point d'intersection, on a

$$t^3 t_1 = C^2.$$

Le collinéaire de t et t_1 et le tangentiel de t étant correspondants, on a la construction suivante du cercle osculateur en un point M de la strophoïde.

Mener la tangente en M *et déterminer le tangentiel* P *de* M, *déterminer le correspondant* P' *de* P, *mener* P'M, *qui rencontre la strophoïde en* N, *enfin tracer le cercle tangent en* M *à* MP *et passant par* N.

Au point double, il y a deux cercles osculateurs : l'un

$$x^2 + y^2 - \frac{2c}{a}[(b+c)x - ay] = 0$$

tangent à DA, *l'autre*

$$x^2 + y^2 + \frac{2c}{a}[(b+c)x - ay] = 0$$

tangent à DA'.

Le cercle osculateur en F *passe par* Φ.

20. Considérons trois points en ligne droite sur la strophoïde, de telle sorte que $t_1 t_2 t_3 = -C$; les cercles osculateurs en ces points rencontrent la strophoïde en trois autres points (θ_1), (θ_2), (θ_3), et l'on a

$$t_1^3 \theta_1 = C^2, \qquad t_2^3 \theta_2 = C^2, \qquad t_3^3 \theta_3 = C^2,$$

d'où

$$\theta_1 \theta_2 \theta_3 = -C^3.$$

Si donc à ces trois derniers points on adjoint le point σ $\left(\theta_4 = -\frac{1}{C}\right)$, on obtient la relation

$$\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 = C^2;$$

de là ce théorème :

THÉORÈME. — *Les cercles osculateurs en trois points collinéaires rencontrent la strophoïde en trois autres points concycliques avec* σ.

21. Cercles tangents.

Soient t_1 et t_2 les coefficients vectoriels des points de contact.

De $t_1^2 t_2^2 = C^2$, on déduit le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La corde de contact d'un cercle bitangent à la strophoïde passe par l'un des points* T *ou* T' (*fig.* 4).

22. Points conjugués.

Deux droites issues du point double et également inclinées sur les tangentes en ce point rencontrent la strophoïde en deux points C et C'. Avec M. Balitrand, nous dirons que C et C' sont conjugués.

Ainsi

$$F \text{ et } \Delta_\infty, \qquad \sigma \text{ et } \Phi, \qquad \tau \text{ et } G, \qquad T \text{ et } T'$$

sont conjugués.

Il est facile de voir que deux points conjugués sont équidistants de Δ et ont même tangentiel (p. 432), et qu'un point de la strophoïde et le correspondant de son conjugué ont leurs vecteurs rectangulaires.

Réciproquement :

Deux points ayant même tangentiel sont conjugués (mais deux points de la strophoïde équidistants de Δ *ne sont pas conjugués).*

23. Si t, $-t$ et θ sont les coefficients vectoriels de deux points conjugués C et C′ et de leur collinéaire K, on a la relation

$$t^2\theta = C;$$

l'équation de CC′ est donc

$$t^2 x + Cy - \frac{at^2}{1+t^2} = 0;$$

par suite, CC′ est perpendiculaire à OK et enveloppe une certaine parabole, et la strophoïde est la podaire de cette parabole par rapport au point double.

Théorème. — *Lorsque deux points sont conjugués, leur collinéaire et leur tangentiel sont aussi conjugués.*

Théorème. — *Par deux points pris sur la strophoïde, on peut mener deux cercles tangents à la courbe; les points de contact sont deux points conjugués* (p. 433, 2e théorème).

Si par deux points correspondants P et P′ on mène à la strophoïde les tangentes PQ, PR, P′Q′, P′R′, les quatre points Q, R, Q′, R′ sont concycliques.

24. Les théorèmes suivants sont aussi évidents.

Théorème. — *Lorsqu'un cercle passe par le foyer singulier, il rencontre la strophoïde en trois autres points tels que deux d'entre eux et le conjugué du troisième sont en ligne droite.*

THÉORÈME. — *Lorsque trois points sont en ligne droite, le conjugué de l'un d'eux est sur le cercle qui passe par le foyer singulier et les deux autres.*

THÉORÈME. — *Lorsqu'un cercle passe par le foyer singulier, il rencontre la strophoïde en trois autres points dont les conjugués sont en ligne droite.*

THÉORÈME. — *Lorsque trois points sont en ligne droite, leurs conjugués et le foyer singulier sont sur un cercle.*

THÉORÈME. — *Lorsqu'un cercle passe par le foyer singulier, il détermine par ses intersections avec la strophoïde un triangle dont les côtés prolongés rencontrent la courbe en trois points en ligne droite.*

(Comparer avec les énoncés correspondants de M. Balitrand.)

GÉNÉRATIONS DE LA STROPHOÏDE.

1. Nous avons vu que, lorsque deux points de la strophoïde sont en ligne droite avec le foyer singulier, leurs vecteurs sont rectangulaires.

De là, on déduit la construction bien connue :

Tracer tous les cercles tangents en D à DΦ et joindre leurs centres au foyer singulier; les droites obtenues rencontrent leurs cercles respectifs en deux points qui appartiennent à la strophoïde.

2. Un cercle tangent en D à Δ rencontre la strophoïde en deux points dont le produit des coefficients vectoriels est C^2; ces deux points sont donc en ligne droite avec σ.

Mais reprenons nos axes primitifs.

Un cercle tangent en D à Δ a pour équation

$$x^2 + y^2 - 2kx = 0\,;$$

la polaire de F par rapport à ce cercle a pour équation

$$x(a-k) + by - ak = 0,$$

et l'on reconnaît qu'elle passe par σ; le lieu des points de contact des tangentes menées par F aux cercles tangents en D à Δ est la strophoïde ; d'où

Théorème. — *Lorsqu'un cercle est tangent en* D *à* Δ, *les tangentes qu'on peut lui mener par le foyer singulier ont leurs contacts sur la strophoïde et la corde de contact passe par le point de section.*

De là, la construction suivante :

Tracer tous les cercles tangents en D à Δ, joindre le foyer singulier à leurs centres et de σ abaisser les perpendiculaires sur les droites ainsi obtenues. Ces perpendiculaires rencontrent leurs cercles respectifs en deux points qui appartiennent à la strophoïde.

La construction précédente est de beaucoup préférable.

3. Nous avons vu (23) que la droite qui joint deux points conjugués C et C′ est perpendiculaire à la droite qui joint leur collinéaire K au point double ; si m est le coefficient vectoriel de K, l'équation de CC′ est

$$am^2 + m(y - 2b) + x - a = 0,$$

et son enveloppe est la parabole

$$(y-2b)^2 - 4a(x-a) = (x-2a)^2 + (y-2b)^2 - x^2 = 0.$$

Cette parabole a pour foyer le point f symétrique de D par rapport à F et pour directrice la droite Δ.

La strophoïde est, comme on le sait, la podaire de cette parabole.

4. M. Cazamian (*Nouvelles Annales,* octobre 1893) a démontré un très beau théorème sur la strophoïde et qui conduit à un grand nombre d'applications.

Il est facile de voir que les points A et B de M. Cazamian sont les points σ et Φ, et l'on peut énoncer ce théorème :

Théorème. — *La droite* MD, *qui joint un point de la strophoïde au point double, est bissectrice de l'angle* $\sigma M \Phi$.

Le théorème de M. Cazamian permet de voir que la strophoïde est :

Le lieu des foyers des coniques tangentes en σ à $D\sigma$ et en Φ à $D\Phi$.

Le lieu des foyers des coniques tangentes à $D\sigma$ et à $D\Phi$ et ayant $\sigma\Phi$ pour directrice.

Le lieu des points de contact des tangentes menées par σ et Φ aux cercles ayant D pour centre.

Le lieu des pieds des normales abaissées du point double sur les coniques ayant deux points conjugués pour foyers, etc.

Remarque. — Deux points conjugués, leur collinéaire et le point de contact avec la parabole de la droite qui les joint, forment une division harmonique.

Consulter :

Weill, *Sur les quadrilatères qui ont leurs six sommets sur une cubique* (*Nouvelles Annales,* septembre 1884).

Astor, *Sur quelques propriétés des courbes planes unicursales du troisième ordre* (*Nouvelles Annales,* juillet 1892).

Cazamian, *Sur un lieu géométrique et ses applications* (*Nouvelles Annales,* octobre 1893).

Balitrand, *Sur la strophoïde et la cissoïde* (*Nouvelles Annales,* novembre 1893).

NOTE SUR LA STROPHOÏDE;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

Un grand nombre de propriétés intéressantes de cette courbe remarquable sont dues à ce fait qu'elle reste semblable à elle-même dans un mode particulier de projection.

On sait que l'on appelle *points conjugués* de la strophoïde les couples de points de la courbe qui sont tels que les droites joignant chacun des deux points au point double O sont également inclinées sur les tangentes en ce point double. Il en résulte que le faisceau des droites joignant le point double aux points conjugués est un faisceau involutif ayant pour rayons doubles les tangentes au point O. Comme conséquence de cette remarque :

En projetant une strophoïde de façon que deux points conjugués de la courbe deviennent les points cycliques, on obtient encore une strophoïde.

En effet, la projection sera encore une cubique, passant par les points cycliques, et ayant un point double. De plus, les tangentes en ce point seront conjuguées par rapport aux droites isotropes, et par suite rectangulaires. Ces propriétés caractérisent la strophoïde.

C'est ainsi qu'en transformant cette proposition, que le lieu des points de rencontre des tangentes menées par deux points fixes à une série de cercles concentriques est une strophoïde ayant ces points pour points conjugués, on obtient cette autre propriété : Le lieu des foyers des coniques bitangentes à une conique en deux points fixes est une strophoïde.

Autres exemples :

Théorèmes.	Théorèmes corrélatifs.
Le lieu des points de contact des tangentes menées à des coniques homofocales par un point fixe est une strophoïde. Deux points de contact relatifs à une conique quelconque sont deux points conjugués.	Le lieu des points de contact des tangentes menées aux coniques inscrites dans un quadrilatère circonscriptible à un cercle par le centre du cercle est une strophoïde.
Le lieu des points de rencontre des tangentes menées à une famille de coniques homofocales par deux points pris sur l'une d'entre elles est une strophoïde ayant ces deux points pour points conjugués.	Le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscriptible est une strophoïde.

SUR L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE ET SUR SES INVERSES;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

Dans cette Note, nous nous proposons d'établir les propriétés de la strophoïde et de la lemniscate en considérant ces courbes comme les transformées par rayons vecteurs réciproques de l'hyperbole équilatère. Nous donnerons aussi certaines propriétés intéressantes de l'hyperbole elle-même. Enfin, nous étendrons, par inversion, plusieurs propositions à toutes les cycliques unicursales dont les tangentes au point double sont rectangulaires [1].

[1] Plusieurs des théorèmes que nous donnerons ont déjà été

Quelques remarques préliminaires sont nécessaires.

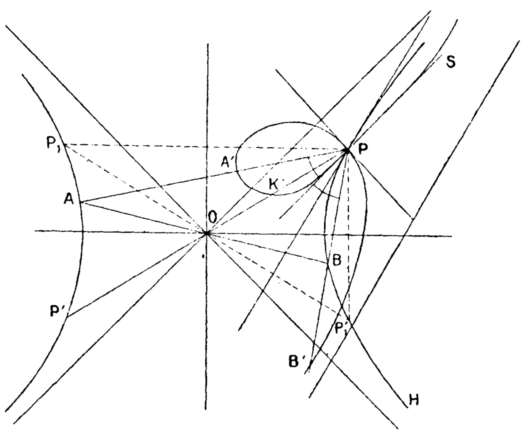
La figure inverse d'une conique par rapport à un point quelconque P de son plan, étant la polaire relativement à P de la polaire réciproque, qui est une conique, est une quartique bicirculaire ayant un point double en P. Les tangentes en ce point double sont les parallèles aux asymptotes de la conique menées par ce point. Si la conique est une ellipse, le point P est donc toujours un point double isolé; ce point double est réel si la conique est une hyperbole, c'est un point de rebroussement si la conique est une parabole. En adoptant l'expression de *cyclique* pour désigner une quartique bicirculaire, nous pourrons dire que la figure inverse d'une conique, le centre d'inversion étant quelconque dans le plan, est une cyclique unicursale. Si la conique est une hyperbole équilatère, la cyclique aura ses tangentes au point double rectangulaires. Nous l'appellerons une *cyclique équilatère*. Si le centre d'inversion est au centre de l'hyperbole, le point double est, de plus, centre de la cyclique équilatère, qui est alors une lemniscate. Enfin les cycliques inverses de la parabole pourront être appelées des *cycliques cuspidales*. Dans le cas où le centre d'inversion P est sur la conique, la figure inverse est une cubique circulaire unicursale, dont le point double est P, les tangentes en ce point étant toujours les parallèles issues de P aux asymptotes de la conique. Si donc celle-ci est une hyperbole équi-

---

obtenus par M. Balitrand dans deux études analytiques directes (*Nouvelles Annales*, novembre 1893, et *Journal de Math. spéc.*, avril 1891) sur la strophoïde et la lemniscate. Nous aurons soin de signaler les propositions dues à cet auteur. Notre travail montrera qu'il n'était pas utile d'étudier séparément ces deux courbes, les propriétés de l'une et de l'autre se déduisant des propriétés de l'hyperbole équilatère.

latère, la figure inverse est une strophoïde : c'est une cissoïde si la conique est une parabole.

Soient H une hyperbole équilatère de centre O, P un point quelconque de la courbe, que nous prenons pour centre d'inversion (*fig.* 1). Alors les parallèles aux asymptotes de l'hyperbole menées par P sont les tangentes au point double P de la strophoïde oblique S in-



verse de H. La tangente à l'hyperbole équilatère au point P est parallèle à l'asymptote de S. Deux points A et B, diamétralement opposés sur l'hyperbole, sont tels que les droites PA, PB sont également inclinées sur les asymptotes ; leurs correspondants A′ et B′ sur la strophoïde seront donc tels que les droites les joignant au point double soient également inclinées sur les tangentes au point double ; es deux points seront donc deux points *conjugués* de la strophoïde (points qui ont des paramètres égaux et de signes contraires lorsqu'on rapporte la strophoïde à ses tangentes au point double, et qu'on exprime les coordonnées d'un point de la courbe en fonction d'un paramètre variable). En particulier, aux points P_1 et P'_1, symétriques de P par rapport aux axes de H, correspondront les deux points de la strophoïde situés sur les bissectrices des angles des tangentes au point double, et qui sont conjugués (paramètres $+1$ et -1). Au point P de l'hyperbole équilatère correspond, sur la strophoïde, le point à l'infini sur l'asymptote réelle, et au point P', symétrique de P par rapport au centre O de l'hyperbole, correspondra le point K de la strophoïde situé sur la droite symétrique par rapport aux tangentes au point double de la parallèle à l'asymptote menée par le point double. Ce point K est conjugué du point réel à l'infini de la strophoïde.

Remarquons enfin qu'à un cercle tangent en P à l'hyperbole correspond une droite parallèle à l'asymptote de la strophoïde, et au cercle osculateur en P correspond l'asymptote elle-même, de sorte qu'au point de rencontre du cercle osculateur en P avec l'hyperbole équilatère correspond le point de rencontre de la strophoïde avec son asymptote. A un cercle osculateur en un point autre que P correspondra le cercle osculateur au point correspondant de la strophoïde.

Nous allons d'abord transformer des propriétés connues de l'hyperbole équilatère.

Le cercle de diamètre PP' passe par les points P_1 et P'_1.	Les points de la strophoïde situés sur les bissectrices de l'angle des tangentes au point double sont en ligne droite avec le conjugué du point réel à l'infini.
Les droites AB passent par le centre de l'hyperbole équilatère, milieu de PP'.	Les cercles circonscrits aux triangles formés par le point double d'une strophoïde et deux points conjugués quelconques passent par un point fixe, qui est le milieu de la

distance du point double au conjugué du point réel à l'infini (point K).

Les perpendiculaires en A et B aux droites PA et PB se coupent sur l'hyperbole équilatère.

Les cercles ayant pour diamètres les droites joignant le point double à deux points conjugués se coupent sur la strophoïde.

Autrement : La projection du point double sur la droite joignant deux points conjugués appartient à la strophoïde.

M étant un point quelconque de l'hyperbole équilatère, les angles MAP, MBP sont égaux.

La droite joignant un point quelconque M de la strophoïde au point double est bissectrice de l'angle des droites joignant le même point M à deux points conjugués quelconques.

La tangente en P à l'hyperbole équilatère et la droite PO font des angles égaux avec les droites PA et PB.

La parallèle à l'asymptote menée par le point double est médiane du triangle formé par le point double et deux points conjugués quelconques [1].

Autrement : Le lieu des milieux des cordes joignant deux points conjugués est la parallèle à l'asymptote menée par le point double.

Soient P un point fixe d'une hyperbole équilatère, A et B

L'enveloppe des droites joignant deux points conjugués

---

[1] Cela résulte de cette proposition : *Soient* P *le centre d'inversion,* A *et* B *deux points d'une figure,* A' *et* B' *les points correspondants de la figure inverse : la médiane et la symédiane du triangle* PAB (*issues de* P) *sont respectivement symédiane et médiane du triangle* PA'B'.

les extrémités d'un diamètre quelconque. Le cercle Σ circonscrit au triangle PAB rencontrant l'hyperbole au point D, on sait que le centre du cercle Σ est le milieu de PD, d'où il résulte que l'enveloppe de ces cercles est la podaire de l'hyperbole équilatère relative au point P.

d'une strophoïde est la figure inverse de la podaire d'une hyperbole équilatère relative à un point de la courbe : c'est donc la polaire réciproque d'une hyperbole équilatère, le centre du cercle directeur étant sur l'hyperbole, c'est-à-dire une parabole dont la directrice passe par le point double de la strophoïde.

Pour continuer cette étude de l'hyperbole équilatère et de la strophoïde, nous allons établir certains théorèmes intéressants sur la conique en la considérant comme une courbe unicursale. Rapportée à ses asymptotes, l'hyperbole équilatère a pour équation

$$xy = a^2.$$

En posant $y = t^2 x$, on a

$$x^2 = \frac{a^2}{t^2} \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{a}{t}, \qquad \text{et} \qquad y = at.$$

Portant ces valeurs à la place de x et y dans l'équation

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$$

d'un cercle quelconque du plan, on obtient l'équation

$$a^2 t^4 - 2\beta a t^3 + \gamma t^2 - 2\alpha a t + a^2 = 0,$$

dont les racines vérifient la relation

$$(1) \qquad t_1 t_2 t_3 t_4 = 1.$$

Si le cercle passe par l'origine, c'est-à-dire par le centre de l'hyperbole équilatère, on a $\gamma = 0$, et les racines de l'équation vérifient en outre la relation

$$(2) \qquad \Sigma t_1 t_2 = 0.$$

Les relations (1) et (2) vont nous permettre d'énoncer un grand nombre de théorèmes sur les systèmes de cercles et d'hyperbole équilatère. Les démonstrations sont pour la plupart si simples que nous les laisserons de côté, nous contentant d'énoncer les propositions et de les transformer à mesure par rayons vecteurs réciproques, le centre d'inversion étant sur l'hyperbole.

Si quatre points d'une hyperbole équilatère sont sur un cercle, les points diamétralement opposés sont également sur un cercle.

Si quatre points d'une strophoïde sont sur un cercle, leurs conjugués sont également sur un cercle.

Si quatre points d'une hyperbole équilatère sont sur un cercle, deux de ces points et les points diamétralement opposés aux deux autres sont également sur un cercle.

Si quatre points d'une strophoïde sont sur un cercle, deux de ces points et les conjugués des deux autres sont également sur un cercle.

Plaçons le centre d'inversion en l'un des points d'intersection du cercle avec l'hyperbole équilatère, la seconde proposition devient :

Si trois points d'une strophoïde sont en ligne droite, l'un d'eux et les conjugués des deux autres sont également en ligne droite.

La première proposition fournit encore cette propriété de trois points en ligne droite sur la strophoïde :

Si trois points d'une strophoïde sont en ligne droite, leurs conjugués forment un triangle tel que le cercle circonscrit à ce triangle passe par un point fixe, qui est le conjugué du point réel à l'infini (¹).

(¹) C'est le point de paramètre $+c$ lorsqu'on prend pour équation de la strophoïde $(y+cx)(x^2+y^2)=axy$ et non le point de paramètre 1, comme l'indique à tort M. Balitrand (*loc. cit.*, p. 438). L'adjonction à certains groupes de points des points de paramètres

Par deux points pris sur une hyperbole équilatère on peut mener deux cercles tangents à l'hyperbole; les points de contact sont diamétralement opposés.

Par deux points pris sur une strophoïde on peut mener deux cercles tangents à la courbe; les points de contact sont conjugués (Balitrand).

Désignons par P et M les deux points pris sur l'hyperbole, nous placerons dans le théorème suivant le centre d'inversion au point P.

Si par deux points quelconques P et M d'une hyperbole équilatère on mène les deux cercles ω et ω' tangents à l'hyperbole, en désignant par A et B les points de contact :

1° Les deux points A et B sont diamétralement opposés;

2° Les deux cercles ω et ω' sont égaux;

3° Le cercle Ω circonscrit au triangle PAB passe par le point diamétralement opposé au point M, et il est égal aux cercles ω et ω';

4° Le cercle MAB passe par le point diamétralement opposé au point P.

Si par un point M d'une strophoïde on mène les deux tangentes MA, MB à la courbe :

1° Les deux points de contact sont conjugués; *autrement :* les tangentes en deux points conjugués se coupent sur la strophoïde;

2° Les deux tangentes MA, MB sont à égale distance du point double;

3° La corde polaire AB rencontre la strophoïde au point conjugué du point M (on sait d'autre part que ce point de rencontre est la projection du point double sur AB) et elle est à la même distance du

---

$+1$ et -1 a conduit cet auteur, dans son étude analytique de la strophoïde, à des conclusions erronées, que nous signalerons. Nous allons montrer par un exemple que la considération de ces points conduit à des résultats inexacts. On trouve (p. 431) que les paramètres t_1, t_2, t_3, t_4 de quatre points situés sur un cercle vérifient la relation $t_1 t_2 t_3 t_4 = c$, et les paramètres de trois points en ligne droite vérifient la relation $\theta_1 \theta_2 \theta_2 = -c$. Adjoignons à ces trois derniers points le point θ_4 de paramètre -1, nous aurons $\theta_1 \theta_3 \theta_3 \theta_4 = c$. On déduirait donc de là que trois points en ligne droite sont situés sur un cercle passant par le point (-1).

point double que les droites MA, MB. Il résulte de là que le point double est le centre du cercle inscrit au triangle MAB, le point de contact du cercle avec AB étant conjugué de M (*Journal de Math. spéc.*, 1887; p. 269);

4° Le cercle MAB passe par un point fixe, qui est le conjugué du point réel à l'infini.

Par un point pris sur une hyperbole équilatère, on peut mener trois cercles osculateurs, l'un réel, les deux autres imaginaires. Le point fixe, les points d'osculation sont situés sur un cercle (c'est le théorème de Steiner) ([2]). Ce cercle passe par le centre de l'hyperbole.

Par un point pris sur la strophoïde, on peut faire passer trois cercles osculateurs à cette courbe; l'un est réel, les deux autres imaginaires. Le point fixe et les points d'osculation sont sur un cercle (Balitrand).

Ce cercle passe par un point fixe (le milieu de la distance du point double au conjugué du point réel à l'infini).

Deux cercles Σ et Σ' rencontrant une hyperbole équilatère respectivement aux points (A, B, C, D), (A′, B′, C′, D′), on mène le cercle passant en A et tangent à l'hyperbole en A′, le cercle passant en B et tangent à l'hyperbole en B′, ..., les quatre cercles ainsi obtenus rencontrent de nouveau l'hyperbole en quatre points qui sont situés sur un même cercle.

Deux cercles Σ et Σ' rencontrant une strophoïde respectivement aux points (A, B, C, D), (A′, B′, C′, D′), on mène le cercle passant en A et tangent à la strophoïde en A′, le cercle passant en B et tangent à la strophoïde en B′, ..., les quatre cercles ainsi obtenus rencontrent de nouveau la strophoïde en quatre points situés sur un même cercle.

([1]) *Voir* la Note qui termine notre étude.

Plaçons le centre d'inversion au point A, nous aurons la proposition suivante :

Soient B, C, D *les points de rencontre d'une droite quelconque avec une strophoïde,* A′, B′, C′, D′ *les points d'intersection d'un cercle quelconque avec la même courbe. Les points de rencontre avec la strophoïde de la tangente en* A′ *et des cercles passant par les points* B′, C′, D′ *et tangents respectivement à la courbe aux points* B, C, D *sont sur un même cercle.*

Si dans la proposition précédente on suppose les deux cercles Σ et Σ′ confondus, on obtient le théorème suivant :

Les cercles osculateurs à une hyperbole équilatère en quatre points situés sur un cercle rencontrent de nouveau l'hyperbole en quatre points situés sur un cercle.

Les cercles osculateurs à une strophoïde en quatre points situés sur un cercle rencontrent de nouveau la strophoïde en quatre points situés sur un cercle (Balitrand).

Plaçons le centre d'inversion en l'un des points de rencontre du cercle avec l'hyperbole équilatère, nous aurons le théorème suivant :

Les cercles osculateurs à une strophoïde en trois points en ligne droite rencontrent de nouveau la strophoïde en trois points : le cercle passant par ces trois points passe par un point fixe, qui est le point où la strophoïde rencontre son asymptote ([1]).

Si l'on coupe une hyperbole équilatère par un cercle quelconque, que par deux des points d'intersection on fasse

Théorème identique sur la strophoïde (Balitrand).

([1]) Le théorème énoncé par M. Balitrand (*loc. cit.*, p. 437) n'est pas exact.

passer un cercle, et par les deux autres un second cercle, les deux nouveaux cercles coupent l'hyperbole équilatère en quatre points situés sur un cercle ([1]).

Soient P un point d'une hyperbole équilatère, A, B, C, D les points d'intersection d'un cercle avec l'hyperbole. Les quatre cercles passant en P et touchant l'hyperbole respectivement aux points A, B, C, D rencontrent de nouveau l'hyperbole en quatre points situés sur un cercle.

Les tangentes à une strophoïde en quatre points situés sur un cercle rencontrent de nouveau la strophoïde en quatre points situés sur un cercle (Balitrand).

Les cercles osculateurs à une hyperbole équilatère en deux points diamétralement opposés rencontrent de nouveau l'hyperbole en deux points diamétralement opposés.

Les cercles osculateurs à une strophoïde en deux points conjugués rencontrent de nouveau la strophoïde en deux points conjugués (Balitrand).

Soient P un point d'une hyperbole équilatère, (A, B), (A′, B′) deux couples quelconques de points diamétralement opposés. Les cercles (PAB′), (PA′B) se coupent en I sur l'hyperbole équilatère. De même les cercles (PAA′), (PBB′) se coupent en I′ sur l'hyperbole équilatère. Les points I et I′ sont diamétralement opposés. Les quatre cercles sont égaux.

Soient (A, B), (A′, B′) deux couples quelconques de points conjugués d'une strophoïde. Les droites AB′ et A′B se coupent en I sur la strophoïde. Les droites AA′, BB′ se coupent de même en I′ sur la strophoïde. Les points I et I′ sont conjugués. Les quatre droites AB′, A′B, AA′, BB′ sont à la même distance du point double.

On déduit de là cet énoncé de M. Balitrand : Tout qua-

([1]) Le théorème est vrai pour une conique quelconque (*voir* la Note qui termine notre étude).

drilatère complet inscrit à la strophoïde est un quadrilatère conjugué inscrit.

Par un point d'une hyperbole équilatère on peut mener quatre cercles passant par le centre de l'hyperbole et tangents à la courbe. Les quatre points de contact sont sur un même cercle passant par le centre de l'hyperbole.

Par un point quelconque d'une strophoïde et le point R milieu de la distance du point double au conjugué du point réel à l'infini on peut mener quatre cercles tangents à la strophoïde. Les points de contact sont sur un même cercle passant par R.

Plaçons le centre d'inversion au point considéré de l'hyperbole équilatère, nous avons ce théorème :

Par le point R, *milieu de la distance du point double d'une strophoïde au conjugué du point réel à l'infini* (¹), *on peut mener à la strophoïde quatre tangentes, dont les points de contact sont sur un même cercle passant par* R.

On voit par les exemples précédents quelle quantité considérable de théorèmes on peut énoncer sur la strophoïde en transformant par rayons vecteurs réciproques les propriétés de l'hyperbole équilatère, le centre d'in-

(¹) C'est le point fixe par lequel passent tous les cercles circonscrits aux triangles formés par le point double et deux points conjugués quelconques. L'équation de la strophoïde étant

$$(y + cx)(x^2 + y^2) = axy,$$

ce point R a pour coordonnées

$$x = \frac{a}{4(1 + c^2)}, \qquad y = \frac{ac}{4(1 + c^2)}.$$

Il est situé sur la droite symétrique par rapport aux tangentes au point double de la parallèle à l'asymptote menée par le point double. C'est la droite que M. Balitrand a appelée l'*axe* de la strophoïde.

version étant placé en un point pris à volonté sur l'hyperbole.

Propriétés de la lemniscate. — Si le centre d'inversion est placé au centre de l'hyperbole équilatère, la courbe inverse est une lemniscate. En transformant les propriétés énoncées plus haut sur l'hyperbole équilatère, on obtiendra notamment tous les théorèmes donnés par M. Balitrand dans son étude sur la lemniscate (*Journal de Math. spéc.*, avril 1891).

Propriétés des cycliques équilatères. — Enfin, si le centre d'inversion est quelconque dans le plan, on pourra énoncer des propriétés communes à toutes les cycliques équilatères. Voici les plus remarquables :

Les cercles osculateurs à une cyclique équilatère en quatre points situés sur un cercle rencontrent de nouveau la cyclique en quatre points situés sur un cercle.

Deux cercles Σ *et* Σ' *rencontrant une cyclique équilatère respectivement aux points* (A, B, C, D), (A', B', C', D'), *si l'on mène le cercle passant en* A *et tangent à la cyclique en* A', *le cercle passant en* B *et tangent à la cyclique en* B', ..., *les quatre cercles ainsi obtenus rencontrent de nouveau la cyclique en quatre points situés sur un cercle.*

Soient M *un point d'une cyclique équilatère,* A, B, C, D *les points d'intersection d'un cercle avec la cyclique. Les quatre cercles passant en* M *et touchant la cyclique respectivement aux points* A, B, C, D *rencontrent de nouveau la cyclique en quatre points situés sur un cercle.*

Par un point M *pris sur une cyclique équilatère, on peut mener trois cercles osculateurs à la cyclique, l'un est réel, les deux autres imaginaires. Les trois points d'os-*

culation et le point M *sont situés sur un même cercle, qui passe par un point fixe du plan, indépendant de la position du point* M.

Ce point fixe joue un rôle important dans la géométrie des cycliques équilatères. C'est le point qui correspond, dans l'inversion, au centre de l'hyperbole équilatère. Nous le désignerons dans les théorèmes suivants par la lettre ω.

Par deux points pris sur une cyclique équilatère on peut mener deux cercles tangents à la cyclique. Les points de contact, le point double et le point ω *sont sur un même cercle.*

Par un point d'une cyclique équilatère et le point ω *on peut mener quatre cercles tangents à la cyclique. Les quatre points de contact sont sur un même cercle passant par le point* ω.

Soient A, B, C, D *quatre points d'une cyclique équilatère situés sur un cercle, et* O *le point double. Si l'on trace les cercles circonscrits aux triangles* (OAω, OBω, ...), *ces cercles rencontrent la cyclique en quatre nouveaux points qui sont situés sur un même cercle.*

Si quatre points d'une cyclique équilatère sont sur un cercle, deux de ces points et les points de rencontre avec la cyclique des cercles passant par le point double, le point ω *et chacun des deux autres points sont également sur un cercle.*

A deux points diamétralement opposés de l'hyperbole équilatère, il suffit de faire correspondre, comme on le voit, les deux points de rencontre avec la cyclique équilatère d'un cercle passant par son point double et le point ω.

En terminant, citons encore ce théorème :

Un cercle passant par le point double et le point ω *rencontre la cyclique en deux points. Les cercles osculateurs en ces points rencontrent de nouveau la cyclique en deux points situés avec le point double et le point* ω *sur un même cercle.*

NOTE.

Quelques-uns des théorèmes que nous avons énoncés sur l'hyperbole équilatère s'appliquent à une conique quelconque. En les transformant par inversion, on obtiendra des propriétés relatives aux cubiques circulaires unicursales quelconques et aux cycliques unicursales quelconques.

Transformons par, exemple, le théorème de Steiner sur les cercles osculateurs que l'on peut mener à une conique par un point M pris sur la courbe. On obtiendra trois propositions différentes :

1° Le centre d'inversion est en M : *Les trois points d'inflexion d'une cubique circulaire unicursale sont en ligne droite* (théorème bien connu, et vrai pour une cubique unicursale non circulaire);

2° Le centre d'inversion est un point de la conique autre que M : *Par un point* P *pris sur une cubique circulaire unicursale on peut mener trois cercles osculateurs à la cubique. Les trois points d'osculation et le point* M *sont sur un même cercle.*

3° Le centre d'inversion est quelconque dans le plan : *Par un point* P *pris sur une cyclique unicursale on peut mener trois cercles osculateurs à la cyclique. Le point* P *et les points d'osculation sont sur un même cercle.*

En transformant de nouveau par inversion, le théorème s'appliquera à des courbes de degré de plus en plus élevé et pourra recevoir une extension indéfinie.

Voici un autre théorème qui s'applique à une conique quelconque. On sait que les cordes d'intersection d'un cercle et d'une conique sont également inclinées sur les axes, et que, réciproquement, si deux droites sont également inclinées sur les axes d'une conique, on peut faire passer un cercle par leurs points d'intersection avec la conique. Donc :

Si l'on coupe une conique par un cercle, que par deux des points d'intersection on fasse passer un cercle, et par les deux autres un autre cercle, les deux nouveaux cercles coupent la conique en quatre nouveaux points situés sur un cercle.

Transformons par inversion. Nous obtiendrons encore trois propositions différentes :

1° Le centre d'inversion est en l'un des points d'intersection du cercle avec la conique :

Si l'on coupe une cubique circulaire unicursale par une droite quelconque, si par deux des points d'intersection on fait passer un cercle, et par le troisième on mène une droite quelconque, le cercle et la droite coupent la cubique en quatre nouveaux points situés sur un cercle.

2° et 3° Le centre d'inversion est un point quelconque de la conique ou du plan :

Si l'on coupe une $\left\{\begin{array}{l}\textit{cubique circulaire unicursale}\\ \textit{cyclique unicursale}\end{array}\right\}$ *par un cercle, que par deux des points d'intersection on fasse passer un cercle, et par les deux autres un autre cercle, les deux nouveaux cercles coupent la courbe en quatre nouveaux points situés sur un cercle.*

Le théorème pourrait réunir une extension indéfinie.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA PARABOLE ET DE SES INVERSES;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

L'équation d'une parabole étant

$$y^2 - 2px = 0,$$

en posant $x = ty$, on a

$$y = 2pt, \qquad x = 2pt^2.$$

On voit immédiatement qu'en remplaçant x et y par ces valeurs dans l'équation d'un cercle quelconque du plan, l'équation en t ne contiendra pas de terme du troisième degré; en d'autres termes, on aura entre les paramètres des points d'intersection d'un cercle quelconque et de la parabole la relation

$$(1) \qquad t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0.$$

Si l'on coupe une parabole par un cercle quelconque, la somme algébrique des cotangentes des angles que font avec l'axe les droites joignant le sommet aux points d'intersection est nulle.

La relation fondamentale (1) permet d'énoncer entre autres le théorème suivant :

Les cercles osculateurs à une parabole en quatre points situés sur un cercle rencontrent de nouveau la parabole en quatre points situés sur un cercle.

En transformant par inversion, le centre d'inversion étant sur la parabole, on obtient un théorème analogue sur la cissoïde oblique (Balitrand). Si le centre d'inversion est en l'un des points d'intersection du cercle avec la parabole, on obtient un théorème relatif aux cercles osculateurs à la cissoïde en trois points en ligne droite.

Les cercles osculateurs en trois points de la cissoïde en ligne droite la coupent en trois nouveaux points; le cercle circonscrit au triangle formé par ces trois points passe par un point fixe qui est le point où la cissoïde est rencontrée par son asymptote (1).

---

(1) Et non le point où la cissoïde est surosculée par un cercle (qui correspond au sommet de la parabole inverse), comme l'indique M. Balitrand (*Nouv. Ann.*, novembre 1893, p. 450).

D'ailleurs, notre énoncé peut se vérifier par le calcul. L'équation de la cissoïde étant

$$(y - cx)(x^2 + y^2) - ay^2 = 0,$$

en posant $x = ty$, on trouve que les paramètres t_1, t_2, t_3 de trois points en ligne droite vérifient la relation $t_1 + t_2 + t_3 = \frac{1}{c}$ (*loc. cit.*, p. 448), et les paramètres de quatre points sur un cercle $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{2}{c}$. Considérons les cercles osculateurs en trois points (t_1, t_2, t_3) en ligne droite, ils rencontrent la cissoïde en trois nouveaux points θ_1, θ_2, θ_3, et l'on aura

$$3t_1 + \theta_1 = \frac{2}{c},$$

$$3t_2 + \theta_2 = \frac{2}{c},$$

$$3t_3 + \theta_3 = \frac{2}{c}.$$

Ajoutant membre à membre :

$$3(t_1 + t_2 + t_3) + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{6}{c},$$

ou

$$3 \times \frac{1}{c} + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{6}{c},$$

donc

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{3}{c}.$$

Le cercle $(\theta_1 \theta_2 \theta_3)$ rencontre la cissoïde en un quatrième point θ_4

Si le centre d'inversion est quelconque dans le plan :

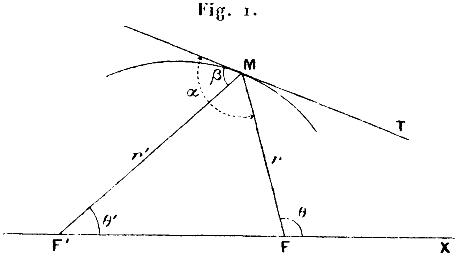
Les cercles osculateurs à une cyclique cuspidale (en particulier à une cardioïde) en quatre points situés sur un cercle rencontrent de nouveau la cyclique en quatre points situés sur un même cercle.

SUR LA DÉTERMINATION DES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES DE QUELQUES FAMILLES DE COURBES PLANES DONT L'ÉQUATION EST DONNÉE EN COORDONNÉES BI-POLAIRES;

Par M. G. DARIÈS,
Conducteur des Ponts et Chaussées.

Considérons une courbe plane (*fig.* 1) dont l'équation est donnée en coordonnées bi-polaires; désignons

Fig. 1.



par α et β les angles de la tangente en un point M avec

---

dont le paramètre sera déterminé par

$$\theta_4 + \frac{3}{c} = \frac{2}{c},$$

d'où

$$\theta_4 = -\frac{1}{c}.$$

C'est bien le paramètre du point où la tangente au point $\frac{1}{c}$ (c'est-à-dire l'asymptote) rencontre la courbe.

les rayons vecteurs r et r'; désignons encore par θ et θ' les angles polaires MFX et MF'X. On connaît, et il est facile d'établir, la relation

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{dr}{dr'};$$

il est presque évident que l'on a de même

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{r\,d\theta}{r'\,d\theta'};$$

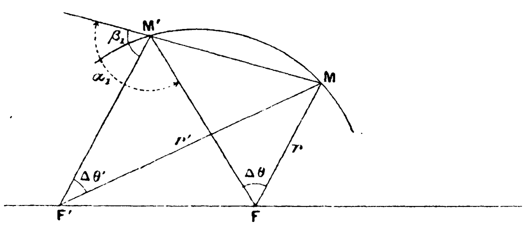
en effet, soit M' (*fig.* 2) le point de la courbe voisin de M; ses rayons vecteurs sont

$$r + \Delta r, \quad r' + \Delta r',$$

et ses angles polaires

$$\theta + \Delta\theta, \quad \theta' + \Delta\theta'.$$

Fig. 2.



Dans les triangles MM'F et MM'F', on a

$$\frac{r}{\sin\alpha_1} = \frac{MM'}{\sin\Delta\theta}, \qquad \frac{r'}{\sin\beta_1} = \frac{MM'}{\sin\Delta\theta'},$$

d'où

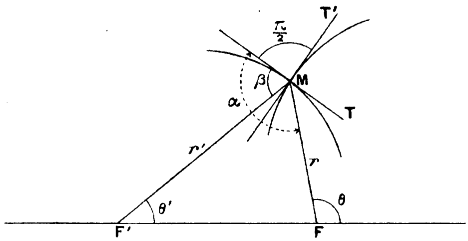
$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \frac{r}{r'}\,\frac{\sin\Delta\theta}{\sin\Delta\theta'} = \frac{r\,\Delta\theta}{r'\,\Delta\theta'}\,\frac{\dfrac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}}{\dfrac{\sin\Delta\theta'}{\Delta\theta'}},$$

et, à la limite,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{r\,d\theta}{r'\,d\theta'}.$$

Soient maintenant deux courbes orthogonales se coupant en M (*fig.* 3), en ce point ces courbes ont mêmes

Fig. 3.



coordonnées r et r' ou θ et θ', mais les angles α et β de l'une d'elles sont devenus $\alpha + \frac{\pi}{2}$ et $\beta + \frac{\pi}{2}$ pour la seconde; or

$$\frac{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta};$$

donc, d'après ce qui précède, pour passer d'une famille de courbes H à la famille orthogonale K, il suffit de remplacer dans l'équation différentielle de la première le rapport

$$\frac{dr}{dr'}$$

par le rapport

$$\frac{r\,d\theta}{r'\,d\theta'}.$$

Considérons plus particulièrement la famille de courbes dont l'équation bi-vectorielle est

$$f(r, r') = h,$$

h désignant une constante arbitraire; différentions, il vient

$$\frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial r'}dr' = 0;$$

on a donc pour les trajectoires orthogonales

$$\frac{\partial f}{\partial r} r\, d\theta + \frac{\partial f}{\partial r'} r'\, d\theta' = 0; \tag{1}$$

mais dans le triangle MFF′ on a

$$\frac{r}{r'} = \frac{\sin\theta'}{\sin\theta}; \tag{2}$$

si entre les équations (1) et (2) on élimine le rapport $\frac{r}{r'}$, l'équation différentielle résultante sera celle des trajectoires orthogonales en coordonnées bi-angulaires, il ne restera plus qu'à l'intégrer.

Donnons quelques exemples.

Soit d'abord

$$f(r, r') = r^n \pm p r'^n = h,$$

on a successivement

$$r^{n-1}\, dr \pm p r'^{n-1}\, dr' = 0,$$

$$r^n\, d\theta \pm p r'^n\, d\theta' = 0,$$

$$\sin^n\theta'\, d\theta \pm p \sin^n\theta\, d\theta' = 0,$$

et enfin

$$\int \frac{d\theta}{\sin^n\theta} \pm p \int \frac{d\theta'}{\sin^n\theta'} = \mathrm{K},$$

K désignant une constante arbitraire.

1. $n = -1$, $p = 1$. (Licence. Paris, 1890.) — On a

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = h;$$

on trouve pour les trajectoires orthogonales

$$\cos\theta + \cos\theta' = \mathrm{K}.$$

2. $n = 1$, $p = 1$. — On a

$$r \pm r' = h,$$

ellipses et hyperboles homofocales.

On obtient

$$\log \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} \pm \log \operatorname{tang} \frac{\theta'}{2} = \log K,$$

hyperboles et ellipses homofocales.

3. $n = 1$. — On a

$$r + pr' = h,$$

ovales de Descartes.

Il vient

$$\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} \operatorname{tang}^p \frac{\theta'}{2} = K.$$

4. $n = 2$. — On a

$$r^2 \pm r'^2 + h,$$

cercles concentriques et droites perpendiculaires à FF'.

On trouve

$$\cot\theta \pm \cot\theta' = K,$$

droites issues de l'origine et droites parallèles à FF'.

Soit encore

$$f(r, r') = r^n r'^p = h.$$

On a successivement

$$nr^{n-1} r'^p \, dr + pr^n r'^{p-1} \, dr' = 0$$

et

$$nr^n r'^p \, d\theta + pr^n r'^p \, d\theta' = 0,$$

ou

$$n \, d\theta + p \, d\theta' = 0,$$

enfin

$$n\theta + p\theta' = K.$$

Ce résultat est connu.

5. $n = p = 1$. — On a

$$rr' = h,$$

ovales de Cassini.

On obtient

$$\theta + \theta' = K,$$

hyperboles équilatères passant par F et F'.

6. $n = 1$, $p = 1$. (Licence. Bordeaux, 1880). — On a

$$\frac{r}{r'} = h.$$

cercles.

Il vient

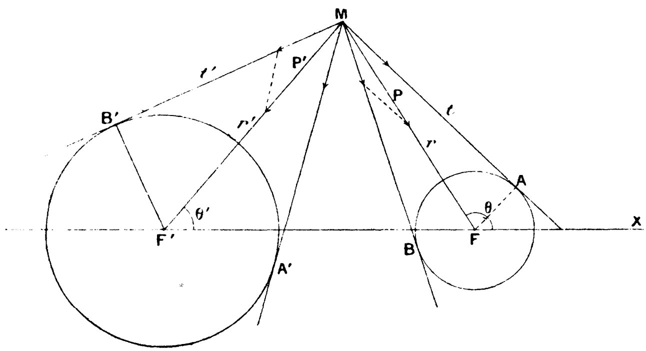
$$\theta - \theta' = K,$$

cercles passant par F et F'.

PROBLÈME. — *Un point matériel est attiré suivant les tangentes menées de ce point à deux cercles fixes en raison inverse de la longueur de ces tangentes. Trajectoires orthogonales des courbes de niveau.*

Les forces égales dirigées suivant les tangentes au cercle AB (*fig.* 4) ont une résultante P passant par

Fig. 4.



son centre F; pareillement les forces dirigées suivant les tangentes au cercle A'B' ont une résultante P' passant par F'.

Or

$$P = \frac{2\mu m}{t}\,\frac{t}{r} = \frac{2m\mu}{r};$$

$$P' = \frac{2m\mu'}{r'},$$

l'équation différentielle des courbes de niveau est

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2\mu}{r}\cos\alpha + \frac{2\mu'}{r'}\cos\beta,$$

ou

$$\frac{2\mu}{r}\,dr + \frac{2\mu'}{r'}\,dr' = 0.$$

On a donc pour les trajectoires orthogonales

$$\mu\,d\theta + \mu'\,d\theta' = 0,$$

et, par suite,

$$\mu\theta + \mu'\theta' = K.$$

Si $\mu = \mu'$, les courbes de niveau sont les cassinoïdes

$$rr' = h,$$

et les trajectoires orthogonales les hyperboles équilatères

$$\theta + \theta' = K.$$

Problème. — *Un point matériel est attiré par deux pôles fixes; l'attraction de chacun d'eux est proportionnelle à une fonction donnée de l'angle polaire correspondant. Trajectoires orthogonales des courbes de niveau.*

On a pour les courbes de niveau

$$\frac{dV}{dt} = \mu\varphi(\theta)\cos\alpha + \mu'\varphi'(\theta')\cos\beta = 0,$$

ou bien

$$\mu\varphi(\theta)\,dr + \mu'\varphi'(\theta')\,dr' = 0,$$

et pour les trajectoires orthogonales

$$\mu \int \frac{\varphi(\theta)\, d\theta}{\sin\theta} + \mu' \int \frac{\varphi'(\theta')\, d\theta'}{\sin\theta'} = \mathrm{K}.$$

Si

$$\varphi(\theta) = \sin^2\theta, \qquad \varphi'(\theta') = \sin^2\theta', \qquad \mu = \mu',$$

on obtient

$$\cos\theta + \cos\theta' = \mathrm{K};$$

les courbes de niveau sont donc (*Exemple* I)

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = h.$$

Problème. — *On considère la famille de courbes telle que pour chacune d'elles un arc élémentaire quelconque* PN $=$ *ds soit assimilable à une aiguille aimantée en équilibre sous l'action d'un aimant de pôles* F *et* F′. P *est le pôle positif de l'aiguille et* F *celui de l'aimant;* N *est le pôle négatif de l'aiguille et* F′ *celui de l'aimant. Trajectoires orthogonales des courbes ainsi définies en supposant les attractions et répulsions proportionnelles aux puissances* $n^{\text{ièmes}}$ *de la distance.*

L'équation d'équilibre s'obtient en projetant les forces sur les normales PR et NS (*fig.* 5) à l'élément d'arc; on trouve sans difficulté

$$m\mu r'^n \sin\beta - m\lambda r^n \sin\alpha = m'\mu' r^n \sin\alpha - m'\lambda' r'^n \sin\beta.$$

Si l'on suppose

$$m\mu = m\lambda = m'\mu' = m'\lambda',$$

elle devient

$$r^n \sin\alpha = r'^n \sin\beta,$$

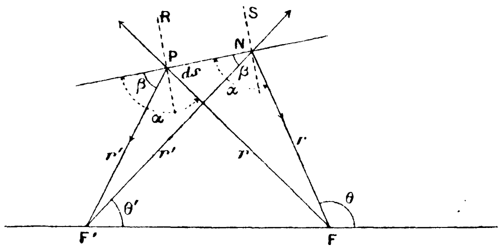
ou encore

$$\frac{d\theta}{\sin^{n+1}\theta} - \frac{d\theta'}{\sin^{n+1}\theta'} = 0,$$

et enfin

$$\int \frac{d\theta}{\sin^{n+1}\theta} - \int \frac{d\theta'}{\sin^{n+1}\theta'} = K;$$

Fig. 5.



telle est l'équation générale des courbes d'équilibre; celle des trajectoires orthogonales est, par suite (*voir* plus haut),

$$r^{n+1} - r'^{n+1} = h.$$

Cas particuliers. — Dans le cas de la nature $n = -2$, l'équation des courbes d'équilibre est donc

$$\cos\theta - \cos\theta' = K,$$

et celle des trajectoires orthogonales

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = h.$$

Pour $n = -1$, on a (*Exemple* 6)

$$\theta - \theta' = K,$$

$$\frac{r}{r'} = h.$$

Pour $n = 0$, on a (*Exemple* 2)

$$\frac{\tan g \frac{\theta}{2}}{\tan g \frac{\theta'}{2}} = K,$$

$$r - r' = h.$$

Enfin, pour $n = 1$, on a (*Exemple* 4)

$$\cot\theta - \cot\theta' = \mathrm{K},$$
$$r^2 - r'^2 = h.$$

Remarque. — Quand on a obtenu les trajectoires orthogonales d'une famille de courbes donnée, il est quelquefois facile de les rapporter toutes deux au même système de coordonnées bi-polaires.

Exemple. — Soient les deux familles orthogonales

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = h,$$
$$\cos\theta + \cos\theta' = \mathrm{K},$$

on a les relations

$$r^2 = 4c^2 + r'^2 - 4cr'\cos\theta',$$
$$r'^2 = 4c^2 + r^2 - 4cr\cos\theta,$$

d'où, pour la seconde équation,

$$\frac{4c^2 + r'^2 - r^2}{4cr'} + \frac{r'^2 - r^2 - 4c^2}{4cr} = \mathrm{K}.$$

Soient encore les familles orthogonales

$$r + r' = h,$$
$$\tang\frac{\theta}{2}\tang\frac{\theta'}{2} = \mathrm{K},$$

il est facile d'écrire la première équation sous la forme

$$\frac{\tang\frac{\theta}{2}}{\tang\frac{\theta'}{2}} = h',$$

h' désignant une constante arbitraire.

BIBLIOGRAPHIE.

Principes et développements de Géométrie cinématique, par le colonel *A. Mannheim*, professeur à l'École Polytechnique. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1894. 25fr.

Voilà certes un beau Livre et qui réjouira tous les amateurs de spéculations géométriques. C'est incontestablement une des plus remarquables productions mathématiques de notre époque, et sa place est marquée à côté des œuvres de Chasles et de Poncelet.

L'Ouvrage est divisé en trois Parties : la première contient les principes de la Géométrie cinématique plane, la seconde ceux de la Géométrie cinématique dans l'espace, la troisième est consacrée aux applications.

Mais, avant tout, qu'est-ce que la Géométrie cinématique?

Ampère a donné le nom de *Cinématique* à l'étude du mouvement considéré indépendamment des causes qui le produisent; il n'est plus alors question des forces, mais seulement des déplacements et du temps. Si l'on fait en outre abstraction du temps, c'est-à-dire lorsque les déplacements restent seuls en jeu, on tombe sur la branche spéciale de Géométrie que M. Mannheim nomme *Géométrie cinématique,* et qui, à peine entrevue avant lui, a acquis, grâce à ses travaux personnels, une importance considérable.

La première Partie renferme 94 pages dont les premières sont relatives aux emprunts faits par M. Mannheim à ses devanciers, emprunts qui se réduisent en somme au théorème de Cauchy sur le déplacement plan d'une figure de forme invariable et à la méthode des normales que Chasles a déduite de cette proposition fondamentale. Tout le reste de cette Section appartient en propre à M. Mannheim; nous citerons particulièrement les formules concernant le déplacement des figures polygonales de forme variable. De ces formules, aussi élégantes qu'expressives, résulte une méthode des normales comprenant comme cas particulier celle de Chasles et permettant en outre de construire les centres de courbure. Ces préceptes sont d'ailleurs accompagnés de nombreuses applications dont les coniques et leurs développées, les caustiques par réfraction, les quadrilatères articulés, etc. ont tour à tour fourni la matière.

Le point de départ de la seconde Partie est le Mémoire que Chasles a publié en 1843 *Sur le mouvement infiniment petit d'un solide libre* et dans lequel apparaît pour la première fois la notion des *droites* dites *conjuguées,* dont M. Mannheim a tiré un parti si habile. Mais c'est à la théorie du *déplacement d'un solide astreint seulement à quatre conditions* que cette Partie doit surtout son intérêt et son originalité. Que de richesses dans les 200 pages consacrées à ce sujet! Nous nous bornerons à mentionner l'étude des normalies, la théorie de la courbure des surfaces, les propriétés de l'hyperboloïde articulé, celles de la polhodie et de l'herpolhodie, l'étude du paraboloïde des huit droites déduite du déplacement du dièdre droit formé par les sections principales d'une surface, les propriétés du conoïde de Plucker, celles des pinceaux de droites, etc.

Les applications intéressantes abondent déjà dans les deux premières Parties; mais ce ne sont guère alors que des problèmes isolés découlant directement des principes et destinés à les éclairer. Les applications que M. Mannheim a réunies dans la troisième Partie sont de plus longue haleine; elles consistent en certains groupes de théorèmes que rattache un lien commun et qui forment par leur ensemble des théories fort importantes. Telles sont les applications qui ont trait au contact du troisième ordre de deux surfaces, aux surfaces parallèles, à la solution géométrique de problèmes dépendant des infiniment petits du troisième ordre, comme la construction des plans osculateurs des courbes d'ombre propre. Viennent ensuite une théorie très complète de la surface des ondes lumineuses, un mode ingénieux de transformation applicable en Géométrie cinématique, une étude concernant le déplacement d'une figure de forme invariable dont chacun des plans passe par des points fixes et qui est d'autant plus intéressante qu'un tel déplacement semble *à priori* impossible. Signalons enfin des notions sur le déplacement infiniment petit d'une figure polyédrale de forme variable, sujet fécond, non encore épuisé malgré les beaux résultats obtenus par M. Mannheim.

L'Ouvrage se termine par un Appendice qui a pour but soit de compléter certaines questions déjà traitées dans les Parties précédentes, soit de montrer la voie suivie pour aborder l'étude du déplacement d'une figure de forme variable. On a reproduit notamment ici un Mémoire d'Optique géométrique, publié en 1886 et renfermant la première solution géométrique générale du problème concernant la détermination des éléments des surfaces caustiques.

Cette rapide analyse du Livre de mon savant ami est bien incomplète à mon gré. Aussi bien, tout dans cet Ouvrage est si attrayant, les questions qui en font l'objet sont présentées avec un art si parfait, qu'il m'eût fallu, pour donner pleine satisfaction à mon esprit et à mon cœur, entrer dans des détails que notre cadre ne comporte pas. Puissent, du moins, ces quelques pages inspirer à nos lecteurs le désir d'étudier un Livre si éminemment propre à leur suggérer des idées fécondes et à développer leur faculté d'invention !

Qu'on nous permette, en finissant, une courte réflexion : Il semble que, dans notre pays, la Science se complaise à contrecarrer les tendances officielles. Lors de la publication du *Traité des propriétés projectives*, en 1823, Charles Dupin n'osait promettre à Poncelet que de rares lecteurs parmi les savants qui, à cette époque, dispensaient la réputation. Dix ans après, c'est l'Académie de Bruxelles qui suscite l'*Aperçu historique*, et non celle de Paris dont les membres les plus illustres, encore entichés de Calcul intégral, considéraient dédaigneusement la Géométrie synthétique comme affaire d'écoliers. Enfin, de nos jours, c'est pendant que la Géométrie pure est entièrement bannie des programmes d'admission à l'École Polytechnique qu'apparaît la *Géométrie cinématique*, si magistralement érigée en corps de doctrine par M. Mannheim. C'est ainsi que la Science géométrique se venge d'un ostracisme immérité; elle continue sa marche glorieuse et bienfaisante même pour ses injustes détracteurs, pareille à l'astre radieux dont parle le poète :

> Le dieu, poursuivant sa carrière,
> Versait des torrents de lumière
> Sur ses obscurs blasphémateurs.

E. R.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1894.

Composition de Mathématiques.

On donne une sphère S, et une droite Δ, dont les équations, par rapport à un système de trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, sont :

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

et

$$x=az+p, \qquad y=bz+q.$$

Par le diamètre de la sphère qui coïncide avec Oz on fait passer un plan quelconque, P, et l'on prend, relativement au cercle d'intersection de la sphère et du plan, la polaire du point où ce plan rencontre Δ.

1° Trouver l'équation et reconnaître la nature du lieu engendré par cette polaire, lorsque le plan P tourne autour de Oz.

2° Trouver les séries de plans réels qui coupent la surface Σ ainsi obtenue suivant des cercles, et vérifier que les plans d'une de ces séries sont perpendiculaires à la droite qui joint les points de contact des plans tangents menés à la sphère S par la droite Δ.

3° Faire voir que, si l'on déplace la sphère S sans changer son rayon de manière à amener son centre en un nouveau point O_1 de l'axe Oz, il est possible de déterminer une nouvelle position Δ_1 de la droite Δ, telle que la nouvelle surface Σ_1, engendrée à l'aide de Δ_1 comme on l'a indiqué ci-dessus, coïncide avec Σ.

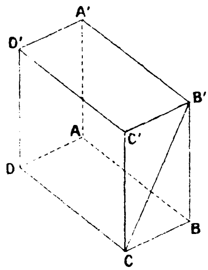
4° Trouver le lieu des positions de la droite Δ_1 quand le point O_1 centre de la sphère se déplace sur Oz.

N. B. — On conservera toutes les notations indiquées dans l'énoncé.

Épure.

On donne un cube A B C D A′B′C′D′, dont la base A B C D est horizontale. La diagonale A C, en projection horizontale, est parallèle aux grands côtés du cadre et à 130 millimètres du bord de gauche : le sommet B est à sa droite.

Les sommets C et A sont respectivement à 130 et à 180 millimètres du bord inférieur du cadre ; la projection verticale du centre du cube est à 345 millimètres de ce bord.



La diagonale CB' de la face CBC'B' est prise comme génératrice : 1° d'un cylindre de révolution dont l'axe passe par le centre de la base supérieure A'B'C'D'; 2° d'un hyperboloïde de révolution, dont l'axe est vertical et passe par le centre du cube.

On demande de représenter par ses projections la partie de l'hyperboloïde, supposé plein, qui est comprise entre les plans des bases supérieure et inférieure du cube, et à l'intérieur du cylindre.

On représentera les lignes d'intersection en traits noirs pleins pour les parties vues, et en points noirs ronds pour les parties cachées.

On indiquera en traits rouges la construction d'un point quelconque de l'intersection de l'hyperboloïde et du cylindre et de la tangente en ce point.

Calcul trigonométrique.

On donne les deux côtés b et c d'un triangle, et l'angle compris A, savoir :

$$b = 4673^{\mathrm{m}},847, \qquad c = 5786^{\mathrm{m}},892, \qquad \mathrm{A} = 76^{\circ}\,43'\,32''.$$

Calculer le côté a, les angles B et C, et la surface du triangle.

Composition de Physique et Chimie.

Physique. — I. Cathétomètre. — II. Détermination du coefficient de dilatation absolue du mercure par la méthode de Dulong et Petit *seulement*.

Chimie. — Acide azoteux, acide phosphoreux, acide arsénieux.

N. B. — On n'a pas à indiquer les méthodes servant à déterminer la composition de ces corps.

Composition française.

Développer cette pensée du maréchal Bugeaud :

« La force morale m'a toujours paru supérieure à la force physique.

» On la prépare surtout en rehaussant le patriotisme dont » le germe est dans tous les cœurs. »

Composition de langues vivantes.

Un jour, en Syrie, au milieu de ces mers de sable indéfinies, où il n'existe pas un seul brin d'herbe pour reposer la vue, Monge fut entouré par une multitude de soldats, jadis laboureurs peut-être, qui lui demandèrent si le pays avait toujours été aussi aride, et s'il ne s'y opérerait pas des changements dans le cours des siècles. Monge leur raconta aussitôt tout ce que les membres de l'Institut d'Égypte avaient observé sur la manière dont les sables se déplacent, sur la vitesse moyenne de leur propagation, etc.

Il était arrivé au terme de sa démonstration, lorsque le général en chef survint et s'écria : « Monge, que dites-vous donc à ces braves gens pour qu'ils vous écoutent avec tant d'attention? — Je leur expliquais, général, que notre globe éprouvera bien des révolutions avant que des voitures se réunissent ici en aussi grand nombre qu'à la porte de l'Opéra, à Paris, un soir de première représentation. »

Une immense explosion de gaieté, dont le général prit sa bonne part, prouva que Monge, dans l'occasion, savait sortir avec esprit de sa gravité habituelle. ARAGO.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1894.

Mathématiques.

On considère les coniques représentées par l'équation

$$x^2 + 2\lambda xy - 2\lambda bx - 4(a-b)y = 0,$$

où a, b sont deux constantes et λ un paramètre variable.

1° Prouver que, si λ varie, les polaires d'un point fixe M par rapport à ces coniques passent par un point fixe P, dont on calculera les coordonnées, au moyen des coordonnées du point M.

2° On fait décrire au point M une droite arbitraire Δ

$$ux + vy + w = 0;$$

prouver que le point P décrit alors une conique S et que, lorsque Δ se déplace dans le plan, la conique S se déforme en passant par trois points fixes A, A', A''. Inversement, quand le point P décrit la conique S, le point M décrit la droite Δ; que devient-il quand le point P vient en l'un des trois points A, A', A''?

3° Où doit être pris le point M pour que le point P soit rejeté à l'infini? Quelle position doit avoir la droite Δ pour que la conique S, qui lui correspond, soit une ellipse, une hyperbole ou une parabole?

4° On considère toutes les coniques S qui sont des paraboles et, en particulier, les axes de ces courbes. Prouver que par tout point du plan il passe trois de ces axes; distinguer les points du plan pour lesquels ces trois axes sont réels et ceux pour lesquels un seul axe est réel.

5° Trouver le lieu des points pour lesquels deux de ces axes se coupent à angle droit.

Physique.

Indiquer et comparer les différents systèmes optiques que l'on peut employer pour projeter au loin un faisceau de lumière.

Étudier l'éclairement produit à une distance très grande L par un projecteur formé d'un objectif infiniment mince, de surface S et de distance focale F, et muni d'une source lumineuse de surface *s* et d'éclat intrinsèque uniforme E, placée normalement à l'axe tout près du foyer. Considérer, en particulier, l'image donnée par un objectif récepteur, de surface S' et de foyer F', installé à la distance L en regard de l'objectif transmetteur; déterminer enfin l'effet produit par un oculaire servant à examiner cette image. On négligera les pertes de lumière par absorption et par réflexion.

Dissertation française.

De la classification des Sciences.

APPLICATIONS DE LA MÉTHODE DE TRANSFORMATION PAR POLAIRES RÉCIPROQUES A DES THÉORÈMES RELATIFS AUX CUBIQUES UNICURSALES;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

Nous nous proposons d'appliquer la méthode des polaires réciproques à des théorèmes relatifs aux cubiques unicursales et notamment à des théorèmes énoncés par M. Astor (*Nouvelles Annales,* juillet 1892).

I.

Les cubiques unicursales peuvent se diviser en trois groupes :

1° Les cubiques cuspidales;

2° Les cubiques nodales circulaires. Ce sont les podaires de la parabole, et, par suite, les figures inverses de coniques en plaçant le centre d'inversion sur la conique.

Leurs polaires réciproques sont des quartiques de troisième classe qui peuvent être envisagées comme les antipodaires de coniques par rapport à un point pris sur la courbe.

3° Les cubiques nodales quelconques. Leurs polaires réciproques sont des quartiques de troisième classe.

Cubiques cuspidales. — A toute propriété transformable par polaires réciproques et relative aux cubiques cuspidales, correspond une propriété corrélative se rapportant au même groupe de cubiques. Cela résulte du théorème suivant, qui est évident :

La polaire réciproque d'une cubique cuspidale est une cubique cuspidale.

En particulier :

La polaire réciproque d'une cissoïde de Dioclès est une développée de parabole.

C'est une conséquence de cette propriété bien connue que les projections du foyer d'une parabole sur ses normales décrivent une parabole ayant ce foyer pour sommet, et l'on sait que la figure inverse d'une parabole, par rapport à son sommet, est une cissoïde droite.

En transformant par polaires réciproques plusieurs propriétés connues des cubiques cuspidales, nous obtiendrons des propriétés relatives aux mêmes cubiques.

Théorèmes.	Théorèmes corrélatifs.
Si, par les points de rencontre d'une droite avec une	Si, par un point quelconque, on mène les trois tangentes à

cubique (cuspidale) [1], on mène les tangentes à la cubique, ces trois tangentes rencontrent de nouveau la courbe en trois points en ligne droite,

une cubique cuspidale, les tangentes menées à la cubique par les points de contact sont concourantes.

Si, autour d'un point fixe d'une conique cuspidale, on fait tourner une sécante, le lieu du point de concours des tangentes menées aux points de rencontre de la sécante avec la cubique est une conique.

La corde des contacts des tangentes menées à une cubique cuspidale par un point quelconque pris sur une tangente fixe à la cubique, enveloppe une conique.

La hessienne d'une cubique cuspidale est la droite joignant le point de rebroussement au point d'inflexion; par conséquent, le lieu des points d'où l'on peut mener à une cubique cuspidale trois tangentes dont les points de contact soient en ligne droite, est la droite précédente.

La cayleyenne d'une cubique cuspidale est réduite à un point : le point de rencontre de la tangente de rebroussement avec la tangente d'inflexion, donc les cordes de contact passent par ce point [2].

En transformant la première de ces propositions par polaires réciproques, on obtient la seconde, et la seconde conduit à la première.

Les points de contact des tangentes menées à une cu-

Les tangentes à une cubique cuspidale, aux points de

---

[1] Nous mettons le mot entre parenthèses, pour indiquer que la propriété s'applique à une cubique quelconque.

[2] M. Balitrand (*Nouvelles Annales,* novembre 1893) démontre ces deux propositions pour la cissoïde; c'était bien inutile, elles s'appliquent à une cubique cuspidale quelconque.

bique cuspidale par un point quelconque sont sur une conique tangente au point de rebroussement à la tangente de rebroussement.

L'enveloppe des cordes d'une cubique cuspidale vues du point de rebroussement sous un angle droit est une conique.

Exemple. — L'enveloppe des cordes d'une cissoïde vues du point de rebroussement sous un angle droit est une hyperbole ayant ce point pour sommet.

La polaire harmonique du point d'inflexion d'une cubique cuspidale est la tangente de rebroussement

Le lieu des points de rebroussement des cubiques cuspidales tangentes aux trois côtés d'un triangle en trois points en ligne droite est une conique inscrite dans le triangle.

L'enveloppe des tangentes de rebroussement est une quartique de troisième classe.

Si l'on considère sur une cubique cuspidale une suite de points $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ tels que la tangente en cha-

rencontre avec une droite quelconque, touchent une conique tangente au point d'inflexion à la tangente inflexionnelle.

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une cubique cuspidale, dont le point d'inflexion est à l'infini, est une conique.

Exemple. — Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une développée de parabole est une parabole.

Si par un point pris sur la tangente de rebroussement d'une cubique cuspidale on mène à la cubique les deux tangentes, la conjuguée de la tangente de rebroussement par rapport à ces deux tangentes passe par le point d'inflexion.

L'enveloppe des tangentes inflexionnelles des cubiques cuspidales tangentes en trois points donnés à trois droites concourantes est une conique circonscrite au triangle des trois points.

Le lieu des points d'inflexion est une cubique unicursale.

Une tangente TT′ touchant une cubique cuspidale au point A_0, par ce point on mène la tangente A_0A_1 autre cun de ces points rencontre la courbe au point suivant, la position limite du point A_n est le point de rebroussement (1).

que TT′; par le point de contact A_1 on mène la tangente A_1A_2, etc.; la tangente limite vers laquelle on tend est la tangente inflexionnelle.

Cubiques unicursales quelconques. — La transformation par polaires réciproques nous fournira des propriétés des *quartiques de troisième classe*.

Une cubique crunodale a un point d'inflexion réel et deux points d'inflexion imaginaires conjugués.

Si les points de contact de la tangente double d'une quartique de troisième classe sont réels, une seule tangente de rebroussement est réelle, les deux autres points de rebroussement sont imaginaires conjugués.

Une cubique acnodale a trois points d'inflexion réels.

Si les points de contact de la tangente double d'une quartique de troisième classe sont imaginaires, les trois tangentes de rebroussement sont réelles.

Les trois points d'inflexion sont en ligne droite.

Les trois tangentes de rebroussement sont concourantes.

Si une cubique nodale a trois points d'inflexion réels, le point double est le pôle de la droite qui joint les trois points par rapport au triangle formé par les trois tangentes inflexionnelles (SALMON, *Courbes planes*).

Si une quartique de troisième classe a trois tangentes de rebroussement réelles, la tangente double est la polaire du point de concours des tangentes de rebroussement par rapport au triangle formé par les trois points de rebroussement.

(1) *Voir* le problème du Concours général de 1880. On demandait la limite des points A_n et A_{-n}. On voit que la première étant trouvée, on obtenait la seconde en transformant par polaires réciproques.

Si la droite des inflexions est à l'infini, le point double est le point de concours des médianes du triangle des asymptotes.

Si le point de concours des tangentes de rebroussement est le centre de gravité du triangle des points de rebroussement, la tangente double est la droite de l'infini.

Si autour d'un point d'inflexion d'une cubique (nodale) on fait tourner une transversale, et qu'aux deux points où elle coupe la courbe on mène des tangentes, leur point de concours engendrera une ligne droite D. La droite D rencontre chaque transversale en un point qui est le conjugué harmonique du point d'inflexion par rapport aux deux points où la transversale rencontre de nouveau la courbe.

Si par un point P pris sur une tangente de rebroussement, on mène les deux tangentes à une quartique de troisième classe, la droite joignant les points de contact passe par un point fixe. La droite joignant le point P à ce point est la conjuguée harmonique de la tangente de rebroussement par rapport aux deux tangentes issues de P.

Si la cubique est nodale, la droite D est celle qui joint le point double au point de contact de la tangente menée par le point d'inflexion.

Le point fixe est le point d'intersection de la tangente double avec la tangente à la quartique au point où elle est rencontrée par la tangente de rebroussement.

La cayleyenne d'une cubique nodale est, en négligeant le point double, une conique touchant les tangentes doubles aux points de rencontre avec la droite des inflexions.

Le lieu des points tels que les tàngentes menées de chacun d'eux à une quartique de troisième classe aient leurs points de contact en ligne droite est une conique touchant, aux deux points de contact avec la tangente double, les droites joignant ces deux points de contact au point de concours de la tangente de rebroussement.

Si les tangentes au point

Si la quartique touche la

double sont isotropes, la cayleyenne est une conique ayant ce point pour foyer.

Si l'on considère la hessienne d'une cubique nodale, trois des tangentes menées d'un point quelconque de cette courbe à la cubique ont leurs points de contact en ligne droite. Le point de rencontre de cette droite avec celle qui joint le quatrième point de contact au point double se trouve sur la hessienne.

La corde polaire d'un point d'une cubique unicursale enveloppe une conique Σ inscrite à l'angle des tangentes au point double aux points où elles sont coupées par la droite des inflexions (Astor).

Si les tangentes au point double sont isotropes, la conique Σ a un foyer au point double.

Les droites joignant le point double d'une cubique aux points de contact des deux tangentes menées à la cubique par un point quelconque pris sur la cubique forment avec droite de l'infini aux points cycliques (hypocycloïde à trois rebroussements), le lieu précédent est un cercle.

L'enveloppe des droites, telles que les tangentes en trois de leurs points de rencontre avec une quartique de troisième classe soient concourantes, est une quartique de troisième classe.

La droite, joignant le point de concours au point de rencontre de la quatrième tangente avec la tangente double, touche la même quartique.

Une tangente quelconque à une quartique de troisième classe rencontrant la courbe en deux points, si l'on mène les tangentes en ces points, leur point de concours décrit une conique tangente aux deux droites joignant le point de concours des tangentes de rebroussement aux points de contact de la quartique avec sa tangente double, et touchant ces droites en ces points.

Si la quartique est une hypocycloïde à trois rebroussements, la conique est un cercle.

Si l'on mène une tangente quelconque à une quartique de troisième classe et les tangentes aux points où elle rencontre de nouveau la courbe, ces deux dernières coupent la les tangentes au nœud un faisceau harmonique (Astor).

En particulier, si le point double est un foyer, la corde polaire d'un point quelconque de la courbe est vue du point double sous un angle droit.

L'enveloppe des cordes d'une cubique unicursale vues du point double sous un angle droit est une conique.

Si les tangentes au point double sont isotropes, la conique a un foyer au point double, et la directrice correspondante est la droite des inflexions.

Si la cubique est une strophoïde, la conique est une parabole dont la directrice passe par le point double.

L'enveloppe des cordes de la cubique de l'Hospital (antipodaire de la parabole par rapport à son foyer), vues de ce foyer sous un angle droit, est une conique ayant ce point pour foyer.

Les deux tangentes au point double d'une cubique étant réelles, si d'un point de la

tangente double en deux points qui forment une division harmonique avec les points de contact de la tangente double.

En particulier, si la quartique est une hypocycloïde à trois rebroussements, les tangentes menées à la courbe aux points où elle est rencontrée par une tangente quelconque sont rectangulaires.

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une quartique dont la tangente double est la droite de l'infini est une conique.

Si la quartique est une hypocycloïde à trois rebroussements, le lieu précédent est un cercle ayant son centre au point de concours des tangentes de rebroussement.

Le lieu des sommets des angles droits, circonscrits à une antipodaire d'hyperbole équilatère relativement à un point pris sur l'hyperbole, est une hyperbole équilatère.

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la cardioïde est un cercle (Laguerre).

Lorsqu'une quartique de troisième classe n'a qu'un point de rebroussement réel, courbe A_1 on peut mener deux tangentes réelles, il n'y a qu'un des points de contact, A_2 par exemple, d'où l'on puisse mener de nouveau des tangentes réelles; alors de A_2 on mène la tangente dont le point de contact, A_3, jouit de la même propriété, etc. Le point limite vers lequel on tend est le point d'inflexion de la cubique (ASTOR).

si une tangente à la quartique la rencontre en deux points réels A_2, A_3, il n'y a qu'un des points de rencontre, A_2, tel que la tangente en ce point rencontre la courbe en deux points réels; alors on mène la tangente en A_2, etc. La tangente limite vers laquelle on tend ainsi est la tangente de rebroussement réelle.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES DU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1887;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

On donne dans un plan un point fixe ω *et deux axes rectangulaires fixes* Ox, Oy. *Par le point* ω, *on fait passer deux droites rectangulaires rencontrant* Ox *en* B *et* D, Oy *en* A *et* C. *Par les points* A, B, *on fait passer une parabole* P *tangente aux axes* Ox et Oy *en ces points; par les points* C *et* D *on fait passer une parabole* P' *tangente aux axes* Ox, Oy *en ces points. On fait tourner les droites rectangulaires* AB, CD *autour du point* ω *et l'on demande :*

1° *Les équations des paraboles* P, P' *de leurs axes et de leurs directrices ;*

2° *L'équation du lieu du point de concours des axes et des directrices;*

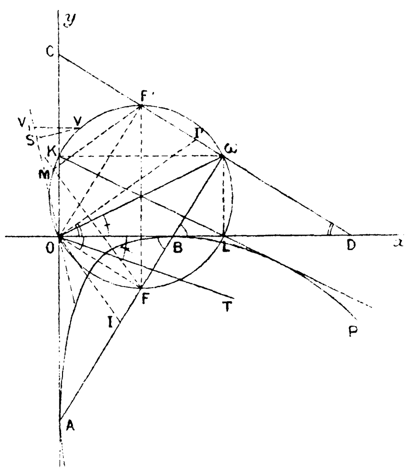
3° *L'équation du lieu du point de concours de leurs axes, qui se compose de deux cercles.*

4° *On prouvera que la distance des foyers est constante.*

1° Le point O est un point de la directrice de chacune des paraboles P et P′, puisque les tangentes issues de O à chacune d'elles sont rectangulaires. Le foyer F de la parabole P est la projection du point O de la directrice sur sa polaire AB; de même le foyer F′ de P′ est la projection de O sur CD. Il en résulte que, lorsque le système des deux droites ωAB, ωCD tourne autour de ω, les foyers des paraboles P et P′ décrivent le cercle (C) ayant pour diamètre Oω. Ce cercle passe par les projections K, L du point ω sur les axes. Le quadrilatère ωFOF′ étant un rectangle, on a

$$FF' = O\omega,$$

Fig. 1.



ce qui montre que la distance des foyers reste constante et égale à la distance du point O au point fixe ω (quatrième partie du problème).

2° Soient I le milieu de AB et I′ le milieu de CD. La droite OI est parallèle à l'axe de la parabole P; de même la droite OI′ est parallèle à l'axe de P′. Les axes de ces deux paraboles sont donc les droites FM et F′M, parallèles menées respectivement à OI et OI′ par les foyers F et F′. Je dis que l'angle FMF′ est droit.

En effet, cet angle est égal à $\widehat{IOI'}$ comme ayant les côtés parallèles, et 'on a

$$\widehat{IOI'} = \widehat{IOD} + \widehat{I'OD} = \widehat{OBI} + \widehat{I'DO} = \widehat{\omega BD} + \widehat{\omega DB} = 1 \text{ droit.}$$

L'angle FMF′ étant droit, le point M appartient au cercle de diamètre FF′, lequel n'est autre que le cercle fixe (C) de diamètre Oω. Le lieu du point de concours des axes est donc le même que le lieu des foyers : c'est le cercle de diamètre Oω (l'énoncé indique par erreur que le lieu est formé de deux cercles).

3° Cherchons le lieu du point de rencontre de chacune des paraboles P et de chacune des paraboles P′ avec sa directrice. Les directrices passent par le point fixe O et elles sont perpendiculaires sur les axes : donc le lieu en question n'est autre que la podaire de l'enveloppe des axes des paraboles P par rapport au point O. Il est clair que l'enveloppe des axes des paraboles P′ est la même que celle des axes des paraboles P, car, si l'on considère ces paraboles P′ isolément, rien ne les différencie des premières. Le problème est donc le suivant :

On considère les paraboles tangentes à deux droites rectangulaires Oy, Ox, *en deux points variables, mais tels que la corde des contacts passe par un point fixe* ω. *Enveloppe des axes de ces paraboles.*

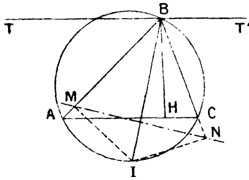
Nous avons vu que le lieu des foyers des paraboles considérées était le cercle (C) de diamètre $O\omega$. Soient K, L les points d'intersection de ce cercle et des axes Ox, Oy.

La parabole P a son foyer situé sur le cercle circonscrit au triangle fixe OKL et elle est tangente à deux côtés de ce triangle : donc elle est aussi tangente au troisième côté KL. On voit ainsi que *les paraboles* P *et* P' *sont inscrites dans un triangle fixe, le triangle* OKL. La question est ainsi ramenée à un problème connu : Déterminer l'enveloppe des axes des paraboles inscrites dans un triangle.

C'est l'enveloppe des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque du cercle circonscrit à un triangle sur la droite de Simson qui lui correspond. Or il est facile de démontrer (*voir* par exemple WEILL, *Journal de Mathématiques spéciales*, 1884) que ces perpendiculaires sont les droites de Simson du triangle formé par les parallèles menées de chaque sommet au côté opposé. L'enveloppe des axes des paraboles inscrites dans le premier triangle (ou conjuguées au second triangle) est donc l'enveloppe des droites de Simson de ce second triangle, c'est-à-dire, comme on le sait, une hypocycloïde à trois rebroussements admettant comme cercle inscrit le cercle des neuf points du nouveau triangle, qui est le cercle circonscrit au premier.

L'enveloppe des axes des paraboles P et P' est ainsi déterminée. C'est une hypocycloïde à trois rebroussements dont le cercle inscrit à la courbe est le cercle (C) de diamètre $O\omega$. La construction des tangentes menées de O à l'hypocycloïde H nous sera d'une grande utilité pour déterminer la podaire de la courbe par rapport au point O. Puisque le point O se trouve sur le cercle inscrit à H, deux des tangentes issues de O sont rectangulaires. D'ailleurs, d'une manière générale, l'hypocycloïde enveloppe des axes des paraboles inscrites dans un triangle ABC est tangente aux six bissectrices des angles du triangle ainsi qu'aux parallèles menées par chacun des sommets au côté opposé. Soit, en effet, la

Fig. 2.



bissectrice BI rencontrant le cercle circonscrit en I. La parabole inscrite qui a pour foyer le point I a pour tangente au sommet la droite de Simson du point I; or cette droite de Simson MN est perpendiculaire sur BI. Donc BI est l'axe de la parabole. Il en est de même de la seconde bissectrice de l'angle B. D'autre part, la parabole inscrite qui a pour foyer le sommet B a pour tangente au sommet la droite de Simson de B, c'est-à-dire la hauteur BH. Cette parabole est formée par la droite double TT' parallèle avec AC. Son axe est confondu avec TT'.

Il résulte de ces considérations que les tangentes issues de O à l'hypocycloïde enveloppe des axes des paraboles P et P' sont les deux bissectrices de l'angle xOy, et la parallèle menée de O à KL, c'est-à-dire la droite OT symétrique de $O\omega$ par rapport à Ox. Ces tangentes auraient d'ailleurs pu être déterminées directement : ce sont les axes de trois paraboles particulières du système. En définitive :

L'enveloppe des axes des paraboles P *et* P' *est une hypocycloïde à trois rebroussements, circonscrite au cercle de diamètre* $O\omega$, *tangente aux six bissectrices* *du triangle formé par le point* O *et les projections du point* ω *sur les axes, ainsi qu'aux parallèles menées aux axes par le point* ω *et à la droite symétrique de* O ω *par rapport à* O x.

Nous pouvons maintenant revenir à la recherche du lieu des points de rencontre de l'axe et de la directrice des paraboles P. Cette courbe L sera ainsi une podaire d'hypocycloïde à trois rebroussements par rapport à un point du cercle inscrit dans la courbe. Or, d'une manière générale :

Les podaires de l'hypocycloïde à trois rebroussements sont des quartiques unicursales admettant comme directions asymptotiques doubles les droites isotropes.

En effet, l'hypocycloïde à trois rebroussements est une courbe de troisième classe bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques. Cherchons la podaire de cette courbe par rapport à un point quelconque P. Cette podaire a un point triple en P, puisqu'on peut mener de P trois tangentes à l'hypocycloïde. Mais sur une droite quelconque PM passant par P se trouve un seul point du lieu puisque, l'hypocycloïde ayant pour tangente double la droite de l'infini, dont la direction est indéterminée, on ne peut lui mener qu'une seule tangente perpendiculaire à une direction donnée PM. Donc la podaire est une quartique admettant un point triple en P. On voit de plus que cette podaire est, comme l'hypocycloïde elle-même, tangente à la droite de l'infini en chacun des points cycliques; donc :

La courbe L *est une quartique admettant au point* O *un point triple réel et ayant pour directions asymptotiques doubles les droites isotropes.*

Nous avons déterminé les tangentes à l'hypocycloïde issues de O : ce sont les deux bissectrices de l'angle xOy et la droite OT. Or il est bien facile de voir que les tangentes à la podaire d'une courbe par rapport à un point P, en ce point, sont perpendiculaires sur les tangentes à la courbe qui passent par le point. Donc :

Les tangentes à la courbe L *en son point triple* O *sont les deux bissectrices de l'angle* xOy *et la perpendiculaire en* O *sur la droite* OT *symétrique de* $O\omega$ *par rapport à* Ox.

Les résultats auxquels nous sommes parvenu nous permettent d'écrire immédiatement, sans aucun calcul, l'équation de la quartique L :

$$(x^2+y^2)^2+(y-x)(y+x)(qy-px)=0,$$

en appelant p et q les coordonnées du point ω ; mais il est bien inutile d'étudier cette équation pour avoir la forme de la quartique L. Celle-ci peut, en effet, être construite géométriquement point par point de la façon suivante. On prendra un point quelconque V sur le cercle (C) : ce sera le foyer de l'une des paraboles P ou P′ ; on joindra le point O au symétrique V_1 de V par rapport à l'un des axes Ox ou Oy ; la droite OV_1 sera la directrice de la parabole correspondante, l'axe sera la perpendiculaire VS : donc le point S sera un point du lieu. On voit ainsi que la quartique passe par les projections du point ω sur les axes, et l'on se rend immédiatement compte de sa forme : c'est un trifolium.

Puisque les axes des paraboles P et P′ ont même enveloppe, il est clair que la quartique L est aussi le lieu des points de rencontre de l'axe et de la directrice des paraboles P′.

4° Cherchons enfin le lieu du point de rencontre de l'axe de chaque parabole P avec la directrice de la parabole P′ correspondante. L'axe de la parabole P est la droite FM, celui de la parabole P′ est la droite F′M, parallèle à OI′; donc la droite OI est perpendiculaire sur F′M et, par suite, est la directrice de la parabole P′; de même la droite OI′ est la directrice de la parabole P.

Ainsi donc, l'axe d'une parabole P est constamment parallèle à la directrice de la parabole P′ correspondante et réciproquement. Mais, dans certains cas particuliers, l'axe de l'une des paraboles peut coïncider avec la directrice de l'autre, de sorte que cet axe peut alors être considéré comme faisant partie du lieu. C'est ce qui se produit pour la parabole P formée par la droite double OT : son axe est OT et OT est la directrice de la parabole P′ correspondante.

Remarques sur les podaires de l'hypocycloïde à trois rebroussements. — Les podaires de l'hypocycloïde à trois rebroussements sont des quartiques ayant un point triple et, par conséquent, unicursales. Elles ont en outre, comme directions asymptotiques doubles, les droites isotropes. Lorsque le point est intérieur à la courbe, elles affectent la forme d'un trifolium. On les rencontre dans un certain nombre de questions, parmi lesquelles nous signalerons :

1° Le lieu des points de rencontre des axes et des directrices des paraboles inscrites ou conjuguées à un triangle;

2° Le lieu des projections du sommet O de l'angle droit d'un triangle rectangle isoscèle sur les axes des paraboles inscrites dans le triangle (École Polytechnique, concours de 1869). Le point O étant alors l'un des points de contact de l'hypocycloïde avec son cercle inscrit, la podaire a une tangente de rebroussement au point O, l'autre tangente étant perpendiculaire sur la première. La courbe n'a plus alors que deux boucles, elle a une forme remarquable et on la construit points par points d'une façon très simple;

3° Le lieu des projections du milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isoscèle sur les axes des paraboles circonscrites (Ecole Navale, concours de 1893).

PROPRIÉTÉS DE LA PARABOLE ET SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DU PROBLÈME DU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE EN 1893;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

THÉORÈME. — A, B, C *désignant trois points d'une parabole,* D, E, F *les milieux des côtés du triangle* ABC, *l'hyperbole équilatère qui passe par les points* D, E *et qui a pour asymptote l'axe de la parallèle, passe par le point* F.

Soient K et I (*fig.* 1) les points de rencontre avec l'axe des droites DE et DF. Considérons l'hyperbole équilatère qui passe par D et E et qui est asymptote à l'axe de la parabole. En portant EH = DK et en menant HP perpendiculaire sur l'axe, HP sera la seconde asymptote de cette hyperbole. Soit L le point de rencontre de DF avec l'asymptote HP. Si l'on a

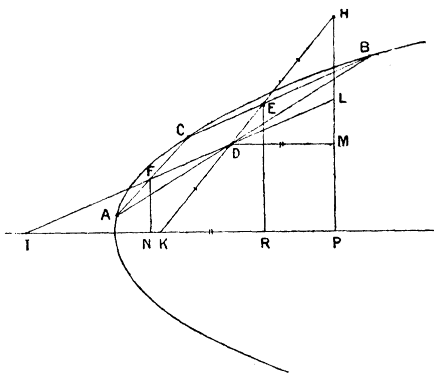
$$DL = FI,$$

l'hyperbole équilatère considérée passera aussi par le point F. En menant DM perpendiculaire sur HP, il suffira de prouver que $DM = IN$. Or les deux triangles rectangles HDM, EKR étant égaux par construction, on a

$$DM = KR;$$

il suffira, en définitive, de prouver l'égalité $KR = IN$.

Fig. 1.



Appelons (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées des points A, B, C de la parabole, on a

$$KR = \frac{ER}{\operatorname{tang} EKR}.$$

Mais $ER = \frac{y_3 + y_2}{2}$, et l'angle EKR est égal à l'angle de AC avec l'axe de la parabole : donc

$$\operatorname{tang} EKR = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_3^2 - y_1^2} = \frac{2p}{y_3 + y_1}.$$

Il en résulte que

$$KR = \frac{(y_3 + y_2)(y_3 + y_1)}{4p}.$$

On a de même

$$\mathrm{IN} = \frac{\mathrm{FN}}{\mathrm{tang\,FIN}} = \frac{y_3+y_1}{2}\,\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}$$
$$= \frac{y_3+y_1}{2}\,\frac{y_2^2-y_3^2}{2p(y_2-y_3)} = \frac{(y_3+y_1)(y_2+y_3)}{4p},$$

donc

$$\mathrm{KR} = \mathrm{IN}.$$

Corollaires. — On sait que l'asymptote d'une hyperbole équilatère, circonscrite à un triangle, est droite de Simson du triangle. De là les corollaires suivants :

1. *Les perpendiculaires élevées aux points de rencontre avec l'axe, sur les côtés du triangle obtenu en joignant les milieux des côtés d'un triangle quelconque inscrit dans une parabole, sont concourantes.*

2. *L'axe d'une parabole circonscrite à un triangle est droite de Simson du triangle obtenu en joignant les milieux des côtés du premier.*

3. *L'enveloppe des axes des paraboles circonscrites à un triangle est une hypocycloïde à trois rebroussements dont le cercle inscrit à la courbe est le cercle des neuf points du triangle formé en joignant les milieux des côtés du premier.*

On sait, en effet, que l'enveloppe des droites de Simson d'un triangle est une hypocycloïde à trois rebroussements, dont le cercle inscrit à la courbe est le cercle des neuf points du triangle.

Nous ignorons si la propriété énoncée en dernier lieu est déjà connue. Ce qu'il y a de particulièrement remarquable, c'est que l'enveloppe des axes des paraboles circonscrites, des paraboles inscrites et des paraboles conjuguées à un triangle sont des hypocycloïdes à trois rebroussements. Le cercle inscrit dans la première courbe est le cercle des neuf points du triangle obtenu en joignant les milieux des côtés du triangle donné ; le cercle inscrit dans la seconde courbe est le cercle circonscrit au triangle, et le cercle inscrit dans la troisième courbe est le cercle des neuf points du triangle.

De ces théorèmes, dont deux au moins sont connus, et qui se ramènent tous à cette unique proposition : *L'enveloppe des droites de Simson d'un triangle est une hypocycloïde à trois rebroussements,* on déduit les conséquences suivantes :

L'axe d'une parabole, conjuguée à un triangle, est asymptote à une hyperbole équilatère circonscrite au triangle.

L'axe d'une parabole, circonscrite à un triangle, est asymptote à une hyperbole équilatère passant par les milieux des côtés du triangle.

L'axe d'une parabole, inscrite à un triangle, est asymptote à une hyperbole équilatère passant par les sommets du triangle obtenu en menant par chaque sommet du triangle donné la parallèle au côté opposé.

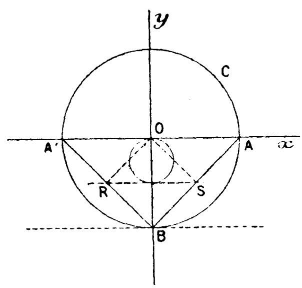
En faisant usage du corollaire (3), nous nous proposons de résoudre le problème donné au concours d'admission à l'École Navale, en 1893.

On considérait les paraboles passant par les trois sommets d'un triangle rectangle isoscèle ABA′ et l'on demandait (*fig.* 2) :

1° Démontrer que, par chaque point du plan, passent deux de ces paraboles. Soit M un point quelconque du plan. Dans le faisceau des coniques passant par les quatre points ABA′M, il en existe toujours deux tangentes à la droite de l'infini, c'est-à-dire deux paraboles.

2° De distinguer les régions du plan pour lesquelles ces deux paraboles sont réelles. Pour que les deux paraboles du faisceau (A B A′M) soient réelles, il faut que la conique des neuf points du faisceau soit une hyperbole, ce qui exige que le quadrilatère A B A′M soit convexe. Le point M ne doit donc se trouver, ni dans l'in-

Fig. 2.



térieur du triangle A A′B, ni dans le prolongement des angles de ce triangle, au delà de chaque sommet.

3° De démontrer que le lieu des points M, pour lesquels les axes des deux paraboles correspondantes sont rectangulaires, est une circonférence (c). En effet, lorsque les axes des deux paraboles d'un faisceau (A B A′M) sont rectangulaires, les rayons doubles du faisceau involutif des directions asymptotiques de ces coniques, étant rectangulaires, sont conjugués par rapport aux directions isotropes : donc les directions isotropes sont directions asymptotiques d'une conique du faisceau, c'est-à-dire qu'il existe un cercle dans le faisceau, ce qui exige que le point M se trouve sur le cercle (c) circonscrit au triangle ABA′.

4° On demandait le lieu L des projections du point O sur les axes des paraboles circonscrites au triangle ABA′. C'est la podaire du point O relative à l'enveloppe des axes des paraboles. Or cette enveloppe, d'après ce que nous avons vu, est une hyperboloïde à trois rebroussements, admettant pour cercle inscrit le cercle des neuf points du triangle ORS, c'est-à-dire un cercle tangent en O à la droite AA' et passant par le milieu de OB. Donc la courbe L est une quartique ayant un point triple en O et ayant pour directions asymptotiques doubles les droites isotropes (*voir* notre solution du problème du Concours d'admission à l'Ecole Polytechnique, en 1887). Les trois tangentes à l'hypocycloïde issues de O étant la droite OB et les droites OR, OS, bissectrices de l'angle xOy (la première étant l'axe de la parabole qui a son sommet en B, les deux autres les axes des paraboles formées par les côtés AB, A'B du triangle AA'B et les parallèles à ces côtés menées respectivement par les sommets opposés), les tangentes à la courbe L, en son point triple O, seront les deux droites OR, OS et la droite AA'. De plus, la droite AA' et la parallèle menée par B constituant une parabole du système, dont l'axe est la parallèle équidistante passant par le milieu I de OB, le point I appartient à la courbe L. Il résulte de là, et sans aucun calcul, que la quartique L a pour équation

$$(x^2+y^2)^2+\frac{R}{2}y(y-x)(y+x)=0,$$

en posant, d'après l'énoncé,

$$OA = OA' = OB = R.$$

On construira géométriquement point par point ce trifolium en prenant les pieds des perpendiculaires menées de O sur les droites de Simson du triangle rectangle isoscèle ORS, lesquelles s'obtiennent bien simplement.

5° On demandait de prouver que, lorsque le point M décrit la circonférence (c), le point de rencontre des axes des deux paraboles, passant par ce point, décrit également une circonférence. Cela résulte immédiatement de la propriété bien connue de l'hypocycloïde à trois rebroussements : le lieu des sommets des angles droits circonscrits est le cercle inscrit à la courbe. Or, lorsque le point M décrit la circonférence (c), les axes des deux paraboles correspondantes sont rectangulaires; donc leur point de concours décrit le cercle des neuf points du triangle ORS, c'est-à-dire un cercle tangent en O à AA' et ayant pour rayon $\frac{R}{4}$.

6° On demandait enfin de prouver que l'hyperbole équilatère circonscrite au triangle ABA' et dont les axes sont parallèles aux axes des deux paraboles passant par un point M de la circonférence (c) passe par ce point M. Cela résulte immédiatement de ce qu'il existe une seule hyperbole équilatère dans un faisceau, et de ce que les coniques d'un faisceau (AA'BM), auquel appartient un cercle (c), ont leurs axes parallèles.

REMARQUES SUR LE THÉORÈME DE FRÉGIER;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

Le théorème de Frégier n'est que la transformée, par polaires réciproques, de cette propriété élémentaire de la parabole : Le lieu des sommets des angles droits circonscrits est une droite, la directrice.

Il suffit de prendre pour conique directrice un cercle quelconque, de centre O. La transformée S de la parabole est une conique passant par le point O, et les cordes de cette conique, vues du point O, sous un angle droit, auront toutes, en commun, un point fixe M, pôle de la directrice, situé sur la perpendiculaire menée de O à la directrice, c'est-à-dire, comme on le voit facilement, sur la normale à la conique S au point O.

Si le centre O du cercle directeur est situé sur la directrice D, la polaire réciproque de la parabole est une hyperbole équilatère passant par le point O. Les cordes de cette conique, vues du point O sous un angle droit, devant passer par le pôle de D, lequel est à l'infini dans la direction perpendiculaire, seront toutes parallèles à la normale au point O à l'hyperbole équilatère.

Appelons *point de Frégier* le point fixe par lequel passent les cordes d'une conique vues d'un point M de la courbe sous un angle droit. Ce point occupe sur la normale une position remarquable. Lorsque les côtés de l'angle droit, pivotant autour du point M, sont parallèles aux axes de la conique, ces côtés forment un système de cordes supplémentaires de la conique : donc la droite AB, joignant leurs seconds points d'intersection avec la courbe, passera par le centre O.

Le point de Frégier I est à l'intersection du diamètre AB et de la normale en M. Soient P et Q les points de rencontre de cette normale avec les axes de la conique. Le faisceau O(MPIQ) est harmonique, puisque la parallèle MB au rayon OQ est partagée par les trois autres en deux parties égales : *le point de Frégier est donc, sur la normale, le conjugué harmonique du point* M, *par rapport aux points d'intersection de la normale avec les axes.*

Corollaires. — 1° Dans le cas de l'hyperbole équilatère, le point de Frégier relatif à un point M de la courbe est à l'infini sur la normale. Donc :

Le point d'incidence d'une normale à une hyperbole *équilatère est le milieu de la portion de normale comprise entre les axes.*

2° L'un des axes de la parabole est à l'infini. Il en résulte que :

Le point de Frégier relatif à un point M *d'une parabole est, sur la normale, à la même distance de l'axe que le point* M.

SUR UN THÉORÈME DE M. FAURE;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

Dans une Note précédente, nous avons prouvé que le théorème de M. Faure sur les cercles circonscrits aux triangles conjugués par rapport à une conique était un cas particulier d'une propriété plus étendue, qui peut ainsi s'énoncer :

1. *Étant donnés une conique* S *et deux points* A, B, *si l'on considère la conique* Σ *harmonique* [1] *de* S *par rapport à* (AB), *toute conique* Γ *passant par* A, B, *et circonscrite à un triangle quelconque conjugué à* S, *coupe* Σ *en deux points tels que les tangentes à* Γ *et* Σ *en chacun de ces points soient conjuguées par rapport aux droites les joignant à* A *et* B.

---

[1] Nous appelons *conique harmonique* de deux coniques S et S_1 le lieu des points tels que les tangentes issues de chacun d'eux à S et S_1 forment un faisceau harmonique. Dans le cas où la conique S_1 est formée par deux points A, B, la conique harmonique est celle qui passe par A, B et les points de contact des tangentes à S menées par A et B.

Si les points A et B sont les ombilics du plan, la conique harmonique Σ est le cercle orthoptique de S; on obtient alors le théorème Faure. Ce théorème conduit lui-même à une foule de conséquences intéressantes et permet de retrouver beaucoup de propositions connues, mais ne paraissant avoir aucun lien les unes avec les autres, et qui devront être ainsi envisagées comme des corollaires d'un théorème plus général. Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, d'étudier les nombreux corollaires du théorème Faure.

I. Auparavant, et pour pouvoir en faire simultanément l'étude, nous allons parler d'un autre théorème général intimement lié au théorème 1, puisqu'il peut en être déduit. C'est la proposition suivante :

2. *Étant donnés une conique* S *et deux points fixes* A, B, *si l'on considère la conique* Σ *harmonique de* S *par rapport à* A *et* B, *toute conique* Γ CONJUGUÉE *par rapport à un triangle* CIRCONSCRIT *à* S *et passant par* A, B *coupe* Σ *en deux points tels que les tangentes à* Γ *et* Σ *en chacun de ces points soient conjuguées par rapport aux droites les joignant aux points* A *et* B.

Cette propriété résulte de ce fait qu'une conique S étant inscrite dans un triangle conjugué à Γ, cette seconde conique Γ est harmoniquement circonscrite à la première. La démonstration en est simple. Considérons une conique S inscrite dans un triangle ABC conjugué à une conique Γ. Le point C, pôle de la tangente AB à S par rapport à Γ, est un point tel que les tangentes menées de ce point à S et Γ forment un faisceau harmonique. Il en est de même pour les points A, B et pour les points de contact des tangentes communes à S et Γ. Il en résulte que la conique Σ harmonique de S et Γ est en même temps la polaire réciproque de S par rapport à Γ : donc le pôle d'une tangente quelconque à S par rapport à Γ étant sur Σ est un point tel que les tangentes menées de ce point à S et Γ forment un faisceau harmonique. (C'est le théorème connu : *Lorsqu'il existe un triangle circonscrit à une conique et conjugué à une autre, il existe une infinité de triangles analogues.*)

Transformons alors par polaires réciproques en prenant pour conique directrice une conique telle que S se transforme en Γ. On obtient cette propriété de S : les polaires de tous ses points par rapport à Γ sont divisées harmoniquement par les deux coniques, ce qui montre que S est circonscrite à des triangles conjugués à Γ.

Dans le cas particulier où les points A, B sont les points cycliques, la conique harmonique de S par rapport à (AB) étant son cercle orthoptique, on obtient le théorème suivant :

3. *Les cercles conjugués aux triangles circonscrits à une conique coupent orthogonalement le cercle orthoptique de la conique.*

D'autre part, le théorème Faure et le théorème précédent peuvent encore s'énoncer ainsi :

4. *Les cercles orthoptiques des coniques conjuguées par rapport à un triangle coupent orthogonalement le cercle circonscrit au triangle.*

Les cercles orthoptiques des coniques inscrites dans un triangle coupent orthogonalement le cercle conjugué au triangle.

Lorsque deux cercles se coupent orthogonalement, la puissance du centre de l'un par rapport à l'autre est égale au carré de son rayon. Or le centre du cercle orthoptique est le centre de la conique, et le carré de son rayon est la somme des carrés des demi-axes de la conique. De là les corollaires suivants, qui ne sont que des manières différentes d'énoncer les théorèmes de M. Faure.

La puissance du centre d'une conique conjuguée à un triangle par rapport au cercle circonscrit est égale à la somme des carrés de ses demi-axes.

Le lieu des centres des coniques conjuguées à un triangle et dont la somme des carrés des demi-axes est constante est un cercle concentrique au cercle circonscrit au triangle.

La puissance du centre d'une conique inscrite dans un triangle par rapport au cercle conjugué est égale à la somme des carrés de ses demi-axes.

Le lieu des centres des coniques inscrites dans un triangle et dont la somme des carrés des demi-axes est constante est un cercle ayant pour centre l'orthocentre du triangle.

Ce dernier théorème a été donné pour la première fois par Steiner.

Lorsque deux triangles sont circonscrits à une conique, l'axe radical des cercles conjugués passe par le centre de la conique.

Lorsque deux triangles sont conjugués à une conique, l'axe radical des cercles circonscrits passe par le centre de la conique.

Lorsqu'une conique inscrite dans un triangle est conjuguée par rapport à un autre triangle, son centre appartient à l'axe radical du cercle conjugué au premier et du cercle circonscrit au second.

On pourra aussi énoncer des relations métriques évidentes :

Entre la distance d du centre d'une conique inscrite dans un triangle à l'orthocentre du triangle, le rayon ρ *du cercle conjugué au triangle et la somme* s^2 *des carrés des demi-axes de la conique, existe la relation*

$$d^2 = \rho^2 + s^2.$$

Entre la distance D *du centre d'une conique conjuguée à un triangle au centre du cercle circonscrit, le rayon* R *de ce cercle et la somme* s^2 *des carrés des demi-axes de la conique, existe la relation*

$$D^2 = R^2 + s^2.$$

En particulier, on aura des relations entre la distance du centre du cercle inscrit à l'orthocentre, le rayon r de ce cercle et le rayon ρ du cercle conjugué :

$$d^2 = \rho^2 + 2r^2,$$

entre la distance D de l'orthocentre au centre du cercle circonscrit, le rayon ρ et le rayon R du cercle circonscrit :

$$D^2 = R^2 + 2\rho^2.$$

Les propriétés connues des cercles orthogonaux donnent aussi quelques théorèmes relatifs aux cercles orthoptiques, par exemple :

Les polaires d'un point du cercle orthoptique d'une conique par rapport à tous les cercles circonscrits aux triangles conjugués et à tous les cercles conjugués aux triangles circonscrits passent par un même point, qui est le symétrique du point considéré par rapport au centre de la conique.

En appliquant les deux théorèmes fondamentaux au cercle, on retrouve des propriétés particulières de Géométrie élémentaire. Par exemple, la puissance de l'orthocentre par rapport au cercle circonscrit est égale au double du carré du rayon du cercle conjugué, c'est-à-dire que, si H est l'orthocentre, A un sommet, P le pied de la hauteur HA et R le point où cette hauteur rencontre le cercle circonscrit, on aura

$$HA \times HR = 2HA \times HP \qquad \text{ou} \qquad HR = 2HP,$$

c'est-à-dire que le symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté est situé sur le cercle circonscrit.

II. Deux coniques particulières, l'hyperbole équilatère et la parabole, ont des cercles orthoptiques particuliers. Celui de la première est réduit à un point, le centre de la courbe ; celui de la seconde est dégénéré en une droite, la directrice. Or, une circonférence qui coupe orthogonalement un cercle réduit à un point passe par ce point, et toute droite coupant orthogonalement un cercle est diamètre de ce cercle. De là la série des corollaires suivants déjà obtenus directement de tant de façons différentes, *mais qui ne sont que des conséquences très particulières d'un théorème général :*

Le cercle circonscrit à un triangle conjugué par rapport à une hyperbole équilatère passe par le centre de la courbe.

Le lieu des centres des hyperboles équilatères conjuguées à un triangle est le cercle circonscrit au triangle.

Le cercle conjugué à un triangle circonscrit à une hyperbole équilatère passe par le centre de la courbe.

Le lieu des centres des hyperboles équilatères inscrites dans un triangle est le cercle conjugué au triangle.

Les directrices des paraboles conjuguées à un tri-

angle passent par le centre du cercle circonscrit au triangle.

Le lieu des centres des cercles circonscrits aux triangles conjugués à une parabole est la directrice.

Les directrices des paraboles inscrites dans un triangle passent par l'orthocentre du triangle.

Le lieu des orthocentres des triangles circonscrits à une parabole est la directrice.

Il est bien connu que le lieu des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle est le cercle des neuf points du triangle. Cela provient encore de ce que les hyperboles équilatères circonscrites à un triangle sont conjuguées par rapport au triangle formé en joignant les pieds des hauteurs du premier. En effet, les hyperboles équilatères circonscrites au triangle ABC passent par l'orthocentre H. Soient P, R, K les pieds des trois hauteurs CH, AH, BH. La droite KR joignant les points d'intersection avec l'hyperbole des deux sécantes APB, PHC, est la polaire du point P. Le triangle PKR est conjugué à toutes les hyperboles équilatères du faisceau. D'où il résulte que les centres de ces hyperboles sont situés sur le cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs, qui n'est autre que le cercle des neuf points.

Ainsi, les théorèmes Faure conduisent immédiatement au lieu des centres des hyperboles équilatères inscrites, conjuguées et circonscrites à un triangle.

III. Si l'on assujettit les coniques inscrites ou conjuguées à un triangle à une autre condition, et qu'on détermine le lieu des centres de ces coniques, on connaîtra par cela même la déférente de l'anallagmatique enveloppe des cercles orthoptiques de ces coniques. Nous examinerons bientôt deux cas intéressants, celui des coniques circonscrites et inscrites à un quadrilatère, qui permettront de retrouver plusieurs théorèmes connus. Dans certains cas particuliers, la nature de la condition à laquelle seront assujetties les coniques inscrites ou conjuguées amènera à la fois la connaissance de l'enveloppe des cercles orthoptiques et du lieu de leurs centres, c'est-à-dire du lieu des centres des coniques.

Par exemple, si les cercles orthoptiques des coniques inscrites dans un triangle coupent orthogonalement un cercle fixe donné, il en résultera que ces cercles orthoptiques passeront par deux points fixes, les points de Poncelet relatifs au cercle donné et au cercle conjugué au triangle : le lieu des centres des coniques sera donc alors une droite. Plus particulièrement, supposons que l'on considère les coniques inscrites dans un triangle et vues d'un point fixe P sous un angle droit. Les cercles orthoptiques de ces coniques passant par un point fixe et coupant orthogonalement le cercle conjugué au triangle auront leurs centres situés sur une droite, l'axe radical du cercle-point P et du cercle conjugué, c'est-à-dire la droite équidistante du point P et de sa polaire par rapport au cercle conjugué. Tous ces cercles passeront donc par un second point fixe situé sur la droite PH (H désignant l'orthocentre du triangle), au point de rencontre de cette droite et de la polaire du point P par rapport au cercle conjugué. Il en résulte que les coniques inscrites dans un triangle et vues d'un point fixe P sous un angle droit sont vues d'un autre point fixe P' sous un angle droit; la droite PP' passe constamment par le centre du cercle conjugué, c'est-à-dire par l'orthocentre du triangle, et le produit $HP \times HP'$, puissance du centre du cercle conjugué par rapport aux cercles orthoptiques, qu'il coupe orthogonalement, est constant et égal au carré de son rayon (*Concours d'agrégation de* 1890).

Le théorème de M. Faure conduirait, par un raisonnement analogue, à des propriétés du même genre, de sorte qu'on peut énoncer la proposition suivante :

Les coniques $\left\{\begin{array}{l}\textit{inscrites}\\ \textit{conjuguées}\end{array}\right\}$ *à un triangle et vues d'un point fixe* P *sous un angle droit sont vues d'un autre point fixe* P' *sous un angle droit; lorsque le point* P *se déplace dans le plan, la droite* PP' *passe par un point fixe* $\left\{\begin{array}{l}\text{H, \textit{orthocentre du triangle}}\\ \text{O, \textit{centre du cercle circonscrit}}\end{array}\right\}$ *et le produit* $\left\{\begin{array}{l}\mathrm{HP}\times\mathrm{HP'}\\ \mathrm{OP}\times\mathrm{OP'}\end{array}\right\}$ *reste constant et égal au carré du rayon* $\left\{\begin{array}{l}\textit{du cercle conjugué}\\ \textit{du cercle circonscrit}\end{array}\right\}$.

IV. *Corollaires relatifs aux faisceaux de coniques.* — Toutes les coniques passant par quatre points fixes sont conjuguées au triangle obtenu par l'intersection des droites joignant ces points deux à deux : c'est le triangle diagonal du quadrangle. Les coniques d'un faisceau étant conjuguées par rapport à un triangle fixe, en appliquant le théorème de M. Faure, on obtient les corollaires suivants :

La somme des carrés des demi-axes d'une conique circonscrite à un quadrangle est égale à la puissance de son centre par rapport au cercle circonscrit au triangle diagonal.

Le lieu des centres des coniques passant par quatre points fixes et dont la somme des carrés des demi-axes est constante est un cercle.

L'axe radical des cercles orthoptiques relatifs à deux coniques quelconques d'un faisceau passe par un point fixe.

L'enveloppe des cercles orthoptiques des coniques *d'un faisceau est une anallagmatique ayant pour déférente la conique des neuf points du faisceau.*

Les directrices des deux paraboles circonscrites à un quadrangle passent par le centre du cercle circonscrit au triangle diagonal.

Il existe une hyperbole équilatère dans le faisceau. Son centre sera situé sur le cercle circonscrit au triangle diagonal. On retrouve ce théorème :

4. *Les quatre cercles des neuf points des quatre triangles ayant pour sommets trois des quatre points donnés se coupent en un même point situé sur le cercle circonscrit au triangle diagonal du quadrangle.*

Coniques tangentes à quatre droites. — Ces coniques sont toutes conjuguées par rapport au triangle formé par les diagonales du quadrilatère complet : c'est le triangle des diagonales.

Les corollaires des théorèmes 3 et 4 seront les suivants :

La somme des carrés des demi-axes d'une conique inscrite dans un quadrilatère est égale à la puissance de son centre par rapport au cercle circonscrit au triangle des diagonales.

Les cercles orthoptiques des coniques inscrites dans un quadrilatère coupent orthogonalement : 1° le cercle circonscrit au triangle des diagonales ; 2° les cercles conjugués aux quatre triangles formés par trois des quatre droites. Donc :

Dans un quadrilatère, le cercle circonscrit au triangle des diagonales et les cercles conjugués aux tri-

angles formés par trois des quatre côtés ont le même axe radical.

Les cercles orthoptiques des coniques inscrites dans un quadrilatère coupent orthogonalement des cercles ayant le même axe radical, il en résulte que le lieu de leurs centres est cet axe radical : donc le lieu des centres des coniques inscrites dans un quadrilatère est une droite.

L'axe radical commun des cercles orthoptiques est la droite joignant les orthocentres de deux des quatre triangles formés par les quatre côtés du quadrilatère : c'est donc la directrice de la parabole inscrite, cercle de rayon infini de la série. Les deux cercles de rayon nul de la série sont les cercles orthoptiques des deux hyperboles équilatères inscrites, c'est-à-dire les centres de ces hyperboles, qui sont les points communs au cercle circonscrit au triangle des diagonales et aux cercles conjugués aux quatre triangles formés par trois des quatre côtés. On retrouve ainsi la série des résultats suivants :

Les cercles orthoptiques des coniques inscrites dans un quadrilatère forment une famille de cercles, à laquelle appartiennent les cercles décrits sur les trois diagonales du quadrilatère comme diamètres, et qui ont deux à deux le même axe radical. Cet axe radical commun est la directrice de la parabole inscrite dans le quadrilatère, les deux cercles limites de la famille sont les centres des deux hyperboles équilatères inscrites. La série orthogonale a pour axe radical la droite de Newton ; elle renferme les cercles conjugués aux quatre triangles formés par trois des quatre côtés du quadrilatère et le cercle circonscrit au triangle des diagonales.

On sait que les coniques tangentes à une droite et conjuguées à un triangle sont tangentes à trois autres droites déterminées. Donc :

Les coniques conjuguées à un triangle et tangentes à une droite sont vues de deux points fixes sous des angles droits.

V. *Corollaires relatifs à une conique et à des triangles conjugués particuliers.* — En appliquant le théorème de M. Faure à des triangles conjugués particuliers, nous allons obtenir des propriétés intéressantes.

D'un point P, menons les deux tangentes PA, PB à une conique (c) de centre O. En prenant un point L sur AB, et en construisant sa polaire PM, on obtient un triangle conjugué PLM. Si le point L vient en A, les deux droites PL et PM sont confondues avec PA et le triangle conjugué est alors formé par la droite double PA et la polaire AB du point P. Le cercle circonscrit à ce triangle est le cercle passant en P et tangent au point A à la polaire AB. Son centre est à l'intersection de la perpendiculaire en A à AB et de la perpendiculaire au milieu de PA. De là les énoncés suivants :

Si d'un point P *on mène la tangente* PA *à une conique, le cercle* Σ *passant en* P *et tangent au point* A *à la polaire du point* P *coupe orthogonalement le cercle orthoptique de la conique. Si la conique est une hyperbole équilatère, ce cercle passe par le centre.*

Si d'un point P *on mène la tangente* PA *à une parabole, la perpendiculaire au milieu de* PA *et la perpendiculaire en* A *à la polaire du point* P *se coupent sur la directrice.*

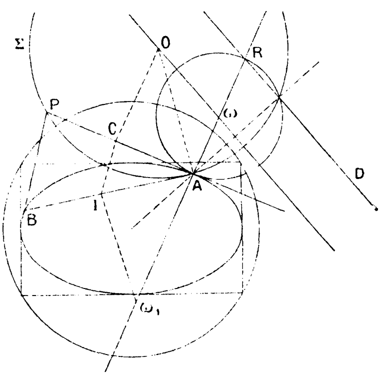
Si A *est un point d'une conique de centre* O, P *le pôle de la normale au point* A, I *le milieu de* AP, *on a* *la relation*

$$\overline{\mathrm{OI}}^2 - \overline{\mathrm{AI}}^2 = a^2 + b^2,$$

a et b étant les demi-axes de la conique, car, lorsque le point P est le pôle de la normale en A, le cercle Σ est le cercle de diamètre PA.

Supposons maintenant qu'un point P se déplace sur la tangente au point A d'une conique. Les cercles Σ passant en P et tangents en A à la polaire du point P coupent tous orthogonalement le cercle orthoptique, donc le lieu de leurs centres est l'axe radical du point A et du cercle orthoptique, c'est-à-dire la droite équidistante du point A et de sa polaire par rapport au cercle orthoptique. Soit ω le point de rencontre de cette droite avec la normale en A.

Fig. 1.



Le cercle de centre ω et de rayon ωA est tangent en A à la conique, c'est la position limite du cercle Σ lorsque le point P est venu se confondre avec le point A. Considérons maintenant le cercle ω_1 tangent en A à la conique et passant par le point B. Son centre est à l'intersection de la normale en A avec la perpendiculaire au milieu I de AB.

Les deux triangles AOC, $AI\omega_1$ sont semblables : on a la proportion

$$\frac{AO}{A\omega_1} = \frac{AC}{AI} = \frac{AP}{AB}.$$

Le rapport des rayons du cercle Σ et du cercle ω_1 est donc égal à $\frac{AP}{AB}$. Or, lorsque le point B est venu se confondre avec le point A, le cercle ω_1 est devenu le cercle osculateur en A, le cercle Σ est devenu le cercle ω. D'autre part, on a

$$\lim \frac{AP}{AB} = \frac{1}{2},$$

ce qui peut s'établir soit par des considérations de Géométrie infinitésimale, en remarquant que l'on a

$$\lim \frac{PA + PB}{AB} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim \frac{PA}{PB} = \lim \frac{\sin A}{\sin B} = 1,$$

soit encore de la façon suivante : Rapportée à la tangente et à la normale en A, la conique a pour équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dy = 0.$$

Soit $y = mx$ l'équation de AB. En faisant $y = mx$ dans l'équation, on a pour abscisse du point B

$$x = -\frac{2dm}{a + 2bm + cm^2},$$

donc

$$AB = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{-2dm}{a + 2bm + cm^2} \times \sqrt{1 + m^2}.$$

D'autre part, le point P, pôle de AB, a pour abscisse

$$AP = -\frac{dm}{a + bm},$$

donc

$$\frac{AP}{AB} = \frac{a + 2bm + cm^2}{2\sqrt{1 + m^2}(a + bm)}.$$

En faisant $m = 0$, on obtient

$$\lim \frac{AP}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi donc, le diamètre du cercle ω est égal au rayon du cercle osculateur au point A ; ce cercle ω coupe orthogonalement le cercle orthoptique. On peut énoncer les théorèmes suivants :

Le rayon de courbure en un point d'une conique est le double du rayon du cercle tangent en ce point à la conique et qui coupe orthogonalement le cercle orthoptique.

D'autre part, le point ω est le point de rencontre de la normale en A avec la droite équidistante du point A et de sa polaire par rapport au cercle orthoptique, de sorte qu'en portant $\omega R = A\omega$ sur la normale, le point R appartient à la polaire du point A, d'où ce théorème important :

Le rayon de courbure en un point d'une conique est égal à la distance de ce point à son conjugué harmonique par rapport aux points de rencontre de la normale avec le cercle orthoptique.

Dans le cas de l'hyperbole équilatère et de la parabole, on obtient les théorèmes suivants :

Les cercles tangents extérieurement à une hyperbole équilatère, et ayant pour diamètres les rayons de courbure aux points de contact passent par le centre de l'hyperbole.

Le lieu des centres des cercles tangents extérieurement à une parabole et ayant pour diamètres les rayons de courbure aux points de contact est la directrice.

Application à la construction du centre de courbure. — Pour avoir le centre de courbure en un point A d'une conique quelconque, il suffira, d'après ce qu'on a vu, de prendre l'intersection de la normale en A avec la polaire D du point A par rapport au cercle circonscrit au rectangle des axes, et de porter à partir de A, en sens inverse, une longueur égale à la distance du point à la polaire D.

Hyperbole équilatère. — La polaire du point A par rapport au cercle orthoptique, qui est réduit au centre de la courbe, est la droite OD perpendiculaire en O sur le rayon OA. On obtient la construction très simple suivante :

Pour avoir le centre de courbure ω *en un point* A *d'une hyperbole équilatère, prendre* $A\omega = AD$, D *étant le point de rencontre de la normale avec la perpendiculaire* OD *élevée du centre* O *sur le rayon* OA.

Parabole. — Son cercle orthoptique est la directrice, la polaire de A est la droite symétrique par rapport à la directrice. On retrouve immédiatement cette construction connue : *Porter sur la normale, à partir de* A, *une longueur double de la distance du point* A *à la directrice, comptée sur la normale.*

VI. Il est naturel de se demander si les théorèmes fondamentaux 1 et 2 transformés par dualité ne donneraient pas des énoncés intéressants. On obtient ainsi le théorème suivant :

3. *Étant données une conique* S *et deux droites* Δ,

Δ', si l'on considère la conique Σ enveloppe harmonique [1] *des coniques* S *et* (Δ, Δ') :

1° *Toute conique* Γ *inscrite dans un triangle quelconque conjugué par rapport à* S *et touchant les droites* Δ, Δ' *est telle que les points de contact d'une tangente commune à* Γ *et* Σ *forment une division harmonique avec les points de rencontre de cette tangente et des droites* (Δ, Δ');

2° *Toute conique* Γ_1 *conjuguée à un triangle inscrit dans* S *jouit de la même propriété.*

Dans le cas particulier où les droites (Δ, Δ') sont les droites isotropes issues d'un point F, on obtient les deux théorèmes suivants, qui sont corrélatifs des théorèmes de M. Faure :

6. *Si l'on considère les coniques* Γ *ayant pour foyers un point donné et inscrites dans les triangles conjugués à une conique* S, *les tangentes communes aux coniques* Γ *et à une conique fixe* Σ *ayant avec elles un foyer commun, et qui est l'enveloppe des cordes de* S *vues du point* F *sous un angle droit, sont telles que les droites joignant* F *aux points de contact de la tangente commune avec* Σ *et* Γ *sont rectangulaires.*

Les coniques Γ_1 *ayant pour foyer le point* F *et conjuguées aux triangles inscrits dans* S *jouissent de la même propriété.*

On doit à M. Picquet cette propriété que les cercles principaux de deux coniques confocales dont une tangente commune est vue du foyer commun sous un angle droit se coupent orthogonalement. En s'appuyant sur

---

[1] Nous appelons *enveloppe harmonique* de deux coniques S, S_1 la conique enveloppe des sécantes divisant harmoniquement S et S_1.

cette propriété et sur le théorème Faure transformé par polaires réciproques, M. Picquet (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. V) a démontré un théorème proposé par M. Mannheim dans les termes suivants :

Si d'un point quelconque on abaisse les perpendiculaires sur les côtés d'un triangle conjugué à une conique, les cercles circonscrits aux triangles formés en joignant les pieds de ces perpendiculaires ont même centre radical.

Le théorème de M. Picquet sur les cercles principaux de deux coniques confocales, dont la démonstration géométrique est très simple, et le théorème corrélatif du théorème Faure, combinés, conduisent, comme on le voit facilement, à la solution immédiate de la question précédente. La propriété intéressante énoncée par M. Mannheim peut donc être considérée comme une conséquence du théorème de M. Faure. Nous allons en étudier les corollaires, après avoir fait quelques remarques préliminaires.

Observons d'abord que le cercle fixe, que tous les cercles (C) circonscrits aux triangles formés par les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point P sur les côtés d'un triangle conjugué quelconque coupent orthogonalement, est le cercle principal de la conique Σ enveloppe des cordes de la conique S vues du point P sous un angle droit. Nous allons déterminer la nature de cette conique Σ dans divers cas particuliers. Pour cela, transformons par polaires réciproques la propriété du cercle orthoptique d'être le lieu des sommets des angles droits circonscrits, en prenant pour cercle directeur :

1° Un cercle ayant son centre P sur le cercle orthoptique. Alors la transformée de la conique est une hyperbole équilatère, et la transformée du cercle orthoptique est une parabole de foyer P. La conique Σ, dans le cas de l'hyperbole équilatère, est une parabole. Le cercle principal étant une droite, la tangente au sommet, on peut énoncer le théorème suivant :

Tous les cercles (C), *circonscrits aux triangles obtenus en joignant les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe* P *sur les côtés d'un triangle quelconque conjugué à une hyperbole équilatère ont leurs centres en ligne droite.*

2° Prenons pour cercle directeur un cercle ayant son centre au foyer. Alors la transformée de la conique est un cercle (O), la transformée du cercle orthoptique est une conique ayant pour foyers le centre du cercle directeur et le centre du cercle (O). Donc l'enveloppe des cordes d'un cercle vues d'un point fixe P sous un angle droit est une conique ayant pour foyers ce point et le centre O du cercle. Le cercle principal de cette conique a pour centre le milieu de PO. Il en résulte que *tous les cercles* (C), *circonscrits aux triangles obtenus en joignant les pieds des perpendiculaires menées d'un point fixe* P *sur les côtés d'un triangle quelconque conjugué à un cercle, ont pour centre radical le milieu de* PH, H *étant l'orthocentre fixe de tous ces triangles.*

Si le point P est pris sur le cercle circonscrit à un triangle conjugué, le cercle (C) est une droite (la droite de Simson) ; cette droite, devant couper orthogonalement un cercle ayant son centre au milieu de PH, passera par le centre de ce cercle ; on retrouve cette propriété :

La droite de Simson relative à un point P *du cercle circonscrit à un triangle est à égale distance de ce point et de l'orthocentre du triangle.*

Si le point P est au centre du cercle O, la conique enveloppe Σ est devenue un cercle de centre O, ayant pour rayon $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. Puisque le point O est l'orthocentre de chaque triangle conjugué, les cercles (C) sont les cercles des neuf points de ces triangles; donc :

Les cercles des neuf points des triangles conjugués à un cercle de rayon R *coupent orthogonalement le cercle concentrique de rayon* $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Supposons maintenant que, pour une conique quelconque, le point P soit situé sur la conique. Alors la conique Σ doit être considérée comme formée par deux points, le point P et le point de Frégier I relatif à P. Le cercle principal de cette conique est le cercle de diamètre PI; donc :

Si d'un point d'une conique on abaisse les perpendiculaires sur les côtés d'un triangle conjugué, le cercle circonscrit au triangle formé par les pieds de ces perpendiculaires coupe orthogonalement le cercle de diamètre PI, I *étant le point de Frégier relatif au point* P.

En particulier, les axes de la conique forment avec la droite de l'infini un triangle conjugué. Donc, si l'on joint les pieds des perpendiculaires menées d'un point d'une conique sur les axes, cette droite passe par le milieu de la distance du point à son point de Frégier. Quand le point P est quelconque dans le plan, la droite joignant ses projections sur les axes contient encore le centre radical commun de tous les cercles (C).

Dans le cas du cercle, on a la proposition suivante :

Si d'un point quelconque P *du cercle conjugué à un* *triangle on abaisse les perpendiculaires sur les côtés du triangle, le cercle* (C) *circonscrit au triangle formé par les pieds de ces perpendiculaires coupe orthogonalement le cercle de diamètre* PH, H *étant l'orthocentre du triangle.*

Dans le cas de la parabole, le point de Frégier est, sur la normale, à la même distance de l'axe que le point P; donc la circonférence que les cercles (C) coupent orthogonalement a son centre sur l'axe.

Dans le cas de l'hyperbole équilatère, le point de Frégier est à l'infini sur la normale; donc :

Les cercles circonscrits aux triangles formés par les projections orthogonales d'un point P *d'une hyperbole équilatère sur les côtés d'un triangle conjugué quelconque ont leurs centres sur la tangente en* P *à l'hyperbole.*

Tout ce qui précède est relatif aux applications du premier des théorèmes 6. Le second théorème pourra encore s'énoncer ainsi :

7. *Les cercles principaux des coniques ayant pour foyer un point donné et conjuguées aux triangles inscrits dans une autre conique ont même centre radical.*

Ce centre radical est le centre de la conique Σ enveloppe des cordes de la conique donnée vues du point fixe sous un angle droit. Étant donné un triangle, il existe toujours une conique conjuguée à ce triangle et ayant pour foyer un point déterminé. De là le théorème suivant :

Si l'on considère un réseau de coniques ayant trois points communs, et les coniques Σ *enveloppes des cordes* *de chacune d'elles vues d'un même point fixe* P *sous un angle droit, les cercles principaux des coniques* Σ *coupent orthogonalement un même cercle fixe.*

Ce cercle fixe est le cercle principal de la conique ayant son foyer en P et conjuguée au triangle formé par les trois points communs aux coniques du réseau.

Le théorème 7 permet de retrouver certaines propositions particulières. Ainsi, considérons une parabole conjuguée à un triangle. Soit F son foyer. Le cercle principal de cette parabole, c'est-à-dire sa tangente au sommet, coupe orthogonalement le cercle principal de la conique enveloppe des cordes du cercle circonscrit au triangle vues du point F sous un angle droit. Si O est le centre du cercle circonscrit au triangle, ce cercle principal a son centre au milieu de FO.

Donc la tangente au sommet de la parabole passe par le milieu de FO, c'est-à-dire que la directrice passe en O.

Ce théorème permet encore d'obtenir certaines relations métriques. Étant donnés un cercle O, de rayon R, et un point P à la distance d du centre, on trouve facilement que le rayon du cercle principal de la conique Σ, enveloppe des cordes de O vues du point P sous un angle droit, a pour valeur $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - d^2}$.

Considérons alors les coniques d'un faisceau, elles sont toutes conjuguées au triangle diagonal du quadrangle. Soient ω le centre du cercle circonscrit à ce triangle et R son rayon, S une conique quelconque du faisceau, F un de ses foyers, O son centre. En appelant δ la distance du centre O au milieu de $F\omega$, d la distance $F\omega$ et a le demi-axe de la conique S, on aura la relation

$$\delta^2 = \frac{2R^2 - d^2}{4} + a^2.$$

En terminant cette étude déjà longue des conséquences du théorème de M. Faure, notre désir est d'avoir réussi à montrer que ce beau théorème doit être considéré comme une proposition de premier ordre dans la théorie des coniques.

NOTES.

1. Nous avons appelé théorèmes de M. Faure les deux théorèmes 1 et 2 (en prenant pour points A et B les ombilics du plan), parce que le second, qui est tout aussi important, se déduit immédiatement du premier. On pourra les distinguer l'un de l'autre en disant : premier et second théorème de Faure, ou encore : le théorème relatif aux coniques conjuguées et le théorème relatif aux coniques inscrites à un triangle.

2. Voici comment on peut établir géométriquement le premier théorème de Faure. C'est la démonstration que nous avons donnée ailleurs de la proposition générale, mais simplifiée.

Lemme I. — *L'enveloppe des droites divisant harmoniquement deux coniques est une conique.*

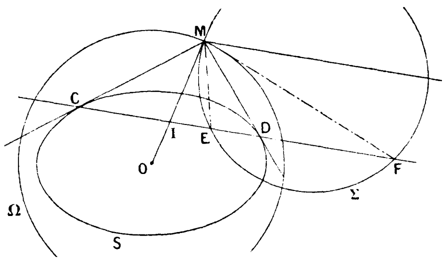
Ce théorème bien connu s'établit facilement dans le cas de deux cercles, et on l'étend à deux coniques par projection.

Lemme II. — *Lorsqu'un cercle* (C) *est circonscrit à un triangle conjugué à une conique* (S), *la polaire d'un point quelconque du cercle par rapport à la conique est divisée harmoniquement par les deux courbes.*

On sait que ce théorème est vrai pour une conique quelconque. En s'appuyant sur le lemme précédent, la démonstration est très simple. En effet, les polaires de cinq points du cercle (les trois sommets du triangle conjugué et deux des points d'intersection du cercle et de la conique) par rapport à la conique sont divisées harmoniquement par les deux courbes. Donc cinq tangentes à la conique Γ enveloppe harmonique de (C) et (S) ont leurs pôles par rapport à (S) situés sur (C); (C) est donc la polaire réciproque de (S) par rapport à Γ. Il en résulte que la polaire d'un point quelconque de (C) par rapport à (S) étant tangente à Γ est divisée harmoniquement par (C) et (S).

Soient maintenant M un point de rencontre du cercle orthoptique Ω d'une conique S avec un cercle Σ circonscrit à un triangle conjugué, MC, MD les tangentes menées de M à S; elles sont rectangulaires, et la droite CD étant la polaire du point M, MO rencontre CD

Fig. 2.



en son milieu I. Soient E et F les points d'intersection de CD avec le cercle Σ. Les deux droites (ME, MF) et les droites isotropes issues de M sont conjuguées par rapport au couple (MC, MD). Donc (théorème de Frégier généralisé) le point de rencontre de EF avec la droite de l'infini appartient à la conjuguée de la tangente en M à Σ par rapport aux rayons doubles (MC, MD) du faisceau involutif; c'est-à-dire que, si l'on mène par M la parallèle à EF, la tangente en M au cercle Σ sera la conjuguée de cette parallèle par rapport aux droites (MC, MD). Mais cette conjuguée est la médiane du triangle MCD issue de M, c'est-à-dire la droite MIO. Les deux cercles Σ et Ω se coupent donc orthogonalement, puisque la tangente en un point d'intersection à l'un des cercles passe par le centre de l'autre.

RECHERCHES SUR LES COURBES PLANES DU QUATRIÈME ORDRE;

PAR M. MODESTE POSTNICOFF,
Professeur de Mathématiques au Gymnase d'Astrakan.

---

1. Démontrons d'abord le théorème algébrique suivant :

Si quatre équations du premier degré

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0,$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0,$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0,$$
$$a_{41}x + a_{42}y + a_{43} = 0$$

sont satisfaites par le même système de quantités x, y, finies, déterminées et différentes de zéro, les coefficients de ces équations satisfont aux relations suivantes

$$|a_{ik}| = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3 \end{pmatrix},$$

$$|a_{ik}| = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 4 \\ k = 1, 2, 3 \end{pmatrix},$$

$$|a_{ik}| = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 3, 4 \\ k = 1, 2, 3 \end{pmatrix},$$

$$|a_{ik}| = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 2, 3, 4 \\ k = 1, 2, 3 \end{pmatrix}.$$

Supposons, en effet, que x et y soient les racines du système des équations données; alors il est évident que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

se réduit à zéro, puisque tous les éléments de la première colonne s'annulent. En ajoutant aux éléments de la première colonne les éléments correspondants de la deuxième, multipliés par $-y$, et ceux de la troisième, multipliés par -1, et en supprimant le facteur différent de zéro, nous obtenons

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

On déduit de la même manière les trois autres relations entre les coefficients.

Admettons, maintenant, réciproquement, que les quantités $a_{ik}\begin{pmatrix} i = 1, 2, 3, 4 \\ k = 1, 2, 3 \end{pmatrix}$ satisfassent aux relations

$$|a_{ik}| = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3 \end{pmatrix},$$

$$|a_{ik}| = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 4 \\ k = 1, 2, 3 \end{pmatrix},$$

$$|a_{ik}| = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 3, 4 \\ k = 1, 2, 3 \end{pmatrix},$$

$$|a_{ik}| = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 2, 3, 4 \\ k = 1, 2, 3 \end{pmatrix},$$

et que deux équations quelconques du système

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0,$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0,$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0,$$
$$a_{41}x + a_{42}y + a_{43} = 0$$

puissent être satisfaites par un système de quantités x_1, y_1, finies, déterminées et différentes de zéro. Alors je dis que les quantités x_1, y_1 doivent satisfaire aussi à deux autres équations du système donné. Posons, en effet, que les équations

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0,$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0$$

soient satisfaites par un système de quantités

$$x = x_1 = \frac{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}},$$
$$y = y_1 = \frac{a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

En prenant dans ce cas le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

ajoutons aux éléments de la première colonne les éléments correspondants de la deuxième, multipliés par y_1, et ceux de la troisième; nous obtenons alors

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= (a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Mais comme, par hypothèse, le déterminant

$$(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

ne se réduit pas à zéro, on aura

$$a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33} = 0.$$

On trouvera, d'une manière toute semblable, que

$$a_{41}x_1 + a_{42}y_1 + a_{43} = 0.$$

2. L'équation générale des courbes du quatrième ordre contient quinze paramètres arbitraires et peut être mise sous la forme suivante

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{P}_1 x''^4 + 2\mathrm{P}_2 x''^3 y'' + 2\mathrm{P}_3 x''^2 y''^2 + 2\mathrm{P}_4 x'' y''^3 \\ \quad + \mathrm{P}_5 y''^4 + \mathrm{Q}_1 x''^3 + \mathrm{Q}_2 x''^2 y'' + \mathrm{Q}_3 x'' y''^2 + \mathrm{Q}_4 y''^3 \\ \quad + \mathrm{R}_1 x''^2 + \mathrm{R}_2 x'' y'' + \mathrm{R}_3 y''^2 + \mathrm{S}_1 x'' + \mathrm{S}_2 y'' + \mathrm{T} = 0. \end{array}\right.$$

En admettant les axes rectangulaires, considérons à quelle forme se réduit cette équation, supposé que la courbe ait un centre et que l'on transporte l'origine des coordonnées au centre de la courbe. Représentons le premier membre de l'équation (I) par $f(x'', y'')$; en transportant l'origine des coordonnées au point $\mathrm{M}(a, b)$ du plan et en nommant x', y' les coordonnées d'un point quelconque de la courbe par rapport aux nouveaux axes rectangulaires, parallèles aux premiers et ayant pour origine le point M, nous trouvons

$$\begin{gathered} x'' = a + x', \\ y'' = b + y', \\ f(x'', y'') = f(a + x', b + y') = 0. \end{gathered}$$

Désignons maintenant par $\frac{d f(a, b)}{dx''}$ la dérivée partielle $\frac{df}{dx'}$ où l'on remplace après la différentiation les variables x'', y'' par a, b; par $\frac{d^2 f(a, b)}{dx''\,dy''}$ la dérivée $\frac{d^2 f}{dx''\,dy''}$ dans laquelle on a aussi mis a et b à la place de

x'' et y'' et ainsi de suite. Alors, d'après le théorème de Taylor, nous obtiendrons

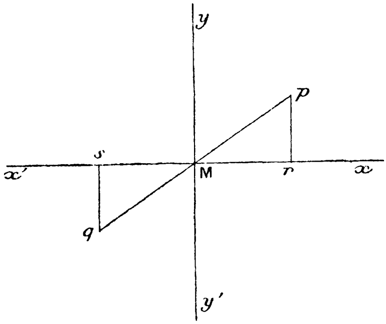
$$(\mathrm{II})\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{24}\,\frac{d^4 f(a,b)}{dx''^4}x'^4+\frac{1}{6}\,\frac{d^4 f(a,b)}{dx''^3\,dy''}x'^3y'\\
&+\frac{1}{4}\,\frac{d^4 f(a,b)}{dx''^2\,dy''^2}x'^2y'^2+\frac{1}{6}\,\frac{d^4 f(a,b)}{dx''\,dy''^3}x'y'^3\\
&+\frac{1}{24}\,\frac{d^4 f(a,b)}{dy''^4}y'^4+\frac{1}{6}\,\frac{d^3 f(a,b)}{dx''^3}x'^3\\
&+\frac{1}{2}\,\frac{d^3 f(a,b)}{dx''^2\,dy''}x'^2y'+\frac{1}{2}\,\frac{d^3 f(a,b)}{dx''\,dy''^2}x'y'^2\\
&+\frac{1}{6}\,\frac{d^3 f(a,b)}{dy''^3}y'^3+\frac{1}{2}\,\frac{d^2 f(a,b)}{dx''^2}x'^2\\
&+\frac{d^2 f(a,b)}{dx''\,dy''}x'y'+\frac{1}{2}\,\frac{d^2 f(a,b)}{dy''^2}y'^2\\
&+\frac{d f(a,b)}{dx''}x'+\frac{d f(a,b)}{dy''}y'+f(a,b)=0.
\end{aligned}\right.$$

Représentons-nous que l'origine M des coordonnées se confonde avec le centre de la courbe; menons par le point M une droite dont la direction est arbitraire et supposons que p et q en soient les deux points d'intersection avec la courbe exprimée par l'équation (II). En général, la droite passant par l'origine des coordonnées peut couper la courbe du quatrième ordre en quatre points; mais, en supposant que l'origine des coordonnées se confonde avec le centre de la courbe, nous en concluons qu'à chaque point p de la courbe, pris arbitrairement, correspond un autre point q de manière que $\mathrm{M}p = \mathrm{M}q$. Mais dans ce cas les abscisses et les ordonnées des points d'intersection p et q doivent être aussi égales avec les signes contraires.

Effectivement, en abaissant les perpendiculaires pr et sq (*fig.* 1) sur les axes des coordonnées, nous obtenons les triangles rectangles $pr\mathrm{M}$ et $qs\mathrm{M}$, qui sont évidemment égaux; et, par conséquent, en désignant pr par y'

et Mr par x', on trouve que les coordonnées du point q sont $-x'$, $-y'$. D'où l'on conclut que, si la courbe du quatrième ordre a le centre M, qui se confond avec l'origine des coordonnées, et que si x', y' sont les coordonnées

Fig. 1.



d'un point quelconque de la courbe, les quantités $-x'$, $-y'$ déterminent aussi un point de la courbe et satisfont à son équation. Supposons maintenant, réciproquement, que, quelle que soit la droite pq passant par l'origine M des coordonnées, les abscisses et les ordonnées de chaque couple des points de son intersection avec la courbe soient des quantités successivement égales avec les signes contraires et que, par exemple, le point p soit déterminé par les coordonnées x', y', étant $-x'$, $-y'$ celles du point q. Dans ce cas il est évident que la courbe a un centre, qui se confond avec l'origine des coordonnées. En abaissant, en effet, les perpendiculaires pr et qs (*fig.* 1) sur les axes, nous obtiendrons deux triangles prM et qsM; puisque les cathètes de l'un d'eux sont égales à celles de l'autre, les triangles mêmes sont égaux; d'où il suit que la droite pq, menée par l'origine des coordonnées, se coupe par ce point en deux parties égales. Donc les points d'intersection d'une droite quelconque, menée par l'origine des coordonnées, avec la courbe du quatrième ordre, sont symétriques deux à deux par rapport au point M; par conséquent, l'origine des coordonnées se confond avec le centre de la courbe.

3. Supposons, maintenant, qu'on ait

$$\text{(III)} \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{df(a,b)}{dx''} = 0, & \dfrac{df(a,b)}{dy''} = 0, & \dfrac{d^3 f(a,b)}{dx''^3} = 0, \\ \dfrac{d^3 f(a,b)}{dx''\, dy''^2} = 0, & \dfrac{d^3 f(a,b)}{dx''^2\, dy''} = 0, & \dfrac{d^3 f(a,b)}{dy''^3} = 0. \end{array} \right.$$

Alors je dis que la courbe du quatrième ordre a un centre, qui se confond avec l'origine des coordonnées et dont les coordonnées par rapport aux anciens axes sont a et b. En effet, quel que soit le système de quantités x', y', satisfaisant à l'équation (II), celle-ci sera satisfaite en remplaçant x' par $-x'$ et y' par $-y'$, de sorte que le point $(-x', -y')$ appartient aussi à la courbe. Réciproquement, pour qu'un point (a, b) du plan soit le centre de la courbe du quatrième ordre, il faut et il suffit qu'après avoir transporté les axes parallèlement à eux-mêmes et de sorte que l'origine des coordonnées se déplace au point (a, b), chaque système de quantités $-x'$, $-y'$ satisfasse à l'équation (II), si celui des quantités x', y' lui satisfait, car, s'il en était autrement, les points de la courbe ne seraient pas symétriques par rapport au point M; et dans ce cas il est nécessaire que les quantités a et b satisfassent à toutes les conditions du système (III). Par conséquent les équations (III) expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que le point M, auquel on transporte l'origine des coordonnées, soit le centre de la courbe. Ces conditions peuvent être écrites de la manière suivante :

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} 4P_1a^3 + 6P_2a^2b + 4P_3ab^2 + 2P_4b^3 + 3Q_1a^2 + 2Q_2ab \\ \qquad + Q_3b^2 + 2R_1a + R_2b + S_1 = 0, \end{cases}$$

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} 2P_2a^3 + 4P_3a^2b + 6P_4ab^2 + 4P_5b^3 + Q_2a^2 + 2Q_3ab \\ \qquad + 3Q_4b^2 + R_2a + 2R_3b + S_2 = 0, \end{cases}$$

$$\text{(VI)} \quad \begin{cases} 4P_1a + 2P_2b + Q_1 = 0, \\ 6P_2a + 4P_3b + Q_2 = 0, \\ 4P_3a + 6P_4b + Q_3 = 0, \\ 2P_4a + 4P_5b + Q_4 = 0. \end{cases}$$

En déterminant Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 des quatre équations dernières et en mettant les valeurs obtenues dans les deux premières, on trouve

$$4P_1a^3 + 6P_2a^2b + 4P_3ab^2 + 2P_4b^3 = \frac{2R_1a + R_2b + S_1}{2},$$

$$2P_2a^3 + 4P_3a^2b + 6P_4ab^2 + 4P_5b^3 = \frac{R_2a + 2R_3b + S_2}{2}.$$

Ainsi les équations (IV) et (V), prises à considération les conditions (VI), prennent la forme suivante :

$$(1) \quad 6Q_1a^2 + 4Q_2ab + 2Q_3b^2 + 6R_1a + 3R_2b + 3S_1 = 0,$$

$$(2) \quad 6Q_4b^2 + 4Q_3ab + 2Q_2a^2 + 6R_3b + 3R_2a + 3S_2 = 0.$$

Or, pour que les valeurs a et b, tirées de deux équations quelconques du système (VI), satisfassent aux autres équations de ce système, c'est-à-dire que quatre équations simultanées du système (VI) puissent être satisfaites d'un même système de quantités a et b, il faut et il suffit, comme nous l'avons déjà vu, que les coefficients P_1, P_2, ..., Q_1, Q_2, ... remplissent ces quatre relations

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} 2P_1 & P_2 & Q_1 \\ 3P_2 & 2P_3 & Q_2 \\ 2P_3 & 3P_4 & Q_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} 2P_1 & P_2 & Q_1 \\ 3P_2 & 2P_3 & Q_2 \\ P_4 & 2P_5 & Q_4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} 2P_1 & P_2 & Q_1 \\ 2P_3 & 3P_4 & Q_3 \\ P_4 & 2P_5 & Q_4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} 3P_2 & 2P_3 & Q_2 \\ 2P_3 & 3P_4 & Q_3 \\ P_4 & 2P_5 & Q_4 \end{vmatrix} = 0.$$

En résumé, si les coefficients de l'équation de la courbe satisfont aux relations (3), (4), (5) et (6), et si, en outre, les valeurs de a et b tirées de deux équations quelconques du système (VI) rendent les égalités (1) et (2) identiques, le point (a, b) sera le centre de la courbe du quatrième ordre. Maintenant se présente une question : les conditions dont nous nous sommes occupés, nécessaires et suffisantes pour que la courbe ait un centre, confondant avec l'origine des coordonnées, sont-elles de même suffisantes pour que le lieu géométrique, exprimé par l'équation du quatrième degré, ait deux axes de symétrie perpendiculaires l'un à l'autre? Il est aisé de voir qu'elles ne le sont pas.

Représentons-nous, en effet, que l'équation du quatrième degré exprime un système de deux ellipses ou, en général, un système de deux coniques ayant le centre commun, mais choisies arbitrairement et situées d'une manière arbitraire. Il est clair que les conditions de l'existence du centre peuvent être satisfaites dans ce cas, mais néanmoins le lieu géométrique exprimé par l'équation du quatrième degré, en général, dans le cas considéré n'a pas deux axes de symétrie. Par conséquent il faut déduire quelques conditions supplémentaires, nécessaires et suffisantes pour que la courbe du quatrième ordre ait les axes énoncés de symétrie.

Trouvons ces conditions supplémentaires.

4. L'équation de la courbe du quatrième ordre, dont le centre se confond avec l'origine des coordonnées, devient

$$(\mathrm{VII})\ \left\{\begin{array}{l} P_1 x'^4 + 2P_2 x'^3 y' + 2P_3 x'^2 y'^2 + 2P_4 x' y'^3 \\ \qquad + P_5 y'^4 + M_1 x'^2 + M_2 x' y' + M_3 y'^2 + f(a, b) = 0 \end{array}\right.$$

ou

$$M_1 = \frac{1}{2}\,\frac{d^2 f(a, b)}{dx''^2},$$

$$M_2 = \frac{d^2 f(a, b)}{dx''\,dy''},$$

$$M_3 = \frac{1}{2}\,\frac{d^2 f(a, b)}{dy''^2}.$$

Tournons maintenant les axes des coordonnées autour du point M à angle α; alors les coordonnées anciennes du point quelconque s'exprimeront au moyen des nouvelles coordonnées x, y du même point de la manière suivante :

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$

$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Par conséquent l'équation de la courbe par rapport aux nouveaux axes sera

$$
\text{(VIII)}\quad
\left\{
\begin{aligned}
&[P_1 \cos^4\alpha + 2P_2 \sin\alpha \cos^3\alpha + 2P_3 \sin^2\alpha \cos^2\alpha \\
&\qquad\qquad + 2P_4 \sin^3\alpha \cos\alpha + P_5 \sin^4\alpha]x^4 \\
&+ [2P_2 \cos^4\alpha + 4(P_3 - P_1) \sin\alpha \cos^3\alpha \\
&\quad + 6(P_4 - P_2) \sin^2\alpha \cos^2\alpha \\
&\quad + 4(P_5 - P_3) \sin^3 \cos\alpha - 2P_4 \sin^4\alpha]x^3y \\
&+ [2P_3 \cos^4\alpha + 6(P_4 - P_2) \sin\alpha \cos^3\alpha \\
&\quad + 2(3P_5 - 4P_3 + 3P_1) \sin^2\alpha \cos^2\alpha \\
&\qquad\quad + 6(P_2 - P_4) \sin^3\alpha \cos\alpha + 2P_3 \sin^4\alpha]x^2y^2 \\
&+ [2P_4 \cos^4\alpha + 4(P_5 - P_3) \sin\alpha \cos^3\alpha \\
&\quad + 6(P_2 - P_4) \sin^2\alpha \cos^2\alpha \\
&\quad + 4(P_3 - P_1) \sin^3\alpha \cos\alpha - 2P_2 \sin^4\alpha]xy^3 \\
&+ [P_5 \cos^4\alpha - 2P_4 \sin\alpha \cos^3\alpha \\
&\quad + 2P_3 \sin^2\alpha \cos^2\alpha - 2P_2 \sin^3\alpha \cos\alpha + P_1 \sin^4\alpha]y^4 \\
&+ [M_1 \cos^2\alpha + M_2 \sin\alpha \cos\alpha + M_3 \sin^2\alpha]x^2 \\
&+ [M_2 \cos^2\alpha - 2(M_1 - M_3) \sin\alpha \cos\alpha - M_2 \sin^2\alpha]xy \\
&\qquad + [M_3 \cos^2\alpha - M_2 \sin\alpha \cos\alpha + M_1 \sin^2\alpha]y^2 + f(a, b) = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Cette équation peut s'écrire encore de la façon suivante

$$
\text{(IX)}\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\cos^4\alpha[P_1 + 2P_2 \operatorname{tang}\alpha \\
&\qquad\quad + 2P_3 \operatorname{tang}^2\alpha + 2P_4 \operatorname{tang}^3\alpha + P_5 \operatorname{tang}^4\alpha]x^4 \\
&\;+ \cos^4\alpha[2P_2 + 4(P_3 - P_1) \operatorname{tang}\alpha + 6(P_4 - P_2) \operatorname{tang}^2\alpha \\
&\qquad\qquad\qquad + 4(P_5 - P_3) \operatorname{tang}^3\alpha - 2P_4 \operatorname{tang}^4\alpha]x^3y \\
&\;+ \cos^4\alpha[2P_3 + 6(P_4 - P_2) \operatorname{tang}\alpha \\
&\qquad\qquad + 2(3P_5 - 4P_3 + 3P_1) \operatorname{tang}^2\alpha \\
&\qquad\qquad - 6(P_4 - P_2) \operatorname{tang}^3\alpha + 2P_3 \operatorname{tang}^4\alpha]x^2y^2 \\
&\;+ \cos^4\alpha[2P_4 + 4(P_5 - P_3) \operatorname{tang}\alpha - 6(P_4 - P_2) \operatorname{tang}^2\alpha \\
&\qquad\qquad\qquad + 4(P_3 - P_1) \operatorname{tang}^3\alpha - 2P_2 \operatorname{tang}^4\alpha]xy^3 \\
&\;+ \cos^4\alpha[P_5 - 2P_4 \operatorname{tang}\alpha \\
&\qquad\qquad + 2P_3 \operatorname{tang}^2\alpha - 2P_2 \operatorname{tang}^3\alpha + P_1 \operatorname{tang}^4\alpha]y^4 \\
&\;+ \cos^2\alpha[M_1 + M_2 \operatorname{tang}\alpha + M_3 \operatorname{tang}^2\alpha]x^2 \\
&\;+ \cos^2\alpha[M_2 - 2(M_1 - M_3) \operatorname{tang}\alpha - M_2 \operatorname{tang}^2\alpha]xy \\
&\qquad + \cos^2\alpha[M_3 - M_2 \operatorname{tang}\alpha + M_1 \operatorname{tang}^2\alpha]y^2 + f(a, b) = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Proposons-nous de déterminer l'angle α de sorte que les coefficients des termes, contenant x^3y, xy^3 et xy, s'annulent simultanément au changement des axes considéré. En égalant à zéro le coefficient de xy dans l'équation (VIII), il vient

$$M_2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2(M_1 - M_3)\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

d'où

$$(7) \qquad \operatorname{tang} 2\alpha = \frac{M_2}{M_1 - M_3}.$$

Il est aisé de voir que l'angle α, auquel il faut tourner les axes pour que le coefficient de xy dans l'équation transformée s'annule, on peut toujours le supposer aigu. Effectivement, $\cos\alpha$ étant différent de zéro, pour que le coefficient de xy dans l'équation (IX) s'annule, il faut poser

$$\operatorname{tang}^2\alpha - 2\left(\frac{M_3 - M_1}{M_2}\right)\operatorname{tang}\alpha - 1 = 0,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{(M_3 - M_1) \pm \sqrt{(M_1 - M_3)^2 + M_2^2}}{M_2}.$$

Si $M_2 < 0$, quel que soit le signe de la quantité $(M_3 - M_1)$, en prenant le radical avec le signe $-$, c'est-à-dire en posant

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{(M_3 - M_1) - \sqrt{(M_1 - M_3)^2 + M_2^2}}{M_2},$$

nous obtiendrons $\operatorname{tang}\alpha > 0$, car la valeur absolue du radical surpasse celle de la quantité $(M_3 - M_1)$.

Si, au contraire, $M_2 > 0$, quel que soit le signe de la différence $(M_3 - M_1)$, en prenant le radical avec le signe $+$, c'est-à-dire en posant

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{(M_3 - M_1) + \sqrt{(M_1 - M_3)^2 + M_2^2}}{M_2},$$

nous aurons ainsi $\operatorname{tang}\alpha > 0$.

5. En désignant maintenant par α cet angle aigu, auquel il faut tourner les axes pour que le terme con-

tenant xy s'annule, considérons à quelles relations doivent satisfaire les coefficients P_1, $2P_2$, ..., M_1, M_2, M_3 pour que les termes de l'équation transformée, contenant x^3y et xy^3, s'annulent aussi. Posons

$$\begin{aligned}
K_1 = 2P_2 + 4(P_3 - P_1)\operatorname{tang}\alpha + 6(P_4 - P_2)\operatorname{tang}^2\alpha \\
+ 4(P_5 - P_3)\operatorname{tang}^3\alpha - 2P_4\operatorname{tang}^4\alpha, \\
K_2 = 2P_4 + 4(P_5 - P_3)\operatorname{tang}\alpha - 6(P_4 - P_2)\operatorname{tang}^2\alpha \\
+ 4(P_3 - P_1)\operatorname{tang}^3\alpha - 2P_2\operatorname{tang}_4\alpha);
\end{aligned}$$

pour qu'à la valeur considérée de α les quantités K_1 et K_2 s'annulent, il faut et il suffit que leur somme et leur différence soient égales à zéro. En retranchant K_2 de K_1, égalant à zéro la différence ainsi obtenue, après l'avoir multipliée par $\cos^4\alpha$, nous trouvons

$$\begin{aligned}
2(\sin^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha)(P_2 - P_4) \\
+ (4\sin^3\alpha\cos\alpha - 4\sin\alpha\cos^3\alpha)(P_1 - 2P_3 + P_5) = 0
\end{aligned}$$

ou

$$2\cos 4\alpha(P_2 - P_4) - \sin 4\alpha(P_1 - 2P_3 + P_5) = 0,$$

d'où

$$\operatorname{tang} 4\alpha = \frac{2(P_2 - P_4)}{P_1 - 2P_3 + P_5}. \tag{8}$$

Or, en ajoutant K_1 à K_2 et égalant leur somme à zéro, nous trouvons

$$\begin{aligned}
(P_2 + P_4) + 2(P_5 - P_1)\operatorname{tang}\alpha \\
+ 2(P_5 - P_1)\operatorname{tang}^3\alpha - (P_2 + P_4)\operatorname{tang}^4\alpha = 0
\end{aligned}$$

ou

$$(P_2 + P_4)(1 - \operatorname{tang}^4\alpha) - 2(P_1 - P_5)\operatorname{tang}\alpha(1 + \operatorname{tang}^2\alpha) = 0,$$

d'où, en observant que

$$(1 - \operatorname{tang}^4\alpha) = (1 + \operatorname{tang}^2\alpha)(1 - \operatorname{tang}^2\alpha)$$

et en supprimant le facteur $(1 + \operatorname{tang}^2\alpha)$, il vient

$$(P_2 + P_4)(1 - \operatorname{tang}^2\alpha) - 2(P_1 - P_5)\operatorname{tang}\alpha = 0;$$

par conséquent,

$$\frac{P_2 + P_4}{P_1 - P_5} - \frac{2 \tang \alpha}{1 + \tang^2 \alpha} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\tang 2\alpha = \frac{P_2 + P_4}{P_1 - P_5}; \tag{9}$$

mais

$$\tang 2\alpha = \frac{M_2}{M_1 - M_3},$$

donc

$$\frac{P_2 + P_4}{P_1 - P_5} = \frac{M_2}{M_1 - M_3}. \tag{10}$$

De l'égalité (9) nous obtiendrons

$$\tang 4\alpha = \frac{2(P_1 - P_5)(P_2 + P_4)}{(P_1 - P_5)^2 - (P_2 + P_4)^2};$$

mais, d'après l'équation (8),

$$\tang 4\alpha = \frac{2(P_2 - P_4)}{P_1 - 2P_3 + P_5};$$

donc

$$\frac{P_2 - P_4}{P_1 - 2P_3 + P_5} = \frac{(P_1 - P_5)(P_2 + P_4)}{(P_1 - P_5)^2 - (P_2 + P_4)^2},$$

ou

$$\frac{P_4 - P_2}{2P_3 - (P_1 + P_5)} = \frac{(P_1 - P_5)(P_2 + P_4)}{(P_1 - P_5)^2 - (P_2 + P_4)^2}. \tag{11}$$

De cette équation on trouve

$$P_3 = \frac{(P_1 P_4 + P_2 P_5)}{P_2 + P_4} + \frac{P_2^2 - P_4^2}{2(P_1 - P_5)}. \tag{12}$$

Les égalités (10) et (11) expriment les conditions cherchées, nécessaires et suffisantes pour que les coefficients des termes contenant $x^3 y$ et xy^3 s'annulent simultanément, à la condition que

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{M_2}{M_1 - M_3}.$$

Si ces conditions sont satisfaites, l'équation de la courbe se réduit à la forme

$$A x^4 + B x^2 y^2 + C y^4 + D x^2 + E y^2 + F = 0,$$

où $F = f(a, b)$. Remarquons que, si les coordonnées a et b du centre satisfont à l'équation $f(a, b) = 0$, c'est-à-dire si le centre de la courbe est situé sur la courbe même ou s'il en représente un point isolé, dans l'équation de la courbe, rapportée à ses axes de symétrie, le terme constant s'annule; nous appellerons ces courbes conjuguées par rapport au centre.

6. Pour déterminer les coefficients A, B, C, D et E, remarquons que

$$\sin 2\alpha = \frac{M_2}{\pm\sqrt{(M_1 - M^3)^2 + M_2^2}},$$

$$\cos 2\alpha = \frac{M_1 - M_3}{\pm\sqrt{(M_1 - M_3)^2 + M_2^2}}.$$

Puisque $2\alpha < \pi$, $\sin 2\alpha > 0$; donc, dans les deux dernières formules, le signe du radical est le même que celui de la quantité M_2.

On a

$$D = M_1 \cos^2\alpha + M_2 \sin\alpha \cos\alpha + M_3 \sin^2\alpha,$$

$$E = M_1 \sin^2\alpha + M_2 \sin\alpha \cos\alpha + M_3 \cos^2\alpha;$$

en ajoutant ces équations, on obtient

$$(13) \qquad D + E = M_1 + M_3.$$

Or, en retranchant la seconde équation de la première, il vient

$$D - E = \pm\sqrt{(M_1 - M_3)^2 + M_2^2},$$

où, comme nous l'avons vu, le signe du radical doit être le même que celui de la quantité M_2. D'ailleurs de la formule $\tang 2\alpha = \frac{P_2 + P_4}{P_1 - P_5}$, il vient

$$\sin 2\alpha = \frac{P_2 + P_4}{\pm\sqrt{(P_1 - P_5)^2 + (P_2 + P_4)^2}},$$

$$\cos 2\alpha = \frac{P_1 - P_5}{\pm\sqrt{(P_1 - P_5)^2 + (P^2 + P_4)^2}}.$$

Puisque $2\alpha < \pi$, on a $\sin 2\alpha > 0$; d'où il suit que le signe du radical dans ces deux formules doit être le même que celui de la quantité $(P_2 + P_4)$. On a

$$A - C = [(P_1 - P_5)\cos 2\alpha + (P_2 + P_4)\sin 2\alpha],$$

ou

$$A - C = (P_1 - P_5)(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \tang 2\alpha),$$

d'où

$$A - C = \frac{P_1 - P_5}{\cos 2\alpha};$$

mais

$$\cos 2\alpha = \frac{P_1 - P_5}{\pm\sqrt{(P_1 - P_5)^2 + (P_2 + P_4)^2}},$$

donc

$$(15) \qquad A - C = \pm\sqrt{(P_1 - P_5)^2 + (P_2 + P_4)^2},$$

où le signe du radical, comme nous l'avons déjà dit, est le même que celui de la quantité $(P_2 + P_4)$.

En additionnant les coefficients de x^4 et y^4 dans l'équation (VIII), on obtient

$$A + C = P_1 + P_5 + (P_2 - P_4)\sin 2\alpha \cos 2\alpha$$
$$+ 2[2P_3 - (P_1 + P_5)] \sin^2\alpha \cos^2\alpha,$$

où

$$A + C = P_1 + P_5 + (P_2 - P_4)\sin 2\alpha \cos 2\alpha$$
$$- \frac{P_1 + P_5 - 2P_3}{2} \sin^2 2\alpha,$$

d'où, en divisant les deux membres de l'équation par

$(P_2 - P_4)$ et en remarquant que

$$\frac{P_1 + P_5 - 2P_3}{2(P_2 - P_4)} = \frac{1}{\tang 4\alpha},$$

on trouve

$$\frac{A + C}{P_2 - P_4} = \frac{P_1 + P_5}{P_2 - P_4} + \sin 2\alpha \cos 2\alpha - \frac{\sin^2 2\alpha}{\tang 4\alpha};$$

cette équation peut s'écrire ainsi

$$\frac{(A + C) - (P_1 + P_5)}{P_2 - P_4} = \sin 2\alpha \left[\cos 2\alpha - \frac{(1 - \tang^2 2\alpha)\sin 2\alpha}{2 \tang 2\alpha}\right],$$

ou

$$\frac{(A + C) - (P_1 + P_5)}{P_2 - P_4} = \frac{\sin 2\alpha \cos 2\alpha [2 - (1 - \tang^2 2\alpha)]}{2},$$

d'où

$$\frac{(A + C) - (P_1 + P_5)}{P_2 - P_4} = \frac{\sin 2\alpha \cos 2\alpha (1 + \tang^2 2\alpha)}{2},$$

ou, finalement,

$$\frac{(A + C) - (P_1 + P_5)}{P_2 - P_4} = \frac{\tang 2\alpha}{2}.$$

Puisque

$$\frac{\tang 2\alpha}{2} = \frac{P_2 + P_4}{2(P_1 - P_5)},$$

on obtient cette relation pour la détermination de $(A + C)$

$$\frac{(A + C) - (P_1 + P_5)}{P_2 - P_4} = \frac{P_2 + P_4}{2(P_1 - P_5)}.$$

En résolvant cette équation par rapport à $(A + C)$, on obtient

$$(16) \qquad A + C = \frac{P_2^2 - P_4^2}{2(P_1 - P_5)} + P_1 + P_5;$$

mais de l'équation (12) on a

$$\frac{P_2^2 - P_4^2}{2(P_1 - P_5)} = P_3 - \frac{P_1 P_4 + P_2 P_5}{P_2 + P_4};$$

donc

$$A + C = P_1 + P_3 + P_5 - \frac{P_1 P_4 + P_2 P_5}{P_2 + P_4},$$

ou, en définitive,

$$(17) \qquad A + C = \frac{P_1 P_2 + P_2 P_3 + P_3 P_4 + P_4 P_5}{P_2 + P_4}.$$

A l'aide des équations (15) et (17) on détermine les coefficients A et C.

Il reste maintenant à calculer le coefficient B. On a

$$\begin{aligned} B = [&2 P_3 \cos^4\alpha + 6(P_4 - P_2)\sin\alpha\cos^3\alpha \\ &+ 2(3P_5 - 4P_3 + 3P_1)\sin^2\alpha\cos^2\alpha \\ &- 6(P_4 - P_2)\sin^3\alpha\cos\alpha + 2P_3\sin^4\alpha]. \end{aligned}$$

Ajoutant et retranchant $4P_3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ et en remarquant que

$$\cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha = 1,$$

on obtient

$$\begin{aligned} B = {}&2P_3 - 6(P_2 - P_4)\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \\ &+ 6(P_1 - 2P_3 + P_5)\sin 2\alpha\cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Puisque

$$P_1 - 2P_3 + P_5 = \frac{2(P_2 - P_4)}{\operatorname{tang} 4\alpha} = \frac{(P_2 - P_4)(1 - \operatorname{tang}^2 2\alpha)}{\operatorname{tang} 2\alpha},$$

on a

$$\begin{aligned} B = {}&2P_3 - 3(P_2 - P_4)\sin 2\alpha\cos 2\alpha \\ &+ \frac{3\sin^2 2\alpha(P_2 - P_4)(1 - \operatorname{tang}^2 2\alpha)}{2\operatorname{tang} 2\alpha}, \end{aligned}$$

d'où l'on obtient successivement

$$\begin{aligned} B &= 2P_3 - 3(P_2 - P_4)\left[\sin 2\alpha\cos 2\alpha - \frac{\sin^2 2\alpha(1 - \operatorname{tang}^2 2\alpha)}{2\operatorname{tang} 2\alpha}\right] \\ &= 2P_3 - \frac{3(P_2 - P_4)}{2\operatorname{tang} 2\alpha}[\sin^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha\operatorname{tang}^2 2\alpha] \\ &= 2P_3 - \frac{3(P_2 - P_4)\operatorname{tang} 2\alpha}{2} = 2P_3 - \frac{3(P_2 - P_4)(P_2 + P_4)}{2(P_1 - P_5)}; \end{aligned}$$

en remplaçant P_2 par sa valeur, tirée de la formule (12),

on obtient

$$B = \frac{2(P_1P_4 + P_2P_5)}{P_2 + P_4} - \frac{P_2^2 - P_4^2}{2(P_1 - P_5)};$$

en substituant, enfin, au lieu de $\frac{P_2^2 - P_4^2}{2(P_1 - P_5)}$, la valeur de cette fraction, tirée de la même formule (12), on obtient

$$B = \frac{3(P_1P_4 + P_2P_5)}{P_2 + P_4} - P_3,$$

ou, finalement,

$$B = \frac{P_2(3P_5 - P_3) - (P_3 - 3P_1)P_4}{P_2 + P_4}. \tag{18}$$

7. L'équation de la courbe du quatrième ordre, ayant le centre et les axes de symétrie, nous avons réduit à la forme suivante :

$$Ax^4 + Bx^2y^2 + Cy^4 + Dx^2 + Ey^2 + F = 0;$$

en résolvant cette équation par rapport à y, on obtient

$$y = \pm\sqrt{-\frac{Bx^2 + E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{(B^2 - 4AC)x^4 + 2(BE - 2CD)x^2 + (E^2 - 4CF)}}.$$

En posant

$$B^2 - 4AC = M, \qquad BE - 2CD = N, \qquad E^2 - 4CF = P,$$

nous trouvons

$$y = \pm\sqrt{\frac{-(Bx^2 + E)}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{Mx^4 + 2Nx^2 + P}}$$

ou

$$y = \pm\sqrt{r_1^2 \pm \frac{1}{2C}\sqrt{Mx^4 + 2Nx^2 + P}},$$

où

$$r_1^2 = -\frac{B}{2C}x^2 - \frac{E}{2C}. \tag{19}$$

Les courbes du quatrième ordre, ayant le centre, nous diviserons en quatre espèces.

La courbe sera de première espèce, si $\eta^2 > 0$ pour toutes valeurs de x, pour lesquelles le trinome

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P$$

reste positif et la quantité

$$Y = \pm \frac{1}{2C} \sqrt{Mx^4 + 2Nx^2 + P}$$

est réelle; dans ce cas l'équation (19) exprime une courbe du second ordre ou un système de deux droites.

La courbe du quatrième ordre appartiendra à la seconde espèce, si $\eta^2 < 0$ pour toutes valeurs de x pour lesquelles Y reste une quantité réelle. Nous rapporterons la courbe à la troisième espèce, si la quantité η est nulle, c'est-à-dire si $B = E = 0$. Enfin la courbe du quatrième ordre sera de quatrième espèce, si η^2 change de signe entre les limites de x, pour lesquelles le trinome

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P$$

reste positif. Considérons, par exemple, la courbe définie par l'équation

$$(x^2 + y^2)^2 - 2r^2(x^2 + y^2) - 2r^2x^2 = 0.$$

En résolvant cette équation par rapport à y, on obtient

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2 \pm \sqrt{r^4 + 2r^2x^2}},$$

ou

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2 \pm \sqrt{r^2(r^2 + 2x^2)}}.$$

Dans le cas considéré, la quantité

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P$$

se réduit au binome

$$r^4 + 2r^2x^2,$$

qui demeure positif pour toutes les valeurs de x, comprises entre o et $\pm\infty$, tandis que la quantité η^2, définie par l'équation

$$\eta^2 = r^2 - x^2,$$

restant positive au changement de x entre o et $\pm r$, devient négative au changement de x entre $\pm r$ et $\pm\infty$. Donc la courbe considérée appartient à la quatrième espèce.

8. *Discussion.* — La quantité M peut être positive, négative, ou égale à zéro.

Dans les deux cas premiers le trinome

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P$$

peut être mis sous la forme

$$M\left(x^4 + \frac{2N}{M}x^2 + \frac{M}{P}\right);$$

en résolvant l'équation

$$x^4 + \frac{2N}{M}x^2 + \frac{P}{M} = 0,$$

on trouve

$$x = \pm\sqrt{\frac{-N \pm \sqrt{N^2 - MP}}{M}}.$$

Posons

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{-N + \sqrt{N^2 - MP}}{M}},$$

$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{-N - \sqrt{N^2 - MP}}{M}};$$

alors

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P = M(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2). \tag{20}$$

Supposons d'abord que $M < 0$; si $x_1 = x_2$, c'est-à-dire si $N^2 - MP = 0$, l'équation de la courbe se réduit à celle du second degré.

En supposant $N^2 - MP < o$, les quantités x_1, x_2 deviennent imaginaires conjuguées; en posant dans ce cas

$$x_1 = \pm (\alpha + \beta i),$$
$$x_2 = \pm (\alpha - \beta i),$$

de l'équation (20) nous obtiendrons

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P = M[(x^2 - \alpha^2 + \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2],$$

et il est évident que le trinome considéré reste négatif pour toutes les valeurs de x; par conséquent le lieu géométrique, exprimé par l'équation du quatrième degré, sera imaginaire. Ainsi, il ne nous reste qu'à supposer que, si $M < o$, on a

$$N^2 - MP > o.$$

A ces conditions, nous avons à distinguer quelques cas.

Admettons d'abord que $N = o$; alors, de l'inégalité précédente, il vient que $P > o$. En posant $M = - M_1$, où $M_1 > o$, on obtient $x_1 = \alpha i$ et le trinome

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P$$

se ramène au produit

$$M(x^2 + \alpha^2)(x^2 - x_2^2)$$

ou

$$M_1(x^2 + \alpha^2)(x_2^2 - x^2),$$

de sorte que cette quantité sera positive au changement de x entre o et $\pm x_2$, où

$$x_2 = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{M_1 P}}{M_1}}.$$

Posons, en second lieu, que $N < o$; alors $N = - N_1$, où $N_1 > 0$. Si en outre $P = 0$, on a

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{2N_1}{-M^1}} = \pm \alpha\iota,$$
$$x_2 = 0,$$

et le trinome

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P,$$

étant ramené, dans ce cas, au produit

$$M(x^2 + \alpha^2)x^2,$$

sera négatif pour toutes les valeurs de x.

Si $N < 0$ et $P < 0$, de sorte que $P = -P_1$, où $P_1 > 0$, on trouve

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{N_1 + \sqrt{N_1^2 - M_1P_1}}{-M_1}},$$
$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{N_1 - \sqrt{N_1^2 - M_1P_1}}{-M_1}};$$

puisque la quantité $(N_1^2 - M_1P_1)$ par hypothèse est positive et, par suite, $N_1^2 > M_1P_1$, on a $x_1 = \pm\alpha i$, $x_2 = \pm\beta i$ et le lieu géométrique devient de nouveau imaginaire.

Si $N < 0$ et $P > 0$, on trouve

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{N_1 + \sqrt{N_1^2 + M_1P}}{-M_1}} = \pm\alpha i,$$
$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{N_1 - \sqrt{N_1^2 + M_1P}}{-M_1}};$$

x_2 est une quantité réelle, puisque la valeur absolue du radical $\sqrt{N_1^2 + M_1P}$ surpasse celle de N_1. Le trinome

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P,$$

étant ramené dans ce cas au produit

$$M_1(x^2 + \alpha^2)(x_2^2 - x^2),$$

restera positif, x variant de zéro à $\pm\infty$.

Posons, enfin, $N > 0$. Si $P = 0$, il vient

$$x_1 = 0,$$
$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{-2N}{M}} = \pm\sqrt{\frac{2N}{M_1}},$$

où l'on suppose $M = -M_1$, $M_1 > 0$.

Le trinome se ramène au produit

$$M_1 x^2 \left(\frac{2N}{M_1} - x^2\right),$$

qui est positif pour toutes les valeurs de x, comprises entre zéro et $\pm\sqrt{\frac{2N}{M_1}}$.

En supposant $N > 0$, $P < 0$, on trouve

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{-N + \sqrt{N^2 - M_1 P_1}}{-M_1}},$$
$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{-N - \sqrt{N^2 - M_1 P_1}}{-M_1}},$$

où $P_1 = -P$. Puisque la valeur absolue du radical $\sqrt{N^2 - M_1 P_1}$ est moindre que celle de N, il est évident que toutes les racines de l'équation

$$M x^4 + 2 N x^2 + P = 0$$

sont réelles et que $x_1^2 < x_2^2$. Le trinome se ramène au produit

$$M_1 (x^2 - x_1^2)(x_2^2 - x^2)$$

et, par suite, reste positif pour toutes les valeurs de x comprises entre $\pm x_1$ et $\pm x_2$.

Si, enfin, $N > 0$, $P > 0$, on obtient

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{-N + \sqrt{N^2 + M_1 P}}{-M_1}} = \pm \alpha i,$$

c'est-à-dire x_1 est une quantité imaginaire puisque la valeur absolue du radical $\sqrt{N^2 + M_1 P}$ surpasse celle de la quantité N. D'autre part,

$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{-N-\sqrt{N^2+M_1P}}{-M_1}};$$

donc x_2 est une quantité réelle et le trinome considéré s'exprime dans ce cas par le produit

$$M_1(x^2+\alpha^2)(x_2^2-x^2),$$

restant positif quand x varie de zéro à $\pm x_2$.

On voit ainsi que, dans le cas

$$M < 0,$$
$$N^2 - MP > 0,$$

on obtient cinq groupes des courbes, correspondant à ces hypothèses :

(I)	$N = 0,$	$P > 0,$
(II)	$N < 0,$	$P > 0,$
(III)	$N > 0,$	$P = 0,$
(IV)	$N > 0,$	$P < 0,$
(V)	$N > 0,$	$P > 0.$

9. *Discussion* (suite). — Passons maintenant au cas $M > 0$. Posons, comme plus haut,

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{-N+\sqrt{N^2-MP}}{M}},$$

$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{-N-\sqrt{N^2-MP}}{M}};$$

alors

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P = M(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2).$$

Si $N^2 - MP < 0$, il y a trois cas à distinguer : N peut être une quantité positive, ou négative, ou, enfin, égale à zéro; il est évident que dans tous ces cas $P > 0$. Si N est différent de zéro, les quantités x_1 et x_2 deviennent imaginaires conjuguées, quel que soit le signe de N; en posant donc

$$x_1 = \pm(\alpha + \beta i),$$
$$x_2 = \pm(\alpha + \beta i),$$

il vient

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P = M[(x^2 - \alpha^2 + \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2];$$

c'est-à-dire le trinome considéré demeure positif, x variant de zéro à $\pm\infty$. Si, au contraire, $N = 0$, le trinome

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P$$

se ramène au binome

$$Mx^4 + P,$$

et, puisque $P > 0$, cette quantité sera positive pour toutes les valeurs de x, comprises entre $-\infty$ et $+\infty$.

Posons ensuite

$$N^2 - MP > 0,$$

alors nous avons à distinguer les cas suivants : 1° $N > 0$; 2° $N < 0$; 3° $N = 0$.

Admettons d'abord que $N > 0$; si en outre $P > 0$, la valeur numérique du radical $\sqrt{N^2 - MP}$ est inférieure à la valeur absolue de N; par suite, on obtient

$$x_1 = \pm \alpha i,$$
$$x_2 = \pm \beta i,$$
$$Mx^4 + 2Nx^2 + P = M(x^2 + \alpha^2)(x^2 + \beta^2),$$

c'est-à-dire le trinome en question est positif pour toutes les valeurs de x, comprises entre $-\infty$ et $+\infty$.

Si $N > 0$ et $P = 0$, on a

$$x_1 = 0,$$
$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{-2N}{M}} = \pm \alpha i,$$
$$Mx^4 + 2Nx^2 + P = Mx^2\left(x^2 + \frac{2N}{M}\right),$$

c'est-à-dire le trinome reste positif au changement de x entre $-\infty$ et $+\infty$. Si, enfin, $N > 0$ et $P < 0$, nous obtenons, en posant $P = - P_1$,

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{-N + \sqrt{N^2 + MP_1}}{M}},$$

$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{-N - \sqrt{N^2 + MP_1}}{M}};$$

puisque la valeur absolue du radical $\sqrt{N^2 + MP_1}$ surpasse celle de la quantité N, x_1 est une quantité réelle, mais x_2 est une imaginaire de la forme αi; par conséquent

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P = M(x^2 - x_1^2)(x^2 + \alpha^2)$$

et le trinome sera positif, x variant de $\pm x$ à $\pm\infty$.

Posons, maintenant, que $N < 0$ et que $N = - N_1$. Alors il y a de nouveau trois cas à distinguer. Admettons d'abord que $P > 0$. Alors

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{N_1 + \sqrt{N_1^2 - MP}}{M}},$$

$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{N_1 - \sqrt{N_1^2 - MP}}{M}};$$

puisque $N_1^2 - MP > 0$ et que la valeur absolue du radical est inférieure à celle de la quantité N, nous en concluons que x_1 et x_2 sont des quantités réelles; en outre, $x_1^2 > x_2^2$. On a

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P = M(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2);$$

il est évident que le trinome considéré, étant positif au changement de x, de zéro à $\pm x_2$, devient négatif, x variant de $\pm x_2$ à $\pm x_1$, et, enfin, devient de nouveau positif, lorsque x varie de $\pm x_1$ à $\pm\infty$.

Admettons en second lieu que $P = 0$, alors

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{2N_1}{M}},$$
$$x_2 = 0,$$
$$Mx^4 + 2Nx^2 + P = M\left(x^2 - \frac{2N_1}{M}\right)x^2:$$

donc le trinome demeure positif, x variant de $\pm\sqrt{\frac{2N_1}{M}}$ à $\pm\infty$. Admettons que $N < 0$ et $P < 0$. En posant $N = -N_1$, $P = -P_1$, on trouve

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{N_1 + \sqrt{N_1^2 + MP_1}}{M}},$$
$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{N_1 - \sqrt{N_1^2 + MP_1}}{M}};$$

par conséquent x_1 est une quantité réelle, mais $x_2 = \pm\beta i$; on a

$$Mx^4 + 2Nx_2 + P = M(x^2 - x_1^2)(x^2 + \beta^2),$$

donc le trinome demeure négatif, quand x varie de zéro à $\pm x_1$, mais il devient positif, x variant de $\pm x_1$ à $\pm\infty$.

Supposons enfin qu'à la condition $N^2 - MP > 0$, on a $N = 0$; dans ce cas, de l'inégalité précédente, on trouve

$$-MP > 0,$$

donc $P < 0$. En posant $P = -P_1$, on obtient

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{MP_1}}{M}},$$
$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{-\sqrt{MP_1}}{M}} = \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{MP_1}}{M}} = \pm\alpha i;$$

donc

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P = M(x^2 - \alpha^2)(x^2 + \alpha^2) = M(x_4 - \alpha^4)$$

et le trinome sera positif, lorsque x varie de $\pm\alpha$ à $\pm\infty$

Ainsi l'on conclut que les courbes, correspondant à l'hypothèse $M > 0$, forment deux classes.

Première classe, $M > 0$, $N^2 - MP < 0$. — Cette classe contient trois groupes de courbes, conformément à trois systèmes des hypothèses

(I)	$N > 0$,	$P > 0$,
(II)	$N < 0$,	$P > 0$,
(III)	$N = 0$,	$P > 0$.

Seconde classe, $M > 0$, $N^2 - MP > 0$. — Cette classe renferme sept groupes de courbes, correspondant à sept systèmes des hypothèses

(I)	$N > 0$,	$P > 0$,
(II)	$N > 0$,	$P = 0$,
(III)	$N < 0$,	$P < 0$,
(IV)	$N < 0$,	$P > 0$,
(V)	$N < 0$,	$P = 0$,
(VI)	$N < 0$,	$P < 0$,
(VII)	$N = 0$,	$P < 0$.

10. Supposons, enfin, que $M = 0$. Alors le trinome

$$Mx^4 + 2Nx^2 + P$$

se réduit au binome

$$2Nx^2 + P.$$

Nous distinguerons plusieurs cas.

Remarquons d'abord que N et P ne peuvent pas être nulles simultanément, car dans ces deux cas l'équation de la courbe se réduit à celle du second degré.

Supposons que $N < 0$. En admettant, d'ailleurs, $P > 0$ et en posant $N = -N_1$, on obtient

$$\begin{aligned} 2Nx^2 + P &= -2N_1x^2 + P \\ &= -2N_1\left(x^2 - \frac{P}{2N_1}\right) = 2N_1\left(\frac{P}{2N_1} - x^2\right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire le binome

$$2Nx^2 + P$$

demeure positif, lorsque x varie de o à $\pm\sqrt{\frac{P}{2N_1}}$; le binome devient négatif en dehors de l'intervalle indiqué.

Admettons, en second lieu, que $N < 0$ et $P < 0$; en posant $N = -N_1$, $P = -P_1$, on trouve

$$2Nx^2 + P = -2N_1x^2 - P_1 = -(2N_1x^2 + P_1);$$

puisque cette dernière quantité demeure négative, x variant de $-\infty$ à $+\infty$; on en conclut que le lieu géométrique, dans le cas considéré, est imaginaire.

Soit, ensuite, $N > 0$, $P > 0$. Alors

$$2Nx^2 + P = 2N\left(x^2 + \frac{P}{2N}\right),$$

c'est-à-dire le binome reste positif pour toutes les valeurs de x.

Or, si $N > 0$, $P < 0$, on obtient,

$$2Nx^2 + P = 2Nx^2 - P_1 = 2N\left(x^2 - \frac{P_1}{2N}\right),$$

où $P = -P_1$. Donc le binome demeure positif, quand x varie de $\pm\sqrt{\frac{P_1}{2N}}$ à $\pm\infty$ et les points du lieu géométrique sont réels, x variant de $\pm\sqrt{\frac{P_1}{2N}}$ à $\pm\infty$.

Dans ce dernier cas, la courbe ne peut pas être conjuguée par rapport au centre, parce que, si $E^2 - 4CF < 0$, la quantité F ne peut pas être nulle.

Ainsi l'on conclut que, si $M = 0$, on ne doit examiner que les cas suivants

(I)	$N < 0$,	$P > 0$,
(II)	$N > 0$,	$P > 0$,
(III)	$N > 0$,	$P < 0$.

THÉORÈMES SUR LES QUADRIQUES;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

On sait que l'on peut déduire du théorème de M. Faure sur les cercles circonscrits aux triangles conjugués à une conique, la proposition suivante [1] :

Les cercles orthoptiques des coniques inscrites dans un triangle coupent orthogonalement le cercle conjugué au triangle.

Ce théorème s'étend à l'espace et s'applique aux quadriques inscrites dans un tétraèdre, seulement ce tétraèdre doit avoir ses arêtes opposées rectangulaires, car seuls les tétraèdres de cette espèce ont une sphère conjuguée. On a (la condition d'orthogonalité étant réciproque) deux théorèmes généraux équivalents :

Les sphères conjuguées aux tétraèdres à arêtes opposées rectangulaires circonscrits à une quadrique coupent orthogonalement la sphère orthoptique de cette quadrique.

Les sphères orthoptiques des quadriques inscrites à un tétraèdre à arêtes opposées orthogonales coupent orthogonalement la sphère conjuguée au tétraèdre.

COROLLAIRES. — 1° *Le lieu des centres des quadriques inscrites à un tétraèdre à arêtes opposées rectangulaires et dont la somme des carrés des axes demeure constante est une sphère ayant pour centre l'orthocentre du tétraèdre.*

(1) *Voir* notre Note : *Sur un théorème de M. Faure.*

En particulier : *Le lieu des centres des hyperboloïdes équilatères inscrits à un tétraèdre à arêtes opposées rectangulaires est la sphère conjuguée au tétraèdre.*

2° *L'orthocentre d'un tétraèdre à arêtes opposées rectangulaires circonscrit à une paraboloïde est dans le plan orthoptique de cette quadrique.*

C'est le théorème de Steiner étendu à l'espace.

En transformant cette dernière proposition par polaires réciproques, relativement à la sphère conjuguée au tétraèdre, qui a son centre dans le plan orthoptique, on obtient cette proposition :

Les hyperboloïdes équilatères passant par les sommets d'un tétraèdre à arêtes opposées rectangulaires passent par l'orthocentre au tétraèdre.

On voit que ce dernier théorème est l'extension à l'espace de la propriété classique des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle ABC de passer par l'orthocentre H du triangle. Mais on remarquera que le triangle ABC peut être quelconque, tandis que, dans l'espace, le tétraèdre doit avoir ses arêtes opposées rectangulaires. Cela peut s'expliquer :

La propriété des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle peut se vérifier de bien des façons, mais, géométriquement, on peut dire qu'elle est une conséquence directe de ce fait que, lorsqu'une conique S_1 est circonscrite à un triangle conjugué à une conique S, la polaire d'un point quelconque de S_1 par rapport à S est divisée harmoniquement par les deux courbes, ce qui peut encore s'énoncer en disant qu'une droite quelconque divisée harmoniquement par S et S_1 a son pôle par rapport à S_1 situé sur S.

Or considérons une hyperbole équilatère E circonscrite à un triangle ABC, et le cercle Σ conjugué au triangle. L'hyperbole E est circonscrite à un triangle conjugué à Σ, et la droite de l'infini est divisée harmoniquement par S et Σ : donc le pôle de cette droite par rapport à Σ, c'est-à-dire le centre de Σ, est situé sur E. Or on sait que ce centre est l'orthocentre du triangle.

Dans l'espace, si nous considérons un tétraèdre quelconque, notre raisonnement n'est plus valable, parce qu'il n'y a pas de sphère conjuguée au tétraèdre. Mais si cette sphère existe, c'est-à-dire si le tétraèdre a ses arêtes opposées rectangulaires, on répétera mot pour mot la démonstration : Le plan de l'infini coupe un hyperboloïde équilatère circonscrit E suivant une conique circonscrite à un triangle conjugué à l'ombilicale, c'est-à-dire suivant une conique harmoniquement circonscrite à l'ombilicale, et comme l'hyperboloïde E est circonscrit à un tétraèdre conjugué à une sphère S, le pôle du plan de l'infini par rapport à S, c'est-à-dire le centre de S, ou l'orthocentre du tétraèdre, est situé sur E.

BIBLIOGRAPHIE.

Aperçu historique sur les formules d'interpolation des Tables de survie et de mortalité, par *Albert Quiquet*. 1 br. in-8° raisin. Prix : 3fr. L. Warnier et Cie, éditeurs, 30, rue Le Peletier, Paris.

De grands mathématiciens, tels que de Moivre, Bernoulli, Lambert, etc., des actuaires de différentes nations, se sont préoccupés de représenter par une formule algébrique les Tables de mortalité fournies par des statistiques directes. M. Quiquet s'est proposé de réunir les travaux qui ont été réalisés dans cet ordre d'idées et qui sont plus nombreux qu'on ne pourrait le croire. Sans parler des lois désormais classiques de Gompertz et de Makeham, on trouvera dans cette brochure des renseignements puisés aux sources mêmes, c'est-à-dire dans les Mémoires des Académies et des Sociétés savantes, et un rapide résumé de la méthode suivie par chaque auteur; nous citerons entre autres un fort curieux rapport de Legendre sur un manuscrit de Duvillard et sur la Table célèbre de ce dernier.

Ce recueil ne s'est pas formé sans peine, et a mérité déjà l'attention de spécialistes fort compétents, le Jury de l'Institut des Actuaires français.

Représentation algébrique des Tables de survie et de mortalité. Généralisation des lois de Gompertz et de Makeham, par *Albert Quiquet*. 1 vol. in-8° raisin. Prix : 4fr. L. Warnier et Cie, éditeurs, 30, rue Le Peletier, Paris.

C'est devant le Jury de l'Institut des Actuaires français que M. Quiquet a soutenu la thèse qui paraît aujourd'hui en brochure, et où il a reproduit, avec de notables développements, deux Communications qu'il avait précédemment faites à l'Académie des Sciences. Ce travail, presque exclusivement mathématique, conduit à toute une série de formules propres à représenter les Tables de survie ou de mortalité : les lois de Gompertz et de Makeham, et d'autres, moins connues, celles de Lazarus, de Janse, etc., n'en forment plus que de simples cas particuliers; leurs propriétés sont susceptibles d'une généralisation dont M. Quiquet fait rapidement entrevoir la portée, au sujet du calcul des annuités viagères, la base en quelque sorte des assurances sur la vie.

Annuaire pour l'an 1894, publié par le Bureau des Longitudes. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1894; in-18 de v-886 pages, avec 2 Cartes magnétiques. Prix : broché, 1fr,50; cartonné, 2fr.

Outre les renseignements pratiques qu'il contient chaque année, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1894 renferme des articles dus aux savants les plus illustres sur les Monnaies, la Statistique, la Géographie, la Minéralogie, etc., enfin les Notices suivantes : *La Lumière et l'Électricité, d'après Maxwell et Hertz;* par M. POINCARÉ. — *L'Origine et l'emploi de la boussole marine appelée aujourd'hui compas;* par le Contre-Amiral FLEURIAIS. — *Quatre jours d'observation au sommet du mont Blanc;* par M. J. JANSSEN. — *Discours prononcés aux funérailles de l'Amiral Pâris;* par MM. FAYE, BOUQUET DE LA GRYE et le Contre-Amiral FLEURIAIS. — *Discours prononcés à l'inauguration de la statue d'Arago;* par MM. TISSERAND, CORNU, MOUCHEZ.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

ARCHITECTURE NAVALE. THÉORIE DU NAVIRE, par *J. Pollard* et *A. Dudebout*, ingénieurs de la Marine, professeurs à l'École du Génie maritime. Tome III : DYNAMIQUE DU NAVIRE : MOUVEMENT DE ROULIS SUR HOULE. MOUVEMENT RECTILIGNE HORIZONTAL DIRECT. RÉSISTANCE DES CARÈNES. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1892. Grand in-8° de 523 pages, avec 163 figures dans le texte. Prix : 15^{fr}.

ŒUVRES COMPLÈTES D'AUGUSTIN CAUCHY, publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences et sous les auspices de M. le Ministre de l'Instruction publique. 1re série, tome VIII. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1893. In-4° de 456 pages. Prix : 25^{fr}.

COURS D'ANALYSE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, par M. *C. Jordan*, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique. 2^{e} édition, entièrement refondue. Tome I : CALCUL DIFFÉRENTIEL. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1893. In-8° de XVIII-612 pages, avec figures dans le texte. Prix : 17^{fr}.

TRAITÉ DE MÉCANIQUE RATIONNELLE, Cours de la Faculté des Sciences de Paris, par *Paul Appell*, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences de Paris. Tome I : STATIQUE. DYNAMIQUE DU POINT. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1893. Grand in-8° de VI-549 pages, avec 178 figures dans le texte. Prix : 16^{fr}.

TRAITÉ D'OPTIQUE, par M. *E. Mascart*, membre de l'Institut, professeur au Collège de France, directeur du Bureau central météorologique. Tome III. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1893. Grand in-8° de 692 pages. Prix : 20^{fr}.

PROBLÈMES ET CALCULS PRATIQUES D'ÉLECTRICITÉ, École pratique de Physique, par *Aimé Witz*, docteur ès sciences, ingénieur des Arts et Manufactures, professeur aux facultés catholiques de Lille. In-8° de XIV-330 pages, avec 51 figures dans le texte. Prix : 7^{fr},50.

LA GÉOMÉTRIE DU MOUVEMENT, par le Dr *Arthur Schœnflies*, professeur à l'Université de Göttingue. Exposé synthétique, traduit de l'allemand par *Ch. Speckel*, capitaine du génie. Édition revue et augmentée par l'auteur, suivie de NOTIONS GÉOMÉTRIQUES SUR LES COMPLEXES ET LES CONGRUENCES DE DROITES, par *G. Fouret*, examinateur d'admission à l'École Polytechnique. In-8° de VII-292 pages. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1893. Prix : 6^{fr},50.

INTRODUCTION A LA THÉORIE DES EXPLOSIFS, par *E. Sarrau*, ingénieur en chef des Poudres et Salpêtres, membre de l'Institut. Grand in-8° de 115 pages. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1893. Prix : 2^{fr},75.

COMPOSITIONS DONNÉES DEPUIS 1872 AUX EXAMENS DE SAINT-CYR, par *A. Grévy*, agrégé des sciences mathématiques, professeur au lycée de Bar-le-Duc. ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE. Énoncés et solutions. 2e édition. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1893. In-8° de 110 pages, avec 30 figures dans le texte. Prix : 2^{fr},50.

COURS D'ASTRONOMIE à l'usage des étudiants des facultés des sciences, par *B. Baillaud*, doyen de la Faculté des Sciences de Toulouse, directeur de l'observatoire. Première partie : *Quelques théories applicables à l'étude des sciences expérimentales*. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1893. Grand in-8° de VI-285 pages, avec 58 figures dans le texte. Prix : 8^{fr}.

CONFÉRENCES SCIENTIFIQUES ET ALLOCUTIONS, par *Sir William Thomson* (*lord Kelvin*), professeur de Philosophie naturelle à l'Université de Glasgow, membre du Collège Saint-Pierre, à Cambridge, traduites et annotées sur la deuxième édition par *P. Lugol*, agrégé des sciences physiques, professeur au lycée de Pau, avec des EXTRAITS DE MÉMOIRES RÉCENTS de *Sir W. Thomson* et quelques Notes, par *M. Brillouin*, maître de conférences à l'École Normale. Tome I : CONSTITUTION DE LA MATIÈRE. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1893. In-8° de IX-379 pages, avec 76 figures dans le texte. Prix : 7^{fr},50.

PREMIERS PRINCIPES D'ÉLECTRICITÉ INDUSTRIELLE. Piles, accumulateurs, dynamos, transformateurs, par *Paul Janet*, professeur de Physique chargé du cours d'Électricité industrielle à la Faculté des Sciences de Grenoble. Paris, Gauthier-Villars et fils: 1893. In-8° de VIII-275 pages, avec 173 figures dans le texte. Prix : 6^{fr}.

TRAITÉ D'ANALYSE, Cours de la Faculté des Sciences de Paris, par *Émile Picard*, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences. Tome II : FONCTIONS HARMONIQUES ET FONCTIONS ANALYTIQUES. INTRODUCTION A LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. INTÉGRALES ABÉLIENNES ET SURFACES DE RIEMANN. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1893. Grand in-8° de XIII-512 pages, avec 58 figures dans le texte. Prix : 15^{fr}.

RECUEIL DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES. Géométrie et Géométrie descriptive, à l'usage des classes de Mathématiques élémentaires, par *C.-A. Laisant*, docteur ès sciences, ancien élève de l'École Polytechnique. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1893. In-8° de x-206 pages. Prix : 5fr.

LEÇONS D'ALGÈBRE, par *C. Briot*, revues et mises au courant du nouveau programme par *E. Lacour*, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis. Deuxième partie, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales. 16e édition, 2e fascicule. Paris, Ch. Delagrave; 1893. Prix : 5fr.

DISCUSSIONI DELLE EQUAZIONI GENERALI DELLE CONICHE E DELLE QUADRICHE IN COORDINATE CARTESIANE, per *Francesco Porta*, prof. all' Accademia militare. Torino, G. Candeletti; 1893. In-8° de 36 pages.

ANWENDUNG DER QUATERNIONEN AUF DIE GEOMETRIE von Dr *P. Molenbroek*, Privatdocent der Mathematik an der Universität Leyden. Leyde, E.-J. Brill; 1893. In-8° de xv-265 pages. Prix : 7 Marks.

ENTWURF EINER NEUEN INTEGRALRECHNUNG AUF GRUND DER POTENZIAL-LOGARITHMAL- UND NUMERALRECHNUNG von Dr *Julius Bergbohm*. Zweites Heft : Die irrationalen, exponentiellen, logarithmischen und cyclometrischen Integrale. Leipzig, B.-G. Teubner; 1893. In-8° de 188 pages.

TRAITÉ DE MÉCANIQUE CÉLESTE, par F. TISSERAND, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, professeur à la Faculté des Sciences, directeur de l'Observatoire. Tome III : EXPOSÉ DE L'ENSEMBLE DES THÉORIES RELATIVES AU MOUVEMENT DE LA LUNE. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1894. In-8° de IX-427 pages. Prix : 22fr.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. A. Cazamian à M. Brisse.

Dans une Note intitulée « Sur quelques propriétés des courbes planes unicursales du troisième ordre », M. Astor (*Nouvelles Annales*, juillet 1892) considère des cubiques unicursales dont la droite des inflexions est à l'infini. Il indique que la corde polaire d'un point quelconque de la courbe enveloppe une conique ayant son centre au point double et pour asymptotes les tangentes en ce point. Ces cubiques jouissent de beaucoup d'autres propriétés remarquables. D'abord elles sont *quarrables algébriquement* (*voir* une Note de M. M. Marie, *Nouvelles Annales*, juin 1891). Elles sont donc ou des trèfles ou des projections du folium de Descartes. Toutes ces cubiques peuvent en outre être considérées comme les *polaires réciproques de quartiques à trois rebroussements par rapport à un cercle ayant son centre au point de concours des tangentes de rebroussement* (¹). Si les trois tangentes de rebroussement sont réelles, on a des trèfles; si deux des tangentes sont imaginaires, on a des cubiques de la seconde catégorie (projections du folium de Descartes).

La cubique que M. Astor étudie en dernier lieu :

$$x(x^2 - 3y^2) = R(x^2 + y^2)$$

est une courbe absolument remarquable. Elle a trois asymptotes inflexionnelles formant un triangle équilatéral, et trois axes de symétrie. Son point double est un foyer. Ses trois sommets sont situés sur un même cercle de rayon R. Elle pourrait être appelée le *trèfle équilatéral*. En coordonnées polaires son équation est $\rho \cos 3\omega = R$. Elle est la polaire réciproque d'une hypocycloïde à trois rebroussements par rapport à un cercle

(¹) On peut donc énoncer ainsi les résultats dus à M. Marie :

Les polaires réciproques des quartiques de troisième classe, le centre du cercle directeur étant au point de concours des tangentes de rebroussement, sont des cubiques quarrables algébriquement, et ce sont les seules.

Ainsi la trisectrice de Mac Laurin, qui est la polaire réciproque d'une cardioïde par rapport à un cercle ayant son centre au foyer triple, est quarrable algébriquement. C'est ce qu'a trouvé M. de Longchamps (Cours de *Mathématiques spéciales, supplément*, page 159 de la première édition). On peut aussi déduire de là que la trisectrice de Mac Laurin est une projection du folium de Descartes.

concentrique au cercle inscrit (en transformant les propriétés si connues de l'hypocycloïde on obtient un grand nombre de propriétés de la cubique).

La figure inverse de cette cubique, le pôle étant au point double, est un trifolium équilatéral. La quadratrice du trèfle équilatéral est

$$\frac{x+\mathrm{R}}{3}\sqrt{(3x-\mathrm{R})(x+\mathrm{R})}.$$

On peut encore signaler ces propriétés :

Le trèfle équilatéral est la seule cubique dont la cayleyenne soit un cercle : c'est le cercle inscrit dans le triangle des asymptotes. Ce cercle étant en même temps la conique polaire de la droite de l'infini, les tangentes à la cubique aux points où un diamètre de Newton la rencontre sont concourantes.

La hessienne du trèfle équilatéral est une cubique identique ayant les mêmes asymptotes et les mêmes axes de symétrie.

SUR LES POINTS D'UNE CONIQUE SITUÉS SUR UN MÊME CERCLE;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

On connaît la relation suivante, qui lie les angles d'anomalie excentrique de quatre points d'une ellipse situés sur un même cercle :

$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4=2m\pi$$

(m pouvant être nul).

De cette relation, on peut déduire, outre un théorème bien connu, de Steiner, plusieurs propriétés intéressantes. Nous allons en signaler quelques-unes.

I. Considérons quatre points d'une ellipse situés sur un cercle; leurs paramètres vérifient la relation

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2\mu\pi.$$

Appelons φ'_1, φ'_2, φ'_3, φ'_4 les paramètres des points où les cercles osculateurs en chacun des points considérés rencontrent de nouveau l'ellipse, on aura

$$\begin{aligned} 3\varphi_1 + \varphi'_1 &= 2m\ \pi,\\ 3\varphi_2 + \varphi'_2 &= 2m'\ \pi,\\ 3\varphi_3 + \varphi'_3 &= 2m''\ \pi,\\ 3\varphi_4 + \varphi'_4 &= 2m'''\pi. \end{aligned}$$

D'où, en ajoutant membre à membre et en tenant compte de la première relation,

$$6\mu\pi + \varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_3 + \varphi'_4 = 2(m + m' + m'' + m''')\pi = 2M\pi,$$

donc

$$\varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_3 + \varphi'_4 = 2M\pi - 6\mu\pi = 2\pi(M - 3\mu) = 2K\pi,$$

ce qui prouve que les quatre points φ'_1, φ'_2, φ'_3, φ'_4 sont sur un même cercle. Ainsi :

Les cercles osculateurs en quatre points d'une ellipse situés sur un cercle ω rencontrent de nouveau l'ellipse en quatre points situés sur un cercle.

Transformons par rayons vecteurs réciproques, en plaçant le centre d'inversion :

1° Sur l'ellipse, mais ailleurs qu'aux points d'intersection du cercle ω avec l'ellipse. On a cette proposition :

Les cercles osculateurs en quatre points d'une cu-

bique unicursale circulaire (1) *situés sur un cercle rencontrent de nouveau la cubique en quatre points situés sur un cercle.*

2° En l'un des points de rencontre du cercle ω avec l'ellipse. Alors au cercle osculateur en ce point correspond l'asymptote réelle de la cubique. On a ce théorème :

Les cercles osculateurs en trois points d'une cubique unicursale circulaire situés sur une même droite rencontrent de nouveau la cubique en trois points : le cercle circonscrit au triangle formé par ces trois points passe par un point fixe de la cubique, qui est le point où elle rencontre son asymptote réelle.

3° En un point quelconque du plan. L'inverse est une quartique bicirculaire ayant un point double au pôle. Nous l'appellerons une *cyclique unicursale*. En transformant, on voit que :

Les cercles osculateurs en quatre points d'une cyclique unicursale situés sur un même cercle rencontrent de nouveau la cyclique en quatre points situés sur un même cercle.

II. Un point M, de paramètre φ étant pris sur une ellipse, son symétrique par rapport au centre a pour paramètre $\pi + \varphi$. Mais si l'on a

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2m\pi,$$

---

(1) Les inverses de l'ellipse, le centre d'inversion étant sur la courbe, sont en réalité des cubiques circulaires acnodales. Mais, comme les théorèmes que nous énonçons sont également vrais pour l'hyperbole, les résultats s'étendent aussi aux cubiques circulaires crunodales.

on a aussi

$$(\varphi_1+\pi)+(\varphi_2+\pi)+(\varphi_3+\pi)+(\varphi_4+\pi)=2m'\pi$$

et

$$(\varphi_1+\pi)+(\varphi_2+\pi)+\varphi_3+\varphi_4=2m''\pi;$$

donc :

Si quatre points d'une ellipse sont sur un cercle :

1° *Les symétriques de ces points par rapport au centre sont également sur un cercle ;*

2° *Deux quelconques des quatre points et les symétriques des deux autres par rapport au centre sont également sur un cercle.*

En transformant par inversion, le centre de l'ellipse devient un point déterminé du plan de la courbe inverse. On obtient des théorèmes faciles à énoncer.

En particulier, si le centre d'inversion est au centre de l'ellipse, la figure inverse est une cyclique unicursale ayant également le pôle pour centre. D'où ces théorèmes :

Lorsqu'une cyclique unicursale a son point double [1] *pour centre :*

1° *En coupant la courbe par un cercle, les symétriques des quatre points d'intersection par rapport au centre sont également sur un cercle;*

2° *Deux des points d'intersection et les symétriques des deux autres par rapport au centre sont également sur un cercle.*

III. Considérons quatre points d'une ellipse φ_1, φ_2,

---

[1] Le point double autre que les points cycliques. La lemniscate est un exemple de ces cycliques, mais la propriété s'applique aussi bien aux inverses d'hyperboles quelconques relativement au centre.

φ_3, φ_4 appartenant à un cercle, et par le point φ_1 menons les cercles tangents à l'ellipse en chacun des points φ_2, φ_3, φ_4, et soient θ_1, θ_2, θ_3 les paramètres des points où ces cercles rencontrent de nouveau l'ellipse ; on a les relations

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 &= 2m\pi, \\ \varphi_1 + 2\varphi_2 + \theta_1 &= 2m'\pi, \\ \varphi_1 + 2\varphi_3 + \theta_2 &= 2m''\pi, \\ \varphi_1 + 2\varphi_4 + \theta_3 &= 2m'''\pi. \end{aligned}$$

Ajoutant membre à membre les trois dernières égalités,

$$3\varphi_1 + 2(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \text{mult. } 2\pi,$$

ou

$$2(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + \varphi_1 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \text{mult. } 2\pi,$$

ou

$$4m\pi + (\varphi_1 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \text{mult. } 2\pi,$$

d'où

$$\varphi_1 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \text{mult. } 2\pi,$$

ce qui montre que les quatre points φ_1, θ_1, θ_2, θ_3 sont sur un même cercle. Ainsi :

Quatre points d'une conique étant situés sur un cercle, si, par l'un d'eux, A, *on mène les cercles tangents à la conique en chacun des trois autres, les trois nouveaux points où ces cercles rencontrent la conique sont, avec* A, *sur une même circonférence.*

Théorèmes identiques pour les cubiques unicursales circulaires et les cycliques unicursales.

Remarque. — Si le pôle d'inversion est placé en l'un des points d'intersection du cercle avec la conique, on retrouve ce théorème bien connu :

Les tangentes à une cubique (*circulaire unicursale*) *en ses points d'intersection avec une droite rencontrent de nouveau la cubique en trois points en ligne droite.*

IV. Considérons deux cercles quelconques rencontrant l'ellipse respectivement aux points

$$\mathrm{A, B, C, D}\,(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) \quad \text{et} \quad \mathrm{A', B', C', D'}(\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3, \varphi'_4).$$

Menons par A le cercle tangent à l'ellipse en A', par B le cercle tangent en B', ..., les quatre cercles ainsi tracés rencontrent de nouveau l'ellipse en quatre points $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$, et on a

$$\begin{aligned}
\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 &= 2m\,\pi,\\
\varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_3 + \varphi'_4 &= 2m'\pi,\\
\varphi_1 + 2\varphi'_1 + \theta_1 &= 2\mu\ \pi,\\
\varphi_2 + 2\varphi'_2 + \theta_2 &= 2\mu'\ \pi,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ajoutons membre à membre les quatre dernières relations,

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + 2(\varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_3 + \varphi'_4) + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = \text{mult. } 2\pi$$

ou

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = \text{mult. } 2\pi.$$

Par conséquent :

Deux cercles quelconques rencontrant une conique respectivement aux points A, B, C, D, A', B', C', D', *si l'on mène le cercle passant par* A *et tangent à la conique en* A', *le cercle passant par* B *et tangent en* B', ..., *les quatre cercles ainsi tracés rencontrent de nouveau la conique en quatre points situés sur un cercle.*

Théorèmes identiques pour les cubiques unicursales circulaires et les cycliques unicursales.

V. Quatre points d'une ellipse étant situés sur un cercle, par deux d'entre eux faisons passer un cercle, ainsi que par les deux autres. On aura

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2m\pi,$$
$$\varphi_1 + \varphi_2 + \theta_1 + \theta_2 = 2m'\pi,$$
$$\varphi_3 + \varphi_4 + \theta_3 + \theta_4 = 2m''\pi,$$

donc

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = \text{mult. } 2\pi.$$

Ainsi :

Quatre points d'une $\left\{\begin{array}{l}\textit{conique}\\ \textit{cubique unicursale circulaire}\\ \textit{cyclique unicursale}\end{array}\right\}$ *étant situés sur un cercle, si par deux d'entre eux on fait passer un cercle, ainsi que par les deux autres, les quatre nouveaux points de rencontre avec la courbe sont sur un cercle.*

VI. Si, par deux points fixes A, B d'une conique, on fait passer une série de cercles, les secondes cordes d'intersection avec la conique sont parallèles entre elles. Transformons cette propriété par rayons vecteurs réciproques :

Si autour d'un point fixe d'une cubique unicursale circulaire on fait pivoter une sécante, le cercle passant par le point double et les deux autres points d'intersection de la sécante avec la courbe ont leurs centres en ligne droite.

Si par deux points fixes A, B *d'une* $\left\{\begin{array}{l}\textit{cyclique unicursale}\\ \quad\textit{circulaire}\\ \textit{cyclique unicursale}\end{array}\right\}$ *on fait passer une série de cercles, les cercles passant par le point double et les deux autres points d'intersection de chaque cercle avec la courbe ont le même axe radical.*

VII. Par deux points fixes φ_1, φ_2 d'une ellipse, faisons passer des cercles, et par les deux autres points d'intersection φ_3, φ_4, ainsi que par un point fixe A de l'ellipse, faisons passer des cercles; soit x le quatrième point d'intersection avec l'ellipse. On a

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2m\pi,$$
$$\varphi_3 + \varphi_4 + \theta_1 + x = 2m'\pi,$$

θ_1 désignant le paramètre du point A; d'où

$$x = 2(m' - m) + \varphi_1 + \varphi_2 - \theta_1.$$

Les points φ_1, φ_2, θ_1 étant fixes, les valeurs de x obtenues ne diffèrent entre elles que d'un multiple de 2π, le point x est fixe sur l'ellipse. Ainsi :

Si, par deux points fixes d'une ellipse, on fait passer des cercles; si, par les deux points d'intersection de ces cercles avec l'ellipse et un point fixe A *de la courbe, on fait passer des cercles; ces derniers cercles passent par un quatrième point fixe de l'ellipse.*

Transformons par inversion :

Si, par deux points fixes d'une $\left\{\begin{matrix}\textit{cubique unicursale}\\ \textit{circulaire}\\ \textit{cyclique unicursale}\end{matrix}\right\}$ *on fait passer des cercles, les cercles passant par les deux nouveaux points d'intersection et par un point fixe* A *de la courbe passent par un autre point fixe de cette courbe.*

Si le centre d'inversion est en l'un des deux premiers points fixes de la conique, on a ce théorème :

Si, autour d'un point fixe d'une cubique unicursale circulaire on fait pivoter une sécante, les cercles, passant par un point fixe A *de la cubique et par les deux* *autres points d'intersection de la cubique avec la sécante, passent par un même point fixe situé sur la courbe.*

Si le centre d'inversion était au point A de l'ellipse, on retrouverait cette proposition connue, et vraie pour une cubique circulaire non unicursale :

Si, par deux points fixes de la courbe on fait passer une série de cercles, les cordes d'intersection de ces cercles avec la cubique passent par un point fixe situé sur elle.

VIII. Voici l'énoncé, plus correct, des trois théorèmes remarquables que nous avons obtenus :

1° *Les cercles osculateurs à une conique en quatre points concycliques rencontrent de nouveau la conique en quatre points concycliques.*

2° *Les cercles osculateurs à une cubique unicursale circulaire en trois points collinéaires rencontrent la cubique en trois points concycliques avec le point de section.*

3° *Les cercles osculateurs à une* $\left\{\begin{array}{c}\textit{cubique unicursale}\\ \textit{circulaire}\\ \textit{cyclique unicursale}\end{array}\right\}$ *en quatre points concycliques rencontrent de nouveau la courbe en quatre points concycliques* (¹).

(¹) Ce théorème, énoncé pour la strophoïde et la lemniscate par M. Balitrand, est donc loin de s'appliquer à ces seules courbes.

SUR LES QUADRIQUES INSCRITES DANS LA MÊME DÉVELOPPABLE;

Par M. André CAZAMIAN.

On sait que le système des quadriques passant par la courbe d'intersection de deux quadriques données est coupé par un plan quelconque suivant un système de coniques passant par quatre points fixes. Les pôles doubles de ce faisceau de coniques sont les points de contact des trois quadriques du système tangentes au plan considéré, de sorte que l'on peut dire que les quadriques passant par les points communs à deux quadriques données sont coupées par un plan quelconque suivant des coniques conjuguées à un même triangle.

Ce fait, que les quadriques d'un faisceau sont coupées par un plan quelconque suivant des coniques formant un faisceau, conduit à d'intéressantes propositions. On voit d'abord immédiatement que le théorème de Desargues s'étend intégralement à l'espace :

Les quadriques passant par les points communs à deux quadriques données déterminent une involution sur une droite quelconque. Les points doubles de l'involution sont les points de contact des deux quadriques du système tangentes à la droite donnée.

En transformant par dualité, nous avons le théorème suivant :

Les plans tangents menés par une droite D *aux quadriques inscrites dans la même développable forment un faisceau involutif. Les plans doubles de l'involution* *sont les plans tangents aux deux quadriques du système qui touchent la droite* D.

Corollaire. — *Les plans tangents menés par une droite à deux quadriques homofocales font des angles égaux avec deux plans fixes passant par la droite.*

En effet, les plans doubles de l'involution étant alors rectangulaires, tous les couples de plans du faisceau involutif admettent les mêmes plans bissecteurs : ce sont ces plans doubles. En particulier :

Les plans tangents menés par une droite à une quadrique sont également inclinés sur les plans tangents menés par cette droite à une focale de la quadrique.

C'est l'analogue du théorème de Poncelet relatif aux tangentes menées par un point à une conique.

Transformons maintenant par dualité le théorème que nous avons énoncé au début :

Les cônes ayant pour sommet un même point P *de l'espace et circonscrits aux quadriques inscrites dans la même développable touchent les quatre faces d'un même angle tétraèdre. Les plans diagonaux de l'angle tétraèdre complet* (¹) *sont les plans tangents aux trois quadriques du faisceau qui passent en* P.

Corollaires. — Ce théorème a d'intéressants corollaires :

1° *Les cônes de même sommet* P *circonscrits à un faisceau de quadriques inscrites dans la même déve-*

(¹) Par analogie, on pourrait appeler *angle tétraèdre complet* la figure formée par quatre plans passant par un même point, figure que l'on obtient en joignant un point de l'espace aux six sommets d'un quadrilatère complet.

loppable sont conjugués à un même trièdre, qui est le trièdre formé par les plans tangents aux quadriques du faisceau passant en P.

Ce théorème peut encore s'énoncer ainsi :

Les cônes Σ *de sommet* P *circonscrits aux quadriques inscrites dans la même développable ont un même système de diamètres triplement conjugués;*

2° *Les coniques sections par un plan des cônes* Σ *sont inscrites dans un même quadrilatère ;*

3° *Les points où les arêtes du trièdre formé par les plans tangents aux quadriques d'un système tangentiel coupent le plan d'une des quatre coniques du système forment un triangle conjugué à cette conique.*

Applications. — Supposons que l'une des quatre coniques du système des quadriques inscrites dans la même développable soit l'ombilicale, nous aurons alors affaire à un système de quadriques homofocales. Les théorèmes précédemment énoncés permettent de retrouver dans ce cas particulier des théorèmes bien connus. Ainsi, le cône isotrope de sommet P faisant partie du système des cônes Σ, le trièdre conjugué commun T sera trirectangle : donc *les quadriques homofocales à une quadrique qui passent par un point* P *sont orthogonales.* De plus, les cônes Σ auront les mêmes axes, puisque les sections par le plan de l'infini, qui sont des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscrit à l'ombilicale, ont un triangle conjugué commun avec ce cercle. Ces axes seront les arêtes du trièdre formé par les plans tangents aux trois quadriques de la famille qui passent en P, donc : *Les axes d'un cône circonscrit à une quadrique sont les normales aux trois quadriques homofocales qui passent par le sommet.*

Le corollaire n° 3 nous conduit à cette proposition, qui est due à Chasles :

Les axes d'un cône circonscrit à une quadrique rencontrent un plan principal en trois points formant un triangle conjugué à la focale située dans ce plan.

Enfin, il est très facile de démontrer que les cônes Σ, qui ont les mêmes axes, sont aussi homofocaux. En effet, les droites focales d'un cône de sommet P sont, comme l'on sait, les perpendiculaires menées par P aux plans de sections circulaires du cône supplémentaire. Or, un cône supplémentaire d'un cône quelconque rencontre le plan de l'infini suivant une conique polaire réciproque par rapport à l'ombilicale de la section du cône donné. Mais, dans le cas considéré, le système des cônes Σ rencontre le plan de l'infini suivant des coniques C, parmi lesquelles se trouve l'ombilicale, conjuguées à un même triangle T. La polaire réciproque d'une conique C par rapport à l'ombilicale sera une autre conique conjuguée au triangle réciproque de T, c'est-à-dire au même triangle. Il en résulte que le système des cônes Σ et le système de leurs cônes supplémentaires ont les mêmes axes, et par suite les mêmes plans cycliques. Donc les cônes Σ ont les mêmes focales.

De ce qui vient d'être dit, on peut déduire le théorème suivant :

Un cône étant circonscrit à une quadrique, son supplémentaire est circonscrit à une quadrique homofocale.

Remarque. — Deux des théorèmes énoncés au début peuvent encore se formuler ainsi :

Toutes les quadriques passant par huit points quel-

conques de l'espace déterminent une involution sur une droite quelconque.

Les plans tangents menés par une droite aux quadriques tangentes à huit plans forment un faisceau involutif.

Ainsi énoncés, ces théorèmes sont presque évidents *a priori*.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES POSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1893;

Par M. GENTY.

On considère un hyperboloïde à une nappe H *et le cône* S *qui est l'enveloppe des plans normaux aux génératrices de cet hyperboloïde menés par un point donné* M.

1° *Déterminer les sommets du tétraèdre* $MM_1M_2M_3$ *conjugué par rapport à toutes les quadriques qui passent par l'intersection de l'hyperboloïde* H *et du cône* S.

Trouver le lieu C *des sommets* M_1, M_2, M_3 *de ce tétraèdre lorsque, le point* M *restant fixe, l'hyperboloïde* H *se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné.*

2° *Trouver la surface engendrée par la ligne* C *lorsque le point* M *décrit une droite donnée* D, *et déterminer les positions qu'il faut donner à cette droite* D *pour que cette surface soit de révolution.*

3° *Déterminer les coordonnées du centre* ω *de la sphère circonscrite au tétraèdre* $MM_1M_2M_3$ *en fonc-*

tion des coordonnées du point M *pour un hyperboloïde donné* H.

Trouver le lieu de ce centre ω *lorsque, le point* M *restant fixe, l'hyperboloïde* H *se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné.*

4° *Démontrer que la droite qui joint le centre* ω *de la sphère circonscrite au tétraèdre* $MM_1M_2M_3$ *au centre de gravité* G *de ce tétraèdre passe par un point fixe* I *lorsque, le point* M *restant fixe, l'hyperboloïde* H *se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné, et faire voir que le point* G *est le milieu de* ωI.

1° Soient

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

l'équation de l'hyperboloïde H; x', y' et z' les coordonnées du point M; l'équation du cône S sera

$$\frac{(x-x')^2}{A} + \frac{(y-y')^2}{B} + \frac{(z-z')^2}{C} = 0,$$

et, si l'on désigne par α, β, γ les coordonnées de l'un des sommets du tétraèdre autopolaire commun à l'hyperboloïde et au cône, les plans polaires de ce point par rapport aux deux surfaces auront respectivement pour équations

$$A\alpha x + B\beta y + C\gamma z = 1,$$

$$\frac{(\alpha - x')(x-x')}{A} + \frac{(\beta - y')(y-y')}{B} + \frac{(\gamma - z')(z-z')}{C} = 0.$$

Ces deux équations devant être identiques, on aura

$$\frac{A^2\alpha}{\alpha - x'} = \frac{B^2\beta}{\beta - y'} = \frac{C^2\gamma}{\gamma - z'} = \frac{1}{\dfrac{x'(\alpha - x')}{A} + \dfrac{y'(\beta - y')}{B} + \dfrac{z'(\gamma - z')}{C}} = t,$$

ou encore

$$(1)\qquad \alpha = \frac{tx'}{t - A^2}, \qquad \beta = \frac{ty'}{t - B^2}, \qquad \gamma = \frac{tz'}{t - C^2},$$

$$(2)\qquad A\alpha x' + B\beta y' + C\gamma z' = 1.$$

Si l'on regarde t comme un paramètre arbitraire, les équations (1) représentent une cubique gauche C, et l'équation (2) le plan polaire du point M par rapport à l'hyperboloïde.

Les points cherchés M_1, M_2 et M_3 sont les points de la cubique situés dans ce plan, et les valeurs correspondantes de t sont les racines de l'équation

$$\frac{Ax'^2 t}{A^2 - t} + \frac{By'^2 t}{B^2 - t} + \frac{Cz'^2 t}{C^2 - t} + 1 = 0.$$

Si dans les équations (1) nous remplaçons A, B et C par kA, kB et kC respectivement, elles représenteront évidemment encore la même courbe. Donc la cubique gauche C est le lieu des points M_1, M_2 et M_3, lorsque l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné. Cette courbe passe à l'origine pour $t = 0$, au point M pour $t = \infty$, et ses asymptotes sont parallèles aux axes de l'hyperboloïde.

2° Si dans les équations de la cubique C nous remplaçons x', y' et z' par $x' + kX$, $y' + kY$ et $z' + kZ$ respectivement, X, Y et Z étant les cosinus directeurs d'une droite D, elles deviennent

$$\alpha = \frac{t(x' + kX)}{t - A^2}, \qquad \beta = \frac{t(y' + kY)}{t - B^2}, \qquad \gamma = \frac{t(z' + kZ)}{t - C^2}$$

ou

$$A^2\alpha + t(x' - \alpha) + ktX = 0,$$
$$B^2\beta + t(y' - \beta) + ktY = 0,$$
$$C^2\gamma + t(z' - \gamma) + ktZ = 0.$$

En éliminant k et t entre ces équations, il vient

$$\begin{vmatrix} A^2\alpha & B^2\beta & C^2\gamma \\ X & Y & Z \\ \alpha - x' & \beta - y' & \gamma - z' \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{aligned}(B^2 - C^2)X\beta\gamma + (C^2 - A^2)Y\gamma\alpha + (A^2 - B^2)Z\alpha\beta \\ + A^2\alpha(Yz' - Zy') + B^2\beta(Zx' - Xz') \\ + C^2\gamma(Xy' - Yx') = 0,\end{aligned}$$

équation d'un hyperboloïde équilatère, qui contient la droite D et passe par l'origine.

Pour que cet hyperboloïde soit de révolution, il faut qu'on ait

$$\pm(B^2 - C^2)X = \pm(C^2 - A^2)Y = \pm(A^2 - B^2)Z,$$

équation de quatre directions fixes.

L'hyperboloïde, lieu des cubiques gauches C, sera donc de révolution quand le point M parcourra une droite parallèle à l'une de ces directions.

3° Si nous portons l'origine au point M, les équations qui déterminent les points M_1, M_2 et M_3 deviennent

$$(3)\qquad h^2yz + B^2y'z - C^2z'y = 0,$$
$$(4)\qquad k^2zx + C^2z'x - A^2x'z = 0,$$
$$(5)\qquad l^2xy + A^2x'y - B^2y'x = 0,$$
$$Axx' + Byy' + Czz' - S = 0,$$

où l'on a posé

$$h^2 = B^2 - C^2, \qquad k^2 = C^2 - A^2, \qquad l^2 = A^2 - B^2,$$
$$S = 1 - Ax'^2 - By'^2 - Cz'^2.$$

L'équation générale des quadriques circonscrites au tétraèdre $MM_1M_2M_3$ est alors de la forme

$$\begin{aligned}\lambda(h^2yz + B^2y'z - C^2z'y) + \mu(k^2zx + C^2z'x - A^2x'z) \\ + \nu(l^2xy + A^2x'y - B^2y'x) \\ + (mx + ny + pz)(Axx' + Byy' + Czz' - S) = 0.\end{aligned}$$

Les conditions pour que cette quadrique soit une sphère sont

$$\begin{aligned}
&A m x' = B n y' = C p z',\\
&\lambda h^2 + B p y' + C n z' = 0,\\
&\mu k^2 + C m z' + A p x' = 0,\\
&\nu l^2 + A n x' + B m y' = 0.
\end{aligned}$$

On peut prendre pour la valeur commune des coefficients de x^2, y^2 et z^2 l'expression $ABCx'y'z'$, et alors on a

$$m = BCy'z', \qquad n = CAz'x', \qquad p = ABx'y',$$

$$\lambda = -\frac{Ax'(B^2y'^2 + C^2z'^2)}{h^2},$$

$$\mu = -\frac{By'(C^2z'^2 + A^2x'^2)}{k^2},$$

$$\nu = -\frac{Cz'(A^2x'^2 + B^2y'^2)}{l^2};$$

et si l'on désigne par x_ω l'abscisse du centre ω de la sphère circonscrite au tétraèdre $MM_1M_2M_3$, on aura

$$x_\omega = \frac{Cl^2(C^2z'^2 + A^2x'^2) - Bk^2(A^2x'^2 + B^2y'^2) + l^2k^2(1 - Ax'^2 - By'^2 - Cz'^2)}{2Al^2k^2x'};$$

les expressions de y_ω et de z_ω se déduiront de celle de x_ω par une simple permutation circulaire.

Si maintenant, dans l'équation qui précède, on remplace A, B et C par tA, tB et tC, respectivement, il vient

$$x_\omega = \frac{\left\{\begin{array}{l} t[Cl^2(C^2z'^2 + A^2x'^2) - Bk^2(A^2x'^2 + B^2y'^2) \\ \qquad - l^2k^2(A^2x'^2 + B^2y'^2 + C^2z'^2)] + l^2k^2 \end{array}\right\}}{2tAl^2K^2x'}.$$

Donc, lorsque l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné, le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $MM_1M_2M_3$ décrit une droite.

4° Cherchons maintenant le centre de gravité G de ce tétraèdre.

Si nous portons dans l'équation (5) les valeurs de y et de z tirées des équations (3) et (4), il vient

$$\mathrm{A}xx' + \frac{\mathrm{B}^3 y'^2 x}{\mathrm{A}^2 x' + l^2 x} + \frac{\mathrm{C}^3 z'^2 x}{\mathrm{A}^2 x' - k^2 x} - \mathrm{S} = 0;$$

et si x_1, x_2 et x_3 sont les racines de cette équation et x_G l'abscisse du point G, on aura

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4},$$

ou

$$x = \frac{\mathrm{A}^3 x'^2 (l^2 - k^2) - \mathrm{B}^3 k^2 y'^2 + \mathrm{C}^3 l^2 z'^2 + l^2 k^2 (1 - \mathrm{A}x'^2 - \mathrm{B}y'^2 - \mathrm{C}z'^2)}{4\mathrm{A}\, l^2 k^2 x'};$$

on obtiendrait y_G et z_G par une permutation circulaire.

Si, dans l'expression de x_G, on remplace A, B et C par tA, tB et tC, respectivement, il vient

$$x_G = \frac{t[\mathrm{A}^3 x'^2 (l^2 - k^2) - \mathrm{B}^3 k^2 y'^2 + \mathrm{C}^3 l^2 z'^2 - l^2 k^2 (\mathrm{A}x'^2 + \mathrm{B}y'^2 + \mathrm{C}z'^2)] + l^2 k^2}{4t\mathrm{A}\, l^2 k^2 x'};$$

on voit donc que le lieu du point G est aussi une droite.

On reconnaît immédiatement que l'expression $2x_G - x_\omega$ est indépendante de t; donc, lorsque l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné, la droite ωG passe par un point fixe I et le point G est le milieu de ωI. En d'autres termes, le centre de l'hyperboloïde des hauteurs du tétraèdre $\mathrm{MM_1M_2M_3}$ est un point fixe.

Note. — Solution analogue par M. Gambey. M. Leinekugel, élève ingénieur hydrographe de la Marine, nous a envoyé une solution analytique et une solution géométrique d'une généralisation de cette même question. Nous donnerons sa solution géométrique dans le prochain numéro.

AUGUSTE COMTE EXAMINATEUR D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE [1];

PAR M. PIERRE LAFFITE,
Professeur au Collège de France.

DOUTRES, 19 ans (de $9^h 15^m$ à $10^h 45^m$).

1° *Inscrire un carré dans un triangle.*

Il expose bien la formule et la construction ordinaire : invité à classer les trois solutions, il finit par reconnaître que cela dépend du minimum de la somme de deux quantités dont le produit est constant et trouve péniblement ce minimum et ne sait point en déduire son classement. (*Moderately.*)

2° *Comparaison de la sphère au cylindre équilatéral inscrit.*

Il détermine bien ce rapport; invité à déterminer si ce cylindre est le plus grand inscriptible, il ne peut y parvenir et ne saisit pas même le principe de la solution. (*Weakly.*)

3° *Analyse de l'équation* $x^3 - cx^2 - x + 3 = 0$, *en prenant* c *pour que les racines soient en progression arithmétique.*

Il égale les coefficients à leur formule en a, $a+\delta$, $a+2\delta$, afin de déterminer c, a et δ. Il tombe sur une fausse équation en c, du troisième degré, et la discute assez couramment, mais d'une manière très vulgaire qui n'aboutit à rien; il ne pense pas seulement au principe des racines communes. Invité à reprendre la question, en supposant que la raison doive être 2, il suit absolument la même marche; mais, parvenant à une équation du second degré en c, il peut achever la question. (Il a calculé très rapidement, mais entend faiblement l'Algèbre. (*Enough well.*)

4° *Lieu des sommets des hyperboles ayant une même asymptote et un même foyer.*

Plaçant l'origine au foyer et un axe parallèle à l'asymptote, il forme très rationnellement et avec rapidité l'équation du système. Prenant pour caractère du sommet que la normale y

---

[1] *Voir* même Tome, p. 65 et 113.

passe au centre, il achève très bien la solution. (Il sait, et même comprend fort bien la Géométrie analytique). (*Very well.*)

5° *Équilibre d'un système plan quelconque.*

Exposition claire et rapide de la théorie ordinaire qui a bien l'air d'une récitation, car il ne peut faire l'analyse de cet équilibre et comprend à peine la question. (*Sufficiently.*)

6° *Discussion de la courbe* $y^2 = \dfrac{x^3 + x^2}{x - 1}$.

Il discute bien et rapidement l'ordonnée et presque aussi bien la tangente. Il assigne très exactement la courbe. (*Very well.*)

(Cette question a été faite pour s'assurer si la facilité du candidat à la question 4 tenait à sa valeur intrinsèque ou à ce qu'il aurait été dressé à ce genre de questions depuis l'ouverture des examens (+ +).

Quoique sachant un peu imparfaitement l'Algèbre (qui lui a sans doute été très étroitement enseignée), ce candidat, par ses réponses en Géométrie analytique, témoigne d'une véritable portée et d'une bonne instruction. (Très admissible et probablement inscriptible entre Blondeau et Masquelez.)

DESCHAMPS, 21 ans (de midi à $1^h 45^m$).

1° *Décomposer un produit donné en deux facteurs dont la somme soit donnée.*

Il résout bien l'équation et explique convenablement l'unité de solution malgré la double valeur. Il discute bien le cas du minimum. Il conçoit nettement l'équivalent géométrique du problème, et, après quelques hésitations, retrouve très bien sur la figure le cas du minimum par une construction évidemment spontanée (tang$a$ cot$a$ = const.). (*Very well.*)

2° *Mesure du prisme tronqué.*

Il expose très bien la démonstration ordinaire. Il en déduit très directement la transformation en prisme entier par la considération du centre de gravité. Enfin, invité à mesurer un prisme tronqué à base quelconque, il suit fort judicieusement cette dernière idée et trouve parfaitement, d'après le théorème des moments, la règle générale inconnue. (*Extremely well.*)

3° *Analyse de l'équation* $x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 24x + 16 = 0$, *une racine étant double d'une autre.*

Il tire d'abord de la règle des signes tous les renseignements qu'elle peut fournir. Changeant ensuite x en $2x$, il cherche les racines communes. Il les trouve fort exactement et, par suite, les deux autres, sauf une légère erreur de principe où il croit que deux racines imaginaires conjuguées peuvent être doubles l'une de l'autre. (*Well.*)

4° *Lieu des foyers des hyperboles ayant une asymptote commune et un sommet commun.*

Prenant pour axes l'asymptote et la perpendiculaire menée du sommet, il forme assez heureusement, par une transformation d'axes, l'équation du système, en partant de l'équation de l'hyperbole à ses axes principaux. Il réduit convenablement cette équation à ne contenir qu'une seule constante arbitraire ; continuant ensuite la solution dans le même esprit, il exprime distinctement, par la figure, les coordonnées du foyer, par rapport à ces axes, en fonction de cette dernière constante, sans s'apercevoir que tout ce préambule antérieur devenait ainsi superflu. Il trouve ainsi l'équation

$$x = -d \pm \frac{dy}{\sqrt{y^2 - d^2}} \cdot \text{ (\textit{Well.})}$$

Dans la discussion de cette courbe, où il examine assez bien l'ordonnée et trouve les quatre asymptotes, on voit qu'il n'a aucune habitude élevée et rationnelle d'une telle analyse, ce qui tient certainement à son professeur bien plus qu'à lui. (*Less well.*)

(Cette question montre que le candidat a été trop mesquinement enseigné en Géométrie analytique et ne prouve rien contre sa force intrinsèque, qui est certainement très remarquable, surtout pour la suite rigoureuse et persévérante de ses idées.)

5° *Transformation fondamentale des couples.*

Exposition claire et convenable, toutefois sans rien de saillant. (*Well.*) (+ +).

Ce candidat, fort admissible, a de la justesse et une grande vigueur logique, quoique son éducation mathématique ait été évidemment dirigée d'une manière trop subalterne. (A classer probablement entre Hérard et Sewrin.)

HULOT D'OSERY, 18 ans (de $9^h 20^m$ à $11^h 20^m$).

1° *Comparaison des aires semblables.*

Exposition claire et facile du cas des triangles. Invité à montrer la décomposition effective du grand triangle en éléments égaux au petit suivant la loi énoncée, il y parvient très bien. Il étend très bien le théorème à des polygones quelconques et remplace fort bien le côté par des lignes homologues quelconques. Enfin, il l'étend parfaitement *a priori* à tous les cas de figures semblables, même curvilignes. Il vérifie très clairement la similitude des cercles. (*Extremely well.*)

2° *Dimension d'un bol d'après son volume et sa surface courbe.*

Il forme très bien l'équation du sixième degré en prenant pour inconnue la hauteur de la calotte et le rayon de sa base et réduit l'équation au troisième degré. Une erreur de calcul lui donne une équation dont il finit par apercevoir, sur avertissement, en la discutant, le désaccord avec la nature de la question. Il réforme l'équation en prenant pour inconnue la hauteur et la discute alors très bien en harmonie avec la question. Il saisit très bien *a posteriori* la liaison du maximum avec le cas des racines égales et le montre même *a priori* par les dérivées et aussi, avec un peu d'aide, indépendamment des dérivées et d'une manière directe. Il achève alors très bien la détermination de la base minimum. (*Very well.*)

3° *Construction de l'équation précédente*

$$2x^3 - 3a^2x + 8b^3 = 0.$$

Il montre assez bien *a priori*, par les situations relatives d'une parabole et d'un cercle, la possibilité de construire toute équation de ce genre avec ces deux courbes. Il effectue ensuite très convenablement la construction. Invité à retrouver le cas du maximum sur la figure, il cherche la condition pour que les deux courbes aient, en un point commun, une même tangente et trouve très bien. (*Well.*)

4° *Équation de l'épicycloïde plane à cercles égaux.*

Il finit, avec un peu d'aide, par trouver sur la figure la nature de la courbe dans le cas le plus simple; il ne peut réussir pour l'autre par les coordonnées polaires, mais s'en tire convenablement ensuite par les coordonnées rectilignes. D'après son mode de calcul, l'équation finale doit comprendre les deux cas; il indique suffisamment le mode final de dégagement du premier cas. (*Well.*)

5° *Équilibre d'un poids sur un plan.*

Il expose très bien le principe, ainsi que les principales conditions de stabilité et les modifications relatives au frottement, à l'égard duquel il assigne bien le maximum d'escarpement du plan compatible avec l'équilibre. (*Well.*) (+ +).

Ce candidat est fort intelligent et convenablement instruit. (A classer probablement entre Johannys et Hérard).

LECORREUR, 20 ans (de 3^h30^m à 5^h30^m).

1° *Chemin minimum sur la sphère : le tracer entre deux points donnés sur un globe dont le rayon n'est pas déjà connu.*

Il démontre bien la nature du chemin sans recourir à l'absurde. Invité à assigner quel serait le chemin sur un cylindre, il assigne très bien et sur-le-champ l'hélice ; sur un cône, et même sur une surface développable quelconque, il assigne directement le principe général. (*Very well.*)

Il résout très bien la seconde partie de la question. Invité à décider si, dans les mappemondes, le chemin minimum est généralement représenté par la droite joignant les deux points, il reconnaît très bien la méprise, et assigne judicieusement presque tous les cas exceptionnels. (*Very well.*)

2° *Route d'une bille qui, partant d'une position donnée, passerait par une autre position donnée, après une seule réflexion sur un billard elliptique.*

Il reconnaît fort bien et presque sur-le-champ que la question revient à tracer une ellipse ayant pour foyers les deux points donnés et tangente à l'ellipse donnée. Il met très bien le problème en équation, pour déterminer le grand axe et l'ellipse auxiliaire, en exprimant que les deux courbes ont, au même point, une même tangente. Invité à simplifier son calcul pour le cas où les deux points seraient sur le grand axe du billard, il choisit les axes naturels et préfère alors judicieusement exprimer le contact par le principe des racines égales : il forme finalement l'équation du grand axe de l'ellipse idéale. Il analyse aussi très judicieusement, après quelque hésitation, la nature des cas exceptionnels et la manière dont ils seraient indiqués algébriquement, sauf une erreur grave sur le symptôme du cas d'impossibilité. (Il paraît mieux connaître qu'aucun autre candidat jusqu'ici le principe de cette décision *a priori;* mais il l'applique très mal au cas actuel; l'ensemble de la réponse est cependant très bon.) (*Well.*)

3° *Théorème de Descartes.*

Exposition confuse de la démonstration ordinaire, faute d'avoir suffisamment analysé le mode de succession des signes du multiplicande au produit par $x - a$. Il entend d'ailleurs l'esprit de la règle, et son usage indicateur des racines imaginaires. Il n'explique pas d'ailleurs plus judicieusement que les précédents la principale difficulté à l'égard des équations incomplètes.

A l'égard de l'équation $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$, il ne peut assigner aussi la nature des racines, malgré quelques tentatives mal conçues. (*Weakly.*)

4° *Discussion de la courbe* $y = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$.

Il discute bien l'ordonnée et assez bien la tangente : il en tire l'asymptote et la vérifie très bien, en découvrant même le point où elle est le plus loin de la courbe. Après avoir reconnu que l'origine est à la fois centre et point d'inflexion, il s'aperçoit que la courbe doit avoir encore d'autres inflexions et les détermine fort bien par le minimum d'inclinaison de la tangente. (*Very well.*)

Les deux minima ont été heureusement déterminés par la méthode purement algébrique élémentaire.

5° *Équilibre d'un poids soutenu par deux points sur deux plans.*

Il explique bien l'une des deux conditions, et d'abord très mal l'autre, au sujet de laquelle il finit par se rectifier spontanément après un avertissement réitéré. Invité à placer immédiatement une sphère homogène dans la situation d'équilibre, il finit par y parvenir après quelque hésitation. (*Enough well.*) (+ +).

Il est évidemment assez intelligent et assez instruit, malgré un peu de vague dans ses habitudes intellectuelles, pour être hautement admissible. (Entre Labbé et Masquelez probablement.)

De Tournadre, 19 ans (de $10^h 15^m$ à $11^h 50^m$).

1° *Centre de gravité d'un tétraèdre.*

Exposition convenable de la démonstration d'après les moments des prismes composants. Il démontre bien que le centre du tétraèdre coïncide avec celui des sommets et en déduit les coordonnées; il en déduit aussi très bien la simplification de la construction primitive. (*Very well.*)

2° *Inscrire, dans une sphère donnée, un cylindre équivalent à une autre sphère donnée.*

Il forme convenablement l'équation en prenant pour inconnue la demi-hauteur. Il discute faiblement l'équation au point de dire d'abord que les trois racines pourraient être négatives, qu'il rectifie cependant sur avertissement. Par l'expression de la condition de réalité, il sépare correctement les cas d'impossibilité et de possibilité; mais il a peine à constater sur l'équation, par la voie des substitutions, que les deux racines positives, en cas de possibilité, sont moindres que r : cependant il finit par y parvenir après plusieurs essais mal dirigés. Il ne montre qu'imparfaitement sur la figure l'existence rigoureuse de la double solution. Invité à déterminer le cylindre maximum, il veut y employer le Calcul différentiel; mais, rappelé à la question, il reconnaît que le maximum correspond à une racine double de son équation; il le démontre bien *a priori* par les courbes, et le vérifie convenablement *a posteriori* d'après la condition de réalité. Il a quelque peine ensuite à poursuivre cette idée (qui, chez lui, est sans doute très fraîche et imparfaitement saisie) pour trouver les dimensions effectives du cylindre maximum, qu'il assigne cependant avec exactitude. Il paraît cependant croire *a priori* que ce cylindre devrait être équilatéral et, quoique convaincu du contraire par le résultat, il ne le vérifie que difficilement sur la figure; toutefois, il y parvient, en employant spontanément la règle de Guldin. (*Well.*)

3° *Hyperbole par* 1 *directrice,* 2 *tangentes et* 1 *droite contenant le centre.*

Prenant la directrice pour l'un des axes, il exprime que les distances de chaque point de la courbe à cette droite et au foyer sont proportionnelles. Il traduit ensuite convenablement en analyse toutes les autres conditions. (*Well.*)

Invité d'assigner les cas d'impossibilité, il les analyse imparfaitement et avec peine, mais, quoique les cas qu'il a reconnus soient très précis, il se trompe sur le symptôme algébrique de cette impossibilité. (*Weakly.*)

Invité enfin à trouver le lieu des centres en supprimant la dernière condition, il ne peut y parvenir, quoique ses équations le lui fournissent clairement. (Pour l'ensemble de la question : *enough well.*)

Ce candidat est certainement assez intelligent et assez instruit pour être déclaré admissible. (A placer vraisemblablement entre Masquelez et Doutres ou entre Doutres et Bonfillion.)

VALLÉE, 18 ans (de $3^h 40^m$ à $5^h 40^m$).

1° *Inscription du décagone régulier.*

Il explique bien la loi ordinaire et la construction qui en résulte. Il ne déduit que péniblement de la figure la valeur du côté d'après le rayon et la montre conforme à celle que donne le calcul direct. (*Well.*)

2° *Triangle minimum circonscriptible à un cercle donné.*

Il voit d'abord très bien que le minimum en surface coïncide avec celui en contour. Mais il fait ensuite de vains essais de calcul, d'après la formule du rayon inscrit, qui ne peuvent aboutir à rien. Il ne soupçonne pas l'esprit général de la méthode de réduction du minima de plusieurs variables à une seule, quoiqu'il paraisse savoir les règles analytiques à ce sujet. (*Weakly.*)

3° *Théorème de Descartes.*

Il paraît comprendre, quoique un peu embarrassé dans l'exposition, la démonstration ordinaire. Il explique bien les différents sens de la proposition, son usage indicateur de racines imaginaires chez les équations incomplètes. Il l'applique bien aux équations binomes. Invité à prononcer ainsi sur la nature des racines de $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$, il ne pense pas à faire disparaître le second terme et cependant il résout bien la question; à l'égard de l'équation $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$, il voit, par le même moyen, qu'il y a deux racines imaginaires. Il pense enfin spontanément à multiplier par $x + 1$ et reconnaît aussitôt que toutes les racines sont imaginaires. Il généralise ce dernier expédient à peu près autant que possible. (*Well.*)

4° *Lieu du sommet d'un triangle rectangle invariable, dont l'hypoténuse est constamment corde d'un cercle donné.*

Il forme bien le plan de la solution en exprimant toutes les conditions de la question, mais par des équations trop compliquées qui rendraient à peu près inexécutables les éliminations des quatre coordonnées des extrémités de l'hypoténuse, qu'il a introduites comme variables auxiliaires. Invité alors à discuter *a priori* la courbe autant que possible, il reconnaît très bien que le lieu est composé de deux cercles concentriques d'où résulterait immédiatement l'équation. Il signale aussi avec sagacité les divers cas singuliers. (*Very well.*)

5° *Rectangle maximum inscriptible à une ellipse donnée.* Il prend la question d'une manière très rationnelle, en formant les équations des quatre côtés, de manière à exprimer leurs situations relatives et leurs contacts communs. Il formule ainsi très bien l'aire du rectangle d'après sa direction. Invité alors à chercher le maximum par la méthode élémentaire (quoiqu'il voulût appliquer la règle différentielle), il voit très bien qu'il dépend de l'existence d'une racine double dans son équation bicarrée, et achève la solution sans s'être trompé une seule fois dans le cours des longs calculs qu'il a faits; ce qui est très remarquable pour un esprit un peu brouillon. Invité enfin à chercher sur la figure, par une considération géométrique spéciale, le rectangle maximum, il l'y marque très bien après avoir été un peu mis sur la voie. Il indique aussi fort bien le cas du minimum, soit par la figure, soit par l'équation. (*Extremely well.*) (+ +).

Ce candidat est fort intelligent et très convenablement instruit. (A classer hautement parmi les dix premiers jusqu'ici, sauf réflexion pour le rang précis.)

VERDEVOYE, 20 ans (de $11^h 10^m$ à 1^h).

1° *Épure de la moindre distance de deux droites données.* Il explique bien le principe de la construction solide et sa traduction en épure. Invité à placer la seconde droite dans un plan donné, pour qu'elle soit à une distance donnée de la première droite, il imagine le cylindre ayant cette droite pour axe et cette distance pour rayon, l'intersection du plan donné avec un plan tangent quelconque à ce cylindre devant être une des droites cherchées. Il indique très bien l'épure de cette solution, et montre une intelligence complète de la Géométrie descriptive. (*Very well.*)

2° *Aire d'un dodécagone régulier d'après son côté.* Il indique très bien le plan de la solution avant de procéder à son exécution. Il forme ensuite très directement une équation entre le côté donné et le rayon du cercle circonscrit, d'après une considération géométrique évidemment spontanée et il en déduit fort bien l'aire demandée, qu'il simplifie suffisamment, par la réduction des radicaux composés en radicaux simples. (*Well.*)

3° *Théorie de l'élimination.*

Invité d'abord à bien poser la question, il reconnaît bien que, dans la recherche de l'équation finale, il ne faut faire aucune distinction entre les valeurs réelles et les imaginaires; mais il admet définitivement qu'il doit en être de même à l'égard des valeurs finies ou infinies de x ou de y, quoique ayant beaucoup hésité et varié à cet égard après des avertissements formels et réitérés. A cela près, il expose convenablement la méthode ordinaire du commun diviseur, avec les amendements Sarrus et avec les imperfections ordinaires. Invité à composer l'une des deux équations principales pour que l'élimination avec l'autre donnée conduise à une équation finale donnée, il ne croit pas que ce soit possible sans la résolution préalable de cette dernière équation. (*Little well.*)

4° *Équation de la conchoïde parabolique de Descartes.*

Il emploie les coordonnées polaires, en plaçant le pôle au foyer de la parabole directrice, dont il forme d'abord très bien et directement l'équation polaire. Il forme ainsi très aisément l'équation polaire de la courbe cherchée, d'où il déduit l'équation rectiligne qu'il simplifie convenablement : toutefois son équation est certainement fausse, et beaucoup trop compliquée en l'admettant comme vraie. Il discute correctement l'ordonnée, mais sans rien de saillant dans la marche. Invité à assigner, par la seule définition, la forme générale de la courbe cherchée, il l'aperçoit judicieusement. Interpellé de former *a priori* l'équation d'après les renseignements ainsi obtenus, en la supposant du troisième degré, il ne voit pas l'incompatibilité des conditions. (*Near about well.*)

Ce candidat est suffisamment instruit et assez intelligent, même pour être hautement admissible... (A balancer probablement avec Tournadre). (+ +.)

PAULTRE DE LAVERNÉE, 20 ans (de $11^h 50^m$ à $1^h 30^m$).

1° *Sommation des progressions arithmétiques.*

Il explique convenablement la formule. Invité à l'appliquer à la loi de Galilée sur la chute des corps, il s'en tire bien, sauf l'explication imparfaite de l'irrationalité du temps. (*Enough well.*)

2° *Comment devrait tourner un triangle donné autour d'un axe unique pour engendrer un volume donné?*

Il résout très simplement la question en prenant pour inconnue la distance du milieu de la base à l'axe. Il en déduit fort bien la situation convenable au maximum et explique suffisamment la difficulté incidente relative au minimum. (*Very well.*)

3° *Parallélogramme des forces.*

Exposition convenable de la démonstration fondée sur la loi des forces parallèles, en faisant assez bien ressortir l'artifice relatif à l'intensité. Invité à modifier la construction de manière à dispenser de prolonger jusqu'au concours, il institue fort heureusement la modification la plus simple, qu'il ne peut toutefois démontrer sans quelque embarras. (*Well.*)

4° *Théorie des racines égales.*

Sans mieux motiver que la plupart des autres l'introduction naturelle des dérivées dans une telle recherche, il expose convenablement le principe et la méthode qui en résultent. Il en déduit bien les conditions nécessaires pour l'égalité de toutes les racines. (*Well.*)

5° *Discussion de la courbe* $y = x^4$.

Il discute très bien l'ordonnée et la tangente et compare très bien la courbe avec la parabole. Invité à chercher ses différents modes d'intersection avec les lignes droites, il voit bien, par la règle de Descartes, qu'il n'y aura jamais plus de deux points d'intersection, comme l'indique la figure. Provoqué à séparer nettement les cas où il n'y a aucune intersection de ceux où il y en a deux, il a besoin d'être itérativement mis sur la voie pour reconnaître qu'ils sont séparés par le cas d'un contact ou d'une racine double; avec cette indication il achève péniblement la question. (*Enough well.*)

6° *Ellipse, par* 1 *foyer*, 1 *sommet et* 1 *tangente.*

Il trouve fort bien la solution graphique quand le sommet est au grand axe et n'y parvient quand il est au petit axe qu'après une longue hésitation et à l'aide d'une indication prononcée. (*Near about well.*)

Dans la solution analytique, il définit d'abord le sommet d'une manière exacte, mais très compliquée. Invité à s'en tenir à la normale passant au centre, il indique bien la formulation de ce caractère. A l'égard du foyer, il explique aussi convenablement le mode rationnel de formuler les conditions. (*Well.*)

Ce candidat est très convenablement instruit et doué d'un bon esprit, suffisamment sagace. (A classer parmi les premiers admissibles jusqu'ici en le balançant probablement avec Vallée.)

Sewrin, 19 ans passés (de 10^h15^m à 11^h45^m).

1° *Simplification exacte des fractions numériques; modification du procédé à l'égard des décimales.* (*Very well.*)

Simplification approximative à un degré donné; marche incertaine, quoique directe, sans soupçonner l'emploi des fractions continues. (*Badly.*)

2° *Côté d'un tétraèdre régulier en or valant un milliard de francs.*

Il forme très bien l'équation, mais évalue un peu péniblement l'inconnue et laisse quelque incertitude sur l'approximation. (*Very well.*)

3° *Déterminer trigonométriquement si trois points inaccessibles sont en ligne droite, ou quatre en cercle dont on demande le rayon.*

Il répond avec intelligence sur la première question et apprécie très judicieusement le degré de confiance que mérite le résultat comparativement à une observation directe; il répond aussi avec justesse et sagacité sur toutes les parties de la deuxième question. (*Extremely well.*)

4° *Parabole, par le sommet, un point et une tangente : lieu du foyer si l'on supprimait la seconde condition.*

Il répond très bien sur la première partie de la question et suffisamment sur la deuxième. (*Well.*)

5° *Centre de gravité d'un tétraèdre : évaluation de ses coordonnées.*

Il répond correctement mais ordinairement sur la première partie de la question et manque la seconde. (*Sufficiently.*)

Cet élève est le plus intelligent et le mieux instruit de ceux examinés jusqu'ici (+).

Widmer, 20 ans (de 2^h45^m à 4^h15^m).

1° *Aire d'un triangle d'après ses côtés.*

Exposition convenable de la formule ordinaire. Invité d'en déduire en quel cas la formule devient rationnelle, il découvre très bien le caractère du triangle rectangle et précise exactement le sens de la rationalité. (*Very well.*)

Interpellé ensuite d'y découvrir le maximum des triangles isopérimètres, il réduit aussitôt la question à partager un nombre en trois parties dont le produit soit un maximum; mais quoique, guidé par l'indication formelle du cas de deux parties et prétendant d'ailleurs savoir la théorie générale des maxima (dont l'emploi technique lui est, du reste, interdit), il ne peut aboutir à la solution, malgré les avis destinés à le mettre sur la voie. (*Weakly.*)

Engagé enfin à expliquer ainsi le moyen trigonométrique de mesurer l'aire d'un polygone inaccessible, il décrit bien le procédé en appréciant assez judicieusement sa confiance comparative avec une mesure directe. (*Well.*)

(Pour l'ensemble *Well.*)

2° *Parallélogramme des forces.*

Il explique convenablement la démonstration tirée des forces parallèles, sans toutefois caractériser l'artifice relatif à l'intensité. Invité à modifier la construction pour dispenser du prolongement jusqu'au point de rencontre, il voit bien que les distances de chaque point de la résultante aux deux composantes leur sont inversement proportionnelles, d'où il déduit la direction et ensuite l'intensité. (*Well.*)

3° *Théorie des racines égales.*

Sans pouvoir motiver l'introduction naturelle des dérivées, il explique nettement le principe de cette théorie et la méthode de décomposition qui en résulte. Invité à en déduire les conditions de la plus grande et de la moindre multiplicité, il les expose très bien; il explique bien d'ailleurs le mode direct d'expression de ces circonstances. (*Well.*)

4° *Discussion de la courbe* $y = x^3 + x$.

Il discute très bien l'ordonnée et bien la tangente. Invité à discuter les intersections avec une droite quelconque, il parvient à séparer nettement les cas à une intersection et ceux à trois par l'expression des conditions de réalité, et en finissant par bien placer entre eux les cas du contact ou les racines égales. (*Well.*)

5° *Lieu des sommets d'un angle droit tangent à une ellipse donnée.*

Il explique bien la formation de l'équation du lieu. Ayant très bien prévu, sans exécuter les éliminations, qu'elle serait du second degré, il est invité à compléter la détermination de la courbe sans aucun nouveau calcul. Il termine entièrement cette opération avec justesse et sagacité. (*Well.*)

Ce candidat est judicieux et bien instruit. (A classer dans la seconde dizaine jusqu'ici, très probablement vers Lenormand.)

Sers, 18 ans (de $9^h 20^m$ à $11^h 20^m$).

1° *Période de doublement de la population française qui a augmenté d'un tiers en un demi-siècle, en prolongeant la même progression géométrique.*

Il voit d'abord qu'il faut déterminer le taux d'accroissement annuel, et passer ensuite à la période cherchée. Mais, dans l'exécution, il confond q et $q+1$ et, malgré des avertissements réitérés, il ne peut, après un long examen, rectifier cette erreur, quoique l'absurdité lui en soit démontrée. (*Near about well.*)

2° *Parmi tous les triangles isopérimètres et équivalents, quel est celui où le centre de gravité de l'aire et celui du contour sont le plus distants?*

Il voit d'abord que la question est à une seule inconnue. Prenant convenablement les axes, il exprime par les coordonnées des trois sommets, d'abord le premier centre et ensuite très péniblement la marche pour formuler le second. Il indique ensuite, d'une manière un peu vague et confuse, le mode d'accomplissement de la solution; mais il a compris que le caractère du maximum correspond à celui des racines égales dans l'équation finale, quoiqu'il ne le démontre pas assez nettement, ni surtout assez directement. (*Moderately.*)

3° *Volume de la sphère.*

Il commence par montrer qu'il a évidemment saisi, plus qu'aucun autre jusqu'ici, l'esprit fondamental de la méthode des cubatures. Il explique ensuite, d'une manière intelligente, la démonstration ordinaire en faisant à peu près ressortir les motifs réels des transformations qu'il expose. Il montre fort bien *a priori* que la formule doit être mr^3. (*Very well.*)

Invité à calculer le rayon d'une boule d'or de 20^{fr}, il passe un peu péniblement du prix au poids et ensuite au volume; il effectue bien le calcul numérique, sauf une erreur sur l'unité qu'il rectifie sur avertissement et une faute plus grave sur l'estimation du degré d'approximation. (*Near about well.*)

4° *Analyse de l'équation* $x^4 + cx^2 - 2x + 2 = 0$, *quand la somme des deux racines est* 1.

Il discute imparfaitement *a priori* la nature possible des racines. Il prend ensuite pour principe l'existence d'une racine commune entre l'équation et celle en $1-x$; mais il conçoit cette idée d'une manière trop indirecte, d'après la notion d'élimination intempestivement introduite. Il conçoit trop vaguement le complément de l'opération et résout mal les difficultés incidentes. Interpellé si la question ne pourrait pas être autrement résolue, il ne pense qu'aux relations entre les coefficients et les racines et nullement à la décomposition en facteurs du second degré. (*Weakly.*)

5° *Lieu des sommets des paraboles ayant le même foyer et un point commun.*

Il voit d'abord très bien la construction du lieu par points et en tire très convenablement l'équation du lieu. (*Very well.*)

Invité ensuite à reprendre la question d'une manière analytique directe, il forme très largement l'équation du système de paraboles. Il formule ensuite le sommet d'après le caractère que la tangente y est perpendiculaire au rayon focal. Ayant bien exprimé cette condition, il achève très convenablement l'opération. (*Very well.*)

Ce candidat est fort intelligent, quoique son instruction eût besoin d'être plus mûrie. Ce sera une bonne acquisition vraisemblablement pour l'École Polytechnique. (A classer probablement entre Tournadre et Morès.)

De Maintenant, 19 ans (de $11^h 20^m$ à $12^h 50^m$).

1° *Tangente commune à deux cercles donnés.*

Il explique fort bien la construction la plus simple et la discussion des divers cas. (*Very well.*)

Il traite ensuite spontanément la question analytiquement et formule très convenablement les conditions du double contact. Il voit ensuite très bien, *a priori* et *a posteriori*, le degré nécessaire et effectif de chaque équation finale et discute parfaitement les différents cas *a priori*. Il énonce parfaitement le principe relatif aux symptômes analytiques d'impossibilité par ses valeurs imaginaires ou infinies, ce qu'aucun candidat n'avait pu jusqu'ici apercevoir que d'une manière vague et insuffisante. (*Perfectly well.*)

2° *Dimensions d'une calotte sphérique d'après son volume et sa surface courbe.*

Il forme très bien l'équation relative à la hauteur

$$rx^3 - 3b^2x + 8a^3 = 0.$$

Il discute fort bien l'équation et harmonise bien cette discussion avec la question. Invité à déterminer les dimensions de la calotte maximum, il voit très bien *a priori* que ce cas correspond aux racines égales et le vérifie convenablement *a posteriori* après avoir été mis sur la voie, ce qui lui donne la relation entre a et b. Il hésite un peu à en déduire les dimensions de la calotte maximum, il finit cependant par y parvenir et trouver l'hémisphère. (*Well.*)

3° *Théorie de l'homogénéité.*

Il ne peut l'expliquer qu'*a posteriori*, et d'une manière très imparfaite, en mêlant intempestivement le cas des lignes (auquel seul il était engagé) avec celui des aires et des volumes. (Il entend peu cette théorie.) (*Weakly.*)

4° *Discussion de la courbe* $y^2 + x^3 = 1$.

Il discute bien l'ordonnée et moins bien la tangente; il aperçoit l'absence d'asymptote et finit par reconnaître la vraie figure de la courbe d'abord altérée. Invité à discuter ses intersections avec une droite $y = ax + b$, il apprécie confusément et péniblement le cas des a et b infinis, il aperçoit avec quelque peine la ligne de séparation entre les cas à une intersection et ceux à trois, b restant fixe, comme caractérisée par le contact et les racines égales : il n'en déduit que confusément la relation entre a et b. (*Enough well.*)

5° *Équilibre d'un poids soutenu par deux plans.*

Il explique convenablement les deux conditions de cet équilibre, quoique toujours avec un énoncé un peu confus. Il assigne un peu péniblement, mais sans erreur, la situation d'équilibre d'une sphère. Il discute bien les diverses situations des plans. (*Well.*)

Ce candidat a une force et une justesse remarquables, quoique moins de sagacité et de netteté. Ce sera, pour l'École, une excellente acquisition. (A comparer probablement avec Johannys, Hérard, Deschamps et Sewrin.)

SCHMUTZ, 21 ans (de $4^h 15^m$ à $6^h 15^m$).

1° *Mesure des angles trièdres.*

Exposition très vulgaire, mais avec beaucoup d'assurance, de la démonstration ordinaire, avec toutes ses niaiseries et ses lacunes capitales. Interpellé toutefois directement, il fait très bien ressortir la nécessité que les côtés de l'angle rectiligne soient perpendiculaires à l'arête. Il explique bien la transformation de l'angle primitif en celui des normales. Il ne peut point faire voir que cet angle est formé par les lignes de plus grande pente. (*Near about well.*)

2° *Construction des tables trigonométriques.*

Il explique bien la détermination du sinus fondamental ainsi que la formation successive de tous les autres. Il analyse convenablement les principaux moyens de vérification. Il explique très vulgairement les modifications relatives au rayon, sans donner lieu à poser la théorie de l'homogénéité. (*Well.*)

3° *Analyse de l'équation* $x^4 + 3x^2 - 2x + p = 0$, *quand deux des racines sont réciproques.*

Il ne voit pas d'abord que deux des racines sont nécessairement imaginaires, parce qu'il consulte mal à propos la composition des coefficients au lieu de la règle des signes. Cependant il finit par y penser et reconnaître cette indication, sans pouvoir préciser si elle porte ou non sur les deux réciproques. Prenant ensuite pour principe les raisons communes entre l'équation et sa réciproque, il décrit bien l'ensemble de l'opération. Quelques réflexions incidentes lui font proposer de procéder par la divisibilité par $x^2 + qx + 1$ pour comparer ce mode avec le premier. Il analyse très bien *a priori* le degré nécessaire de l'équation en q. Invité à y appliquer la méthode des indéterminées, il le fait très bien par les facteurs $x^2 + qx + 1$, $x^2 - qx + 1$. (L'ensemble de cette question montre que le candidat entend bien l'Algèbre.) (*Well.*)

4° *Équilibre d'un poids soutenu par deux plans : situation d'équilibre d'un segment parabolique.*

Il explique bien les deux conditions de cet équilibre. Le segment étant alors défini de sorte que le centre de gravité soit au foyer, il lui est prescrit de former l'équation de la parabole. Plaçant l'origine à l'angle des tangentes, et prenant l'une d'elles pour l'un des axes, il formule bien les deux contacts. En poursuivant, il s'aperçoit que l'équation eût du contenir les coordonnées du foyer, et reprend, dans cet esprit, la marche du problème. Il formule alors très convenablement toutes les conditions, y compris même celle du paramètre. (*Very well.*)

5° *Discussion de la courbe* $y^2 = x^2 - x^4$.

Il discute fort bien l'ordonnée et presque aussi bien la tangente. (*Very well.*)

Ce candidat est très bon pour l'instruction et l'intelligence; toutefois inférieur en portée à Maintenant.

ANISSON-DUPÉRON, 19 ans (de $10^h 40^m$ à $12^h 10^m$).

1° *Bissection d'un trapèze parallèlement à ses bases.*

Il forme naturellement une équation à deux inconnues; mais il a beaucoup de peine à former la seconde équation. Il résout bien l'équation finale du second degré et il explique convenablement la double solution, ainsi que le cas du parallélogramme. (*Well.*)

2° *Discussion de la courbe $y = x^3 - x$.*

Il mêle confusément la discussion de l'ordonnée et celle de la tangente; toutefois, il trouve très bien la forme de la courbe. On voit qu'il a une grande habitude de la discussion des courbes. (*Well.*)

Invité à discuter les intersections avec $y = ax + b$, il sépare d'une manière trop peu méthodique, mais cependant ferme et strictement suffisante, les deux modes d'intersection. (*Well.*)

Interpellé enfin de mener une tangente par un point quelconque du plan, il éprouve beaucoup d'embarras à mettre le problème en équation, à cause des inconnues inutiles qu'il a cru devoir introduire. Il ne croit pas pouvoir y séparer les cas à 1 tangente et à 3 autrement que par l'emploi du théorème Sturm. (*Weakly.*)

3° *Équation ayant pour racines les rapports des racines de $x^2 + px + q = 0$ à celle de $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.*

Après avoir un peu hésité et même divagué, il conçoit fort bien la méthode demandée. Interpellé si toute équation du sixième degré pourrait être considérée comme résultant d'une telle formation, il voit très rationnellement que ce n'est possible qu'avec une certaine équation de condition, dont il indique fort bien le mode de formation. (*Very well.*)

4° *Hyperbole par 1 asymptote, 1 directrice et l'excentricité.*

Il ne peut trouver entièrement la solution graphique, quoiqu'il soit sur la voie. (*Weakly.*)

Dans la solution analytique, il procède d'après la petite équation de l'hyperbole par la transformation des axes et élude ainsi les principales difficultés du problème. Il ne s'aperçoit pas que cette prétendue solution analytique n'est que la traduction, en style algébrique, de l'ébauche de solution graphique qu'il avait commencée. (*Moderately.*)

Invité enfin à trouver le lieu du sommet en supprimant l'excentricité, il procède de la même manière en prenant pour axe la directrice et l'origine sur l'asymptote. Il caractérise alors le sommet comme point où la normale passe au centre, mais achève très imparfaitement la formulation de ce caractère et le complément de la solution. (*Moderately.*)

5° *Équilibre d'un poids soutenu par deux plans.*

Explication convenable des deux conditions de cet équilibre. Invité à en déduire la situation d'équilibre d'un triangle équilatéral, il ne sait pas séparer les conditions purement géométriques de celles statiques, et manque entièrement la question. (*Weakly.*)

Ce candidat a une grande habitude et une facilité notable, bien plus qu'une instruction forte et une intelligence remarquable. Il est cependant très hautement admissible. (A balancer avec Tournadre.) (++).

BOULTIER, 20 ans (de $10^h 30^m$ à $12^h 15^m$).

1° *Extraction des racines quarrées, numériques et algébriques.*

Exposition convenable, mais peu saillante, à l'égard des nombres; il finit cependant par apprécier assez judicieusement, sur interpellation, le véritable esprit du procédé d'approximation indéfinie. (*Enough well.*)

Exposition à peu près analogue à l'égard des polynomes : indication un peu vague du mode de terminaison. Il explique bien les conditions entre les coefficients pour les quarrés parfaits. (*Well.*)

Il explique assez bien l'application de la méthode des indéterminées à l'extraction des racines parfaites. Il répond formellement que cette méthode est nécessairement inapplicable aux quarrés imparfaits. (*Weakly.*)

2° *Équilibre d'un poids soutenu par deux plans.*

Explication satisfaisante des deux conditions de cet équilibre et du rapport des pressions. (*Well.*)

Invité à déterminer la situation d'équilibre d'un triangle équilatéral, il prend le problème analytiquement en choisissant pour axes l'horizontale et la verticale du sommet des plans et pour inconnues l'équation de la base du triangle. Il suit alors, un peu péniblement, mais très judicieusement, une marche fort rationnelle dans l'expression de toutes les conditions. (*Very well.*)

3° *Théorie de l'équation au quarré des différences.*

Il expose avec intelligence la théorie ordinaire. Il répond convenablement sur la condition du degré de l'équation cherchée. Interpellé si toute équation du dixième degré peut être envisagée comme au quarré des différences d'une certaine du cinquième, il voit très rationnellement et sur-le-champ la nécessité de cinq équations de condition. Il reconnaît aussi fort bien que plusieurs équations primitives distinctes peuvent donner la même transformée; mais il concilie vaguement cette remarque avec la précédente. (*Well.*)

Interpellé sur les indications que l'état des signes de la transformée peut fournir sur la nature des racines de la proposée, il discute raisonnablement sur ce sujet, mais sans excéder les notions vulgaires. (*Enough well.*)

4° *Inscrire, dans une sphère donnée, un parallélépipède d'un volume et d'une surface donnés.*

Il a beaucoup de peine à former l'équation de l'inscription. Il voit très bien que les trois dimensions doivent être fournies par une même équation du troisième degré, dont il a immédiatement les deux derniers termes, et dont il forme, par une très heureuse combinaison, le second terme. Invité à déduire les conditions de possibilité, il pense d'abord au théorème Sturm; mais, pressé d'abréger, il imagine l'assimilation avec l'équation qui donne $\operatorname{tang}\frac{1}{3}a$, où il est arrêté par l'équation de condition qu'il en voit naître. Il ne pense pas aux racines égales. (*Moderately.*)

5° *Hyperbole par* 1 *sommet,* 1 *asymptote et* 1 *tangente.*

Prenant pour axes l'asymptote et sa perpendiculaire du sommet, il formule très bien toutes les conditions du problème. (*Very well.*)

Invité à chercher le lieu du second sommet, en supprimant la tangente, il indique bien le mode de formation de son équation, et reconnaît ensuite sur la figure la nature de ce lieu. (*Well.*) (++.)

Ce candidat a de l'intelligence, mais un peu de vague; une instruction forte, mais trop routinière. Il est néanmoins très admissible, même sans égard à son âge. (A classer probablement près de Lecorreur, soit un peu plus bas ou un peu plus haut.)

MONTAUDON, 18 ans (de $2^h 15^m$ à 4^h).

1° *Période de doublement de la population française qui a augmenté d'un tiers depuis un demi-siècle, en supposant prolongée la même progression géométrique.*

Il détermine d'abord le taux normal d'accroissement; il passe ensuite, très péniblement, mais sans erreur formelle, à l'évaluation de la période, et met convenablement le résultat en logarithmes, sauf qu'il ne le réduit pas spontanément au moindre nombre de logarithmes. (*Enough well.*)

2° *Construction des tables logarithmiques.*

Il explique péniblement le mode de calcul du logarithme d'un nombre donné, par l'intercalation des progressions, qu'il présente sous la forme la plus compliquée; ce n'est qu'après une interpellation formelle qu'il se décide à simplifier en réduisant à l'intercalation individuelle et non simultanée. Il expose ensuite suffisamment le procédé par fractions continues. Il distingue bien les cas où les logarithmes sont commensurables. Il indique d'abord des vérifications illusoires pour l'ensemble de la table; il finit cependant par en indiquer de réelles mais peu commodes. Il explique péniblement l'approximation relative aux nombres excédant la table. (*Near about well.*)

3° *Circonscrire, à une sphère donnée, un cône dont la surface totale est donnée.*

Il forme bien l'équation du problème, en formulant d'une manière originale la condition de l'inscription. Il discute convenablement cette équation biquarrée, et y entremêle assez judicieusement de lui-même la double solution admissible. Il détermine bien le cône minimum, et le distingue suffisamment du cône équilatéral. (*Well.*)

4° *Équation ayant pour racines les sommes des racines de $x^2 + px + q = 0$ ajoutées à celles de $x^3 + ax + b = 0$.*

Il explique bien et directement le mode de formation par l'équation cherchée. Il croit fort mal à propos que l'équation aura ses racines égales deux à deux, et sera réductible au troisième degré. Interpellé si toute équation du sixième degré peut avoir une telle origine, il reconnaît un peu vaguement la nécessité de certaines conditions, dont il explique à peu près le mode de formation. (*Enough well.*)

5° *Dans un système de paraboles ayant même sommet et* *une tangente commune, trouver le lieu des points où la directrice coupe l'axe.*

Il réduit d'abord la question à trouver le lieu du foyer. Prenant pour axe la tangente et une perpendiculaire menée du sommet, il cherche ce lieu directement, en éludant les difficultés analytiques principales pour l'expression des diverses conditions : il trouve très simplement le lieu qui est une parabole dont le paramètre est la distance du sommet à la tangente. (*Well.*)

Interpellé alors de prendre la marche analytique directe, il formule assez bien la condition du sommet comme point situé sur le diamètre rectangulaire, sauf une complication inutile dans le mode d'exécution. (*Well.*)

6° *Équilibre d'un poids suspendu entre deux points fixes à l'aide d'un nœud coulant : courbe d'ascension d'un réverbère.*

Il explique bien la loi de cet équilibre, et les pressions des points fixes; mais il en déduit beaucoup trop péniblement la figure précise du système. (*Near about well.*)

Dans la recherche de la courbe d'ascension, il prend les axes assez convenablement, et finit, après avoir été un peu averti, par trouver fort bien l'hyperbole équilatère demandée. *Well.*) (+ +).

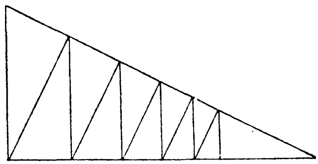
Ce modeste candidat a bien plus de sagacité et de justesse qu'il ne le paraît d'abord : son instruction est d'ailleurs très saine. (A classer probablement très près du précédent, quoique peut-être un peu au-dessous.)

Le premier élève examiné par Auguste Comte, le mercredi 26 juillet 1837, est M. Masquelez. Je n'avais pas d'abord reproduit son examen, parce que Auguste Comte ne lui avait donné qu'un seul signe +. Mais j'ai remarqué que, plus tard, dans ses notes de classification, de nouvelles réflexions lui ont fait appliquer à ce candidat le signe + +. Je vais reproduire cet examen d'après le principe que je me suis imposé. Il y a, du reste, intérêt à voir comment Auguste Comte a débuté.

MASQUELEZ, 20 ans passés (de $9^h 20^m$ à 11^h).

1° *Sommation des progressions géométriques : limite de la somme.*

(Hésitation très prononcée sur l'existence nécessaire d'une limite.) Application à la progression du triangle rectangle (entièrement manqué cette application). (*Very little well.*)



2° *Aire de la sphère.*

(Répondu avec intelligence.) Conversion graphique du globe en une mappemonde équivalente. (*Very well.*)

Aire de la zone tempérée en myriamètres carrés. (Finit par se bien tirer de cette application.) (*Well.*)

3° *Bissection d'un hémisphère.*

Discussion algébrique de l'équation de ce problème. (*Very well.*)

Construction par la parabole et le cercle. (*Very well.*)

4° *Parabole par le foyer, un point et une tangente.*

Solution graphique et solution analytique. Discussion des cas d'impossibilité. (Grande hésitation sur le symptôme algébrique de cette impossibilité. (*Enough well.*)

5° *Équilibre d'un système plan mais quelconque.*

Discussion des différents cas de gêne. (*Enough well.*) (+).

On remarquera qu'Auguste Comte n'a pas terminé l'examen par l'appréciation générale qui l'accompagne ordinairement; mais il n'a pas tardé, et le jour même, à introduire cette heureuse modification. Le troisième élève examiné par lui, et le même jour, 26 juillet, a une appréciation générale qui est comme son *équation.*

M. Sewrin, examiné le 27 juillet, porte le signe + seulement, et un peu plus tard Auguste Comte lui donne le signe + +. Il est évident, d'après cela, qu'il s'était fait un certain idéal de la force maximum qu'il a dû diminuer. Il s'est, du reste, très rapidement rectifié.

Enfin, la même considération s'applique à M. Pellicot, qui est le dixième élève examiné par lui. Nous reproduisons son examen.

PELLICOT, 19 ans (de $1^h 30^m$ à $3^h 30^m$).

1° *Par un point donné dans un cercle, inscrire une corde de longueur donnée.*

Il met très bien le problème en équation, quoique d'une manière un peu trop compliquée, et construit avec aisance la formule. Il y démêle très bien le cas du minimum, et mal celui du maximum. (*Well.*)

Même problème pour une ellipse.

Il forme très bien et rapidement l'équation par l'emploi des coordonnées polaires, et en déduit exactement l'équation de la direction de la corde, qui est du sixième degré, privée des cinquième et deuxième puissances. Quant au maximum et au minimum, il aperçoit presque spontanément que ces cas correspondent à l'égalité des racines; mais il croit que toutes les racines doivent être égales. (*Enough well.*)

2° *Discussion de la courbe* $y^3 + x^3 = 1$.

Il discute bien l'ordonnée et confusément la tangente, de manière à devoir conclure qu'il n'y a pas d'asymptote. Mais, en cherchant l'asymptote directement, il la trouve exactement. Il détermine bien le point où la tangente est parallèle à l'asymptote, et y reconnaît même l'existence d'un axe, sans toutefois pouvoir la démontrer directement avec netteté, autrement que par la vérification, par la transformation des axes. (*Well.*)

3° *Hyperbole par une asymptote, un foyer, une tangente.*

Il trouve parfaitement la solution graphique, et analyse judicieusement, quoique avec un peu de peine, les cas d'impossibilité. Il finit par exposer très convenablement, quoique d'une manière trop compliquée, toutes les parties de la solution analytique. Interpellé si les cas d'impossibilité seront annoncés par des valeurs imaginaires ou infinies, il hésite extrêmement, et finit par indiquer les unes et les autres. (*Sufficiently well.*)

Cet élève est fort intelligent et d'un bon esprit, quoique mal instruit. Il est très admissible, et peut-être même supérieur au n° 2 (Masquelez).

Nous allons maintenant reproduire un certain nombre des examens de province pour compléter la série des examens d'Auguste Comte pendant l'année 1837. (*A suivre.*)

OBSERVATIONS SUR LES EXAMENS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE;

PAR M. E. CARVALLO.

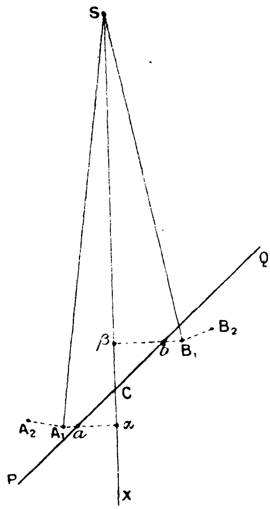
1. Les cours de Mathématiques spéciales ont atteint un tel degré de perfection que le défaut d'une démonstration y fait tache et jette une défaveur sur le candidat de valeur moyenne qui a la mauvaise chance de l'exposer.

Je veux parler de la recherche des points d'inflexion dans le développement de la section plane d'un cône. Aucun des nombreux candidats qui me l'ont exposée cette année ne m'a donné une démonstration satisfaisante. Un seul, qui est classé trentième, a su compléter ses raisonnements d'après mes indications et mériter une note élevée. La plupart ont tiré de leurs cours des idées tellement fausses que je les ai vite conduits par de simples questions aux résultats les plus extravagants. Pour l'honneur de notre enseignement et dans l'intérêt des candidats, j'appelle sur cette question délicate l'attention de leurs maîtres éminents. Ma critique porte sur presque toutes les démonstrations géométriques données par les élèves; je l'exposerai sur la forme le plus généralement adoptée.

2. Théorème. — *Les points de la section plane d'un cône où le plan sécant est perpendiculaire au plan tangent, sans être perpendiculaire à la génératrice de contact, fournissent des points d'inflexion quand on développe le cône sur un plan.*

Soit SX la génératrice de contact du plan tangent au point C de la section plane PQ. J'effectuerai le développement sur ce plan tangent pris comme plan de projec-

Fig. 1.



tion. Le plan sécant PQ étant supposé perpendiculaire au plan de projection, sans être perpendiculaire à la génératrice SX, se projette tout entier suivant une droite PCQ oblique à SX.

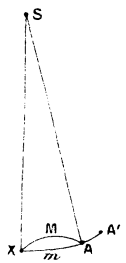
Pour effectuer le développement aux environs du point C (les élèves oublient d'ajouter *approximativement*), je considère deux génératrices voisines de SX, de part et d'autre de cette droite. Soient S*a* et S*b* les projections de ces génératrices. Je les rabats sur le plan de projection : *a* vient quelque part en A_1, sur la perpendiculaire $a\alpha$ à SX, au delà du point *a*. De même *b* se rabat quelque part en B_1. On voit ainsi que le développement de la section plane traverse la droite PQ au point C. Or on sait que cette courbe est tangente à la droite PQ au point C. Elle a donc là un point d'inflexion. C. Q. F. D.

3. Le défaut de rigueur est celui-ci. Le point A_1 est bien le rabattement du point projeté en a, mais non pas son développement. De là, chez quantité d'élèves, confusion entre rabattement et développement. Demandez-leur d'appliquer le raisonnement au cas où le plan PQ est perpendiculaire à la génératrice SX, ils n'hésiteront pas à déclarer que, dans ce cas, le développement de la section plane entière se fait sur la droite PQ. A Paris, l'erreur a été générale. Dans huit centres de province, j'ai posé cette question : les huit candidats ont fait la même erreur persistante; quatre d'entre eux avaient la note 14 chez mon collègue; un autre la note 13. Ainsi, non seulement la démonstration manque de rigueur, mais, ce qui est plus grave, elle laisse une idée fausse dans l'esprit des élèves.

Et maintenant, quel degré atteint le défaut de rigueur? Il est d'autant plus important de s'en rendre compte que la démonstration qui nous occupe est à peu près le seul exemple de Géométrie infinitésimale qui figure maintenant dans la plupart des cours de spéciales. Or je n'hésite pas à déclarer que le principal but des promoteurs du renouvellement des programmes a été de familiariser les élèves avec l'application des infiniment petits. Les cours de l'École, pensaient-ils, surchargés de matières, vont trop vite pour poser avec un soin suffisant les principes des méthodes et montrer, dans chaque exemple, l'application des principes : dans ces cours, il faut lire entre les lignes. Or examinons à ce point de vue la démonstration précédente. Pour être regardée comme seulement incomplète dans la forme, mais rigoureuse dans le fond, il faudrait que la distance du rabattement A_1 au développement A_2 du point projeté en a fût un infiniment petit d'ordre supérieur à $a\,A_1$. Mais αA_1 est égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont le côté $a\alpha$ est du premier ordre et dont l'angle aigu en α est du premier ordre aussi. La valeur de l'hypoténuse $\alpha A_1 = \alpha a\, \text{séc}\,\alpha$ diffère de αa d'un infiniment petit du troisième ordre. *Ainsi, le segment* $a A_1$ *est du troisième ordre.* Pour évaluer maintenant l'ordre de grandeur de la distance du rabattement A_1 au développement A_2 au point a, j'opère ainsi :

Je coupe le cône S par une sphère de rayon égal à SA : elle coupe le cône suivant une courbe XMA plus longue

Fig. 2.



que l'arc de grand cercle XmA; la différence entre les longueurs de ces deux courbes est du troisième ordre. Si donc on développe sur le plan XSA la portion du cône sous-tendue par l'arc XMA, le point A se développe en un point A' situé au delà de A, à une distance AA' qui est du troisième ordre. Telle est la distance du rabattement A_1 (*fig.* 1) au développement A_2 du point projeté en a, distance comptée sur le cercle décrit de S comme centre avec SA_1 pour rayon.

Ainsi la démonstration néglige *implicitement* la distance $A_1 A_2$ qui est du troisième ordre devant la distance aA_1 qui est aussi du troisième ordre. Et c'est par cet exemple que les élèves de l'École sont préparés à suivre des cours où pullulent des difficultés toutes semblables laissées à leur initiative! Il y a là un réel danger.

4. Est-ce à dire que la démonstration qui nous occupe doive être rejetée? Non, mais elle doit être complétée, et cela est facile de différentes manières.

D'abord, l'explication que je viens d'ajouter prouve que la distance du point A_2 à la droite PQ est du troisième ordre; que dans le cas où PQ est perpendiculaire à SX, cette distance est du quatrième ordre. Quel inconvénient verrait-on à dire que telles sont les définitions des contacts du second et du troisième ordre, conformément au cours d'Analyse à l'École Polytechnique?

D'autre part, au point de vue purement graphique, qui a été la seule préoccupation de l'auteur de la démonstration que j'ai reproduite au n° 2, pour aller de a en A_1, il faut se déplacer d'une quantité aA_1 du troisième ordre sur la perpendiculaire αa à SX, laquelle fait avec PQ un angle fini. A partir de là, il faut se déplacer de A_1 en A_2, encore d'une quantité du troisième ordre et sur une direction normale à SA_1, c'est-à-dire sur une direction qui fait avec la précédente aA_1 un angle infiniment petit. Il est donc certain que le point A_2 tombera au-dessus de PQ. On voit de même que B_2 tombera au-dessous de PQ. La courbe développée a donc en C un point d'inflexion. Au contraire, si PQ est perpendiculaire à SC, on voit que la courbe tourne, au point C, sa concavité vers le point S.

A toutes les autres démonstrations géométriques que m'ont exposées les candidats, les mêmes observations s'appliquent. Chaque professeur apportera ses idées personnelles et donnera une bonne démonstration; j'entends par là une démonstration qui éclaire l'esprit de l'élève au lieu de lui laisser des idées fausses.

CONDITION POUR QUE DEUX QUADRIQUES AIENT UNE GÉNÉRATRICE COMMUNE;

Par M. C. BOURLET,
Docteur ès Sciences mathématiques.

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que deux surfaces du second degré aient au moins une génératrice commune est que le premier membre de l'équation en* λ *relative à ces deux surfaces soit carré parfait.*

Lorsqu'on a fait une étude complète de l'équation en λ relative à deux quadriques, la proposition précédente peut être énoncée sous forme de corollaire. Il suffirait, pour cela, de remarquer que, toutes les fois que l'équation en λ est *carré parfait*, il y a *au moins une* génératrice commune et que, dans tous les autres cas, il n'y a pas de génératrice commune.

A cause de la simplicité de l'énoncé précédent, il nous a semblé intéressant d'en donner une démonstration directe.

Nous rappellerons, d'abord, deux propositions bien connues dont nous ferons usage.

Proposition I. — *Les racines de l'équation en* λ *relative à deux quadriques ne changent pas quand on change les axes de coordonnées.*

Proposition II. — *Étant données deux surfaces du second ordre dont les équations sont*

$$S = 0, \qquad \Sigma = 0,$$

si l'on remplace l'une des deux surfaces, $S = 0$, *par exemple, par une surface passant par leur intersection, ayant pour équation*

$$S_1 \equiv S + \lambda_1 \Sigma = 0,$$

l'équation en λ *obtenue en égalant à zéro le hessien de* $S_1 + \lambda\Sigma$ *se déduit de l'équation en* λ *obtenue en égalant à zéro le hessien de* $S + \lambda\Sigma$ *en diminuant toutes les racines de la quantité* λ_1.

Ainsi, l'équation en λ relative aux quadriques S_1 et Σ se déduisant de l'équation relative aux quadriques S et Σ en remplaçant λ par $\lambda + \lambda_1$, ce changement ne modifiera pas l'ordre de multiplicité des racines et, pour faire notre démonstration, nous pourrons toujours remplacer l'une des deux surfaces, $S = 0$ par exemple, par une surface quelconque passant par l'intersection : en particulier par un *cône* (ou un *cylindre*), et, de plus, nous pourrons prendre tels axes qu'il nous plaira.

Avant d'établir la proposition énoncée nous démontrerons le lemme suivant :

Lemme. — *Lorsqu'à une racine multiple de l'équation en* λ *relative à deux quadriques correspond un cône proprement dit :*

1° *Si cette racine est double, le sommet du cône se trouve sur l'intersection des deux quadriques* (*qui sont tangentes en ce point*);

2° *Si cette racine est triple, le sommet du cône est sur l'intersection, les quadriques sont tangentes en ce* *point, et, en outre, le plan tangent commun est tangent au cône;*

3° *Si la racine est quadruple, les deux quadriques ont, de plus, une génératrice commune qui est la génératrice de contact du plan tangent commun avec le cône.*

Soient $S = 0, \Sigma = 0$ les deux quadriques et $C = 0$ l'équation du cône, proprement dit, passant par l'intersection. D'après la proposition II, nous pouvons remplacer la surface S par le cône C et, d'après la proposition I, nous pouvons prendre des axes tels que le sommet du cône soit l'origine des coordonnées.

Soit alors

$$C \equiv \alpha x^2 + \alpha' y^2 + \alpha'' z^2 + 2\beta yz + 2\beta' zx + 2\beta'' xy = 0$$

l'équation développée du cône et désignons par Δ le discriminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta'' & \beta' \\ \beta'' & \alpha' & \beta \\ \beta' & \beta & \alpha'' \end{vmatrix}$$

qui est *différent de zéro*, d'après l'hypothèse.

Soit

$$\begin{aligned} \Sigma \equiv a x^2 + a' y^2 + a'' z^2 + 2 b yz \\ + 2 b' zx + 2 b'' xy + 2 c x + 2 c' y + 2 c'' z + d = 0 \end{aligned}$$

l'équation développée de la surface Σ et désignons par H le hessien

$$H = \begin{vmatrix} a & b'' & b' & c \\ b'' & a' & b & c' \\ b' & b & a'' & c'' \\ c & c' & c'' & d \end{vmatrix}.$$

Le hessien de $C + \lambda\Sigma$ égalé à zéro donne alors l'équation

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Delta\, d\lambda + \lambda^2 \left[\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha}(ad - c^2) + \frac{\partial\Delta}{\partial\alpha'}(a'd - c'^2) \right. \\
&\qquad + \frac{\partial\Delta}{\partial\alpha''}(a''d - c''^2) + \frac{\partial\Delta}{\partial\beta}(bd - c'c'') \\
&\qquad \left. + \frac{\partial\Delta}{\partial\beta'}(b'd - c''c) + \frac{\partial\Delta}{\partial\beta''}(b''d - cc') \right] \\
&\quad + \lambda^3 \left[\frac{\partial H}{\partial a}\alpha + \frac{\partial H}{\partial a'}\alpha' + \frac{\partial H}{\partial a''}\alpha'' \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial H}{\partial b}\beta + \frac{\partial H}{\partial b'}\beta' + \frac{\partial H}{\partial b''}\beta'' \right] + \lambda^4 H = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

La racine $\lambda = 0$ est celle qui correspond au cône C.

1° Pour que la racine $\lambda = 0$ soit racine *double*, il faut et il suffit que l'on ait $\Delta d = 0$ et, comme $\Delta \neq 0$, cela donne $d = 0$. La quadrique Σ passe donc par l'origine des coordonnées, c'est-à-dire par le sommet du cône. Il en est de même de la surface S. Donc il faut et il suffit que le sommet du cône soit sur l'intersection.

2° La racine $\lambda = 0$ étant racine double, nous pouvons prendre pour plan des xy le plan tangent au sommet du cône à la surface $\Sigma = 0$; cela revient à faire

$$d = c = c' = 0$$

dans l'équation $\Sigma = 0$, c'' *étant différent de zéro*. L'équation en λ (1) prend alors la forme plus simple

$$(2)\qquad -\lambda^2 \frac{\partial\Delta}{\partial\alpha''} c''^2 + \lambda^3 \left[\frac{\partial H}{\partial a}\alpha + \frac{\partial H}{\partial a'}\alpha' + \frac{\partial H}{\partial b''}\beta'' \right] + \lambda^4 H = 0.$$

Pour que $\lambda = 0$ soit racine *triple*, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha''} c''^2 = 0,$$

et, comme $c'' \neq 0$, cela entraîne

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha''} = \alpha\alpha' - \beta''^2 = 0.$$

Cela exprime que le plan $z = 0$, c'est-à-dire le plan tangent à la quadrique Σ, est aussi tangent au cône C.

3° La racine $\lambda = 0$ étant racine triple, nous pouvons prendre comme axe des x la génératrice de contact du plan $z = 0$ avec le cône C, on a alors $\alpha = \beta'' = 0$ et l'équation en λ se réduit à

$$(3) \qquad \lambda^3 \frac{\partial H}{\partial a'} \alpha' + \lambda^4 H = 0.$$

On voit, enfin, que, pour que $\lambda = 0$ soit racine *quadruple*, il faut et il suffit que l'on ait, en outre,

$$\frac{\partial H}{\partial a'} \alpha' = 0.$$

Or, le cône C étant un cône proprement dit, α' est différent de zéro, donc il reste

$$\frac{\partial H}{\partial a'} = - a c''^2 = 0,$$

ce qui donne, puisque $c'' \neq 0$, la condition $a = 0$ qui exprime que l'axe des x est situé sur la surface Σ, c'est-à-dire que le cône C et la surface Σ ont une génératrice commune, qui est la génératrice de contact du plan tangent commun au cône.

Remarque. — Nous avons supposé, dans ce lemme, que le cône correspondant à la racine considérée était un cône proprement dit ($\Delta \neq 0$); il est aisé de voir ce qui arrive quand le cône se décompose en un système de plans.

Supposons, d'abord, que le cône correspondant à la racine considérée soit un système de deux plans *distincts* et prenons ces deux plans pour plans des yz et des zx.

L'équation du cône est alors

$$C \equiv xy = 0.$$

et l'équation en λ est

$$-(a''d - c''^2)\lambda^2 + \frac{\partial H}{\partial b''}\lambda^3 + \lambda^4 H = 0.$$

La racine correspondant au système de plans, $\lambda = 0$, est donc toujours racine double, ce qui était évident puisqu'elle annule tous les mineurs du hessien de $C + \lambda\Sigma$. Pour qu'elle soit racine *triple,* il faut et il suffit que l'on ait

$$a''d - c''^2 = 0,$$

ce qui exprime que l'axe des z, c'est-à-dire l'intersection des deux plans, est tangent à la quadrique $\Sigma = 0$.

La racine étant *triple*, nous pouvons prendre pour origine des coordonnées le point de contact de l'axe des z avec la quadrique Σ, ce qui donne

$$d = c'' = 0,$$

et l'équation en λ devient

$$2cc'a''\lambda^3 + \lambda^4 H = 0.$$

Pour que $\lambda = 0$ soit racine *quadruple,* il faut que l'on ait soit $c = 0$ ou $c' = 0$, soit $a'' = 0$.

Dans le premier cas, l'un des deux plans $x = 0$ ou $y = 0$, c'est-à-dire un des deux plans qui forment le cône C, est tangent à la quadrique Σ et il coupe Σ *suivant deux génératrices qui font partie de l'intersection.*

Dans le second cas, l'axe des z, c'est-à-dire l'intersection des deux plans, est situé tout entier sur Σ. Les deux plans coupent, chacun, la quadrique Σ suivant l'axe des z et une autre génératrice. *L'intersection se compose de trois génératrices, dont une double.*

Supposons, enfin, que le cône correspondant à la racine considérée soit un plan double. Prenons ce plan pour plan des xy,

$$C \equiv z^2 = 0.$$

L'équation en λ devient

$$\frac{\partial H}{\partial a''}\lambda^3 + H\lambda^4 = 0.$$

La racine $\lambda = 0$ est toujours au moins racine *triple* (ce qui était évident). Pour qu'elle soit en outre racine *quadruple,* il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial H}{\partial a''} = 0,$$

ce qui exprime que le plan $z = 0$ est *tangent* à la quadrique Σ. Il coupe la quadrique suivant deux génératrices, et *l'intersection se compose uniquement de ces deux génératrices* (*doubles*).

Démonstration : 1° *La condition est nécessaire.* — Soient en effet $S = 0$ et $\Sigma = 0$ deux quadriques ayant une génératrice commune. Par leur intersection il passe au moins un cône (ou cylindre) $C = 0$; pour démontrer que le hessien de $S + \lambda\Sigma$ est carré parfait, il suffit, d'après la proposition II, de prouver que cela a lieu pour le hessien de $C + \lambda\Sigma$.

D'ailleurs, d'après la proposition I, nous pouvons prendre pour origine des coordonnées le sommet du cône C, et comme axe des z la génératrice commune. Soient alors

$$C \equiv \alpha x^2 + \alpha' y^2 + \alpha'' z^2 + 2\beta yz + 2\beta' zx + 2\beta'' xy = 0,$$
$$\Sigma \equiv ax^2 + a'yz + 2byz + 2b'zx + 2b''xy + 2cx + 2c'y = 0$$

les équations du cône et de la quadrique Σ, l'équation en λ est

$$[\lambda(\beta' c' - \beta c) + \lambda^2(b'c' - bc)]^2 = 0,$$

qui est bien *carré parfait.*

2° *La condition est suffisante.* — Supposons, en effet, que l'équation en λ, relative à deux quadriques

S et Σ soit carré parfait. Cela peut avoir lieu dans deux circonstances : ou bien si l'équation a *deux racines doubles* ou si elle a *une racine quadruple*.

Si l'équation a *deux racines doubles*, il y a trois cas à considérer :

(a) Les deux cônes C_1 et C_2 correspondant aux deux racines doubles sont deux cônes proprement dits. Alors, d'après le lemme, leurs sommets s_1 et s_2 sont chacun sur l'intersection et, comme chacun des cônes passe par cette intersection, le sommet s_1 est sur le cône C_2 et s_2 sur C_1. La droite $s_1 s_2$ est donc *une génératrice commune* aux deux cônes et fait partie de l'intersection.

(b) Le cône C_1 est un cône proprement dit et le cône C_2 se compose d'un système de plans. D'après le lemme, le sommet s_1 de C_1, étant sur l'intersection, est situé dans l'un des deux plans de C_2, lequel coupe le cône C_1 suivant *deux génératrices qui font partie de l'intersection*.

(c) Les deux cônes C_1 et C_2 se décomposent chacun en un système de deux plans. L'intersection se compose alors de *quatre génératrices* qui sont les droites d'intersection de ces deux couples de plans deux à deux.

Si l'équation en λ *a une racine quadruple*, à cette racine il peut correspondre un cône proprement dit, un système de deux plans distincts ou un plan double. Or nous avons vu dans le lemme et la remarque qui suit, que, dans ces trois cas, il y a *au moins une* génératrice commune.

Donc, dans tous les cas où l'équation en λ est carré parfait, il y a au moins une génératrice commune et la condition est suffisante.

Remarque I. — Nous avons négligé les cas où, au lieu d'un cône, on aurait un *cylindre;* on pourrait déduire le cas du cylindre du cas du cône comme *cas* *limite*, et il serait d'ailleurs facile de l'étudier directement.

Remarque II. — Dans la démonstration précédente, nous avons énuméré tous les cas où il peut y avoir une génératrice commune. Lorsqu'on aura reconnu que l'équation en λ est carré parfait, il sera facile d'avoir la génératrice commune, car on aura, par des calculs élémentaires, les racines de l'équation en λ et, par suite, les cônes correspondants.

Remarque III. — Le lemme et la remarque qui suit pourraient servir de base à une étude complète et méthodique de l'équation en λ relative à deux quadriques. On aurait ainsi une méthode *simple* tout à fait analogue à celle qu'a donnée M. Darboux pour l'étude de l'équation en λ de deux coniques.

NOTE DE MÉCANIQUE;

Par M. A. ASTOR.

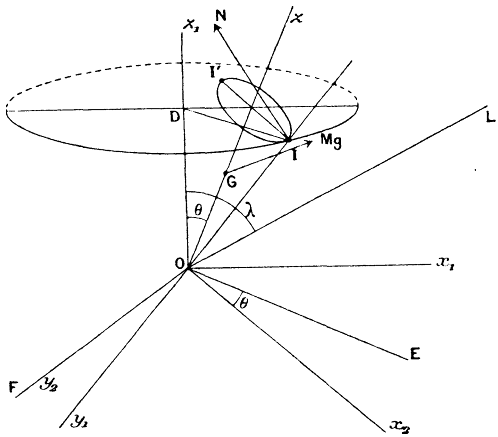
Il s'agit du mouvement d'un solide pesant, homogène, de révolution, fixé par un point de son axe et assujetti à s'appuyer sur un cercle fixe dont l'axe passe par le point de suspension :

1° *En négligeant les résistances passives;*

2° *En tenant compte du frottement de glissement de la surface du corps sur le cercle fixe et supposant la composante normale de la pression sur le cercle dirigée perpendiculairement à la droite qui joint le point fixe au point d'appui.*

Supposons, pour fixer les idées, que le corps se meuve à l'intérieur du cercle; les points du solide qui coïncideront successivement avec ceux du cercle sont sur un parallèle de la surface; nous désignerons par ρ et h le rayon et la distance au point fixe O de ce parallèle, par R et h' les mêmes éléments du cercle fixe.

Prenons pour origine le point O et pour axe fixe Oz_1 l'axe du cercle fixe dirigé du point O vers le cercle; par le point O, menons une demi-droite OL parallèle à la direction de la pesanteur, et soit λ l'angle compris entre O et π qu'elle forme avec Oz_1; choisissons le plan z_1L pour plan des z_1x_1, l'axe Ox_1 faisant un angle aigu avec OL; les axes fixes $Ox_1y_1z_1$ sont déterminés.



Nous prendrons pour axes mobiles : l'axe Oz du corps dirigé vers le parallèle de contact et deux droites rectangulaires Ox, Oy liées au solide dans le plan perpendiculaire à Oz mené par le point O, le trièdre $Oxyz$ étant comme d'habitude superposable au trièdre fixe $Ox_1y_1z_1$. Nous désignerons par A le moment d'inertie du corps par rapport à Ox ou Oy, par C le moment par rapport à Oz, et nous déterminerons la position du solide par les angles θ, φ, ψ d'Euler, en remarquant que, par la nature même de la question, θ est constant.

Soient, à l'instant t, I le point de contact, DI le rayon du cercle R, I'I le diamètre du parallèle, ces droites sont dans le plan $z_1 O z$. Ce dernier coupe $x_1 y_1$ suivant une droite OE que nous choisirons parallèle à DI; le plan xy coupe le plan $x_1 y_1$ suivant une droite perpendiculaire à OE; nous prendrons, pour déterminer l'angle ψ, la direction OF que l'on obtient en faisant tourner OE de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct. Sur la droite d'intersection de xy et de $z_1 z$ prenons la direction Ox_2 qui avec Oz et OF forme un trièdre $Ox_2 y_2 z$ superposable à $Oxyz$; l'angle formé par Ox_2 avec Ox sera $-\varphi-\frac{\pi}{2}$; cette remarque nous sera utile dans la suite.

Le solide peut être considéré comme libre à condition d'adjoindre au point M g parallèle à OL et appliqué en un point G de Oz la réaction du point fixe O et celle du cercle. Si l'on écrit les équations d'Euler, la première disparaît et il ne reste que la seconde qui est déterminée seulement par son moment relatif au point O. En supposant qu'il n'y a pas de résistances passives, elle doit être normale au cercle, c'est-à-dire située dans le plan $z_1 O z$; nous pouvons la décomposer en deux, l'une suivant IO, l'autre normale à cette droite; nous admettrons que la pression exercée par le corps sur le cercle se réduit à une force égale et opposée à cette dernière composante. Si nous appelons N la réaction envisagée de la sorte, la force de frottement sera une force égale à fN dirigée suivant la tangente commune en I aux deux cercles R et ρ en sens inverse de la vitesse de glissement, c'est-à-dire de la vitesse du point I du corps solide. Cette force de frottement sera donc parallèle à Oy_2. Cette remarque nous sera encore utile.

Appelons p, q, r les composantes de la rotation instantanée par rapport aux axes mobiles, p_1, q_1, r_1 ses composantes par rapport aux axes fixes; nous aurons par les formules connues, puisque θ est constant,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} p &= \sin\theta \sin\varphi \frac{d\psi}{dt},\\ q &= \sin\theta \cos\varphi \frac{d\psi}{dt},\\ r &= \frac{d\varphi}{dt} + \cos\theta \frac{d\psi}{dt};\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} p_1 &= \sin\theta \sin\psi \frac{d\varphi}{dt},\\ q_1 &= -\sin\theta \cos\psi \frac{d\varphi}{dt},\\ r_1 &= \frac{d\psi}{dt} + \cos\theta \frac{d\varphi}{dt}.\end{aligned}\right.$$

Deux équations suffiront pour déterminer le mouvement; nous les obtiendrons en exprimant le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à Oz et à Oz_1; nous pourrions remplacer cette dernière équation par l'équation des forces vives, mais en vue du cas du frottement, il est plus commode de procéder ainsi que nous venons de le dire.

Quand on néglige les résistances passives, toutes les forces rencontrent l'axe Oz; l'équation des moments par rapport à cet axe sera donc

$$C \frac{dr}{dt} = 0,$$

d'où

$$(3)\qquad r = n,$$

n étant une constante déterminée par les conditions initiales. Pour écrire la seconde équation, nous avons besoin du moment du poids Mg par rapport à Oz_1; car si nous appelons N ce moment, l'équation, après des réductions faciles, s'écrit

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{A}\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt} + \mathrm{C}r\cos\theta\right) = \mathrm{N},$$

ou

$$(4)\qquad \mathrm{A}\sin^2\theta\,\frac{d^2\psi}{dt^2} = \mathrm{N},$$

puisque r et θ sont constants.

Appelons l la coordonnée z positive ou négative du centre de gravité; les coordonnées de C par rapport aux axes fixes seront, en grandeur et en signe,

$$l\sin\theta\sin\psi, \qquad -l\sin\theta\cos\psi, \qquad l\cos\theta;$$

d'autre part, les composantes de $\mathrm{M}g$ par rapport aux mêmes axes sont

$$\mathrm{M}g\sin\lambda, \qquad 0, \qquad \mathrm{M}g\cos\lambda,$$

par suite

$$\mathrm{N} = \mathrm{M}gl\sin\theta\sin\lambda\cos\psi,$$

et la seconde équation est, en divisant par $\sin\theta$,

$$(5)\qquad \mathrm{A}\sin\theta\,\frac{d^2\psi}{dt^2} = \mathrm{M}gl\sin\lambda\cos\psi.$$

On peut l'intégrer une première fois et l'on obtient, en désignant par D une constante,

$$(6)\qquad \mathrm{A}\sin\theta\,\frac{d\psi^2}{dt^2} = 2\mathrm{M}gl\sin\lambda\sin\psi + \mathrm{D}.$$

Les équations (3) et (6) déterminent φ et ψ par des quadratures.

Calculons maintenant N. Pour cela, considérons le trièdre $\mathrm{O}x_2y_2z$ comme lié au solide; son déplacement dépend uniquement de la rotation $\frac{d\psi}{dt}$ autour de $\mathrm{O}z_1$; nous allons écrire le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à $\mathrm{O}y_2$ supposée fixe. Il suffit d'écrire que la projection sur $\mathrm{O}y_2$ de la vitesse de l'extrémité de l'axe du couple résultant des quantités de mouvement de tous les éléments du corps est égale à la somme des moments de toutes les forces par rapport à cette droite.

Or, d'après une remarque précédente, les coordonnées de l'extrémité de l'axe du couple par rapport à Ox_2, Oy_2, Oz sont

$$-A(p\sin\varphi + q\cos\varphi) = -A\sin\theta\frac{d\psi}{dt}, \qquad o \quad \text{et} \quad Cr;$$

les composantes de la rotation $\frac{d\psi}{dt}$ qui déplace le trièdre sont

$$-\frac{d\psi}{dt}\sin\theta, \qquad o, \qquad \frac{d\psi}{dt}\cos\theta;$$

la méthode de Bour nous donne donc comme projection de la vitesse sur Oy_2

$$-A\sin\theta\cos\theta\frac{d\psi^2}{dt^2} + C\sin\theta\, r\frac{d\psi}{dt};$$

reste à évaluer les moments de N et de Mg.

Si nous représentons OI par d et si nous considérons N comme positive quand elle est dirigée vers l'intérieur de la surface, le moment de N est $-Nd$. Les coordonnées du point d'application de Mg par rapport à Ox_2, Oy_2, Oz_2 sont o, o, l; les composantes de Mg sont $Mg\cos(L, x_2)$, $Mg\cos(L, y_2)$, $Mg\cos(L, z_2)$; donc son moment par rapport à Oy_2 est $Mgl\cos(L, x_2)$. Or nous avons

$$\cos(L, x_2) = \cos(L, x_1)\cos(x_2, x_1) + \cos(L, y_1)\cos(x_2, y_1) + \cos(L, z_1)\cos(x_2, z_1).$$

Nous avons vu que

$$\cos(L, x_1) = \sin\lambda, \qquad \cos(L, y_1) = o, \qquad \cos(L, z) = \cos\lambda;$$

de plus $\cos(x_2, z_1) = -\sin\theta$; il suffit donc de connaître $\cos(x_2, x_1)$.

Dans le trièdre rectangle Ox_2x_1E nous connaissons deux faces $x_2OE = 0$, $x_1OE = \psi - \frac{\pi}{2}$, de sorte que

$$\cos(x_2, x_1) = \cos 0 \sin\psi,$$

et enfin

$$\cos(L, x_2) = \sin\lambda \cos 0 \sin\psi - \sin 0 \cos\lambda,$$

et N est donné par l'équation

$$(7) \qquad \begin{aligned} -A \sin 0 \cos 0 \frac{d\psi^2}{dt^2} + C \sin 0\, r \frac{d\psi}{dt} \\ = -Nd + Mgl(\sin\lambda \cos 0 \sin\psi - \sin 0 \cos\lambda). \end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que l'équation (7) subsistera quand nous tiendrons compte du frottement, car la force de frottement étant dirigée suivant la tangente commune au parallèle et au cercle fixe en I est parallèle à Oy_2, de sorte que son moment par rapport à cette droite est nul; mais les équations (3) et (4) n'auront plus lieu, car nous aurons à tenir compte dans l'évaluation des moments par rapport à Oz et Oz_1 de la force de frottement.

Il est clair d'autre part que les équations, dans l'un et l'autre cas, ne correspondent au mouvement que tout autant que la valeur de N que l'on déduira de (7) sera positive, dans l'hypothèse où nous nous sommes placé d'un contact intérieur.

Il va nous être facile maintenant d'établir les équations du mouvement en tenant compte du frottement de glissement.

Soient x, y, z d'une part, u, v, w d'autre part, les coordonnées et les composantes de la vitesse du point I du corps solide par rapport aux axes mobiles, $x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1$ les quantités correspondantes par rapport aux axes fixes. Nous aurons, d'après des remarques déjà faites,

$$x = -\rho\sin\varphi, \qquad y = -\rho\cos\varphi, \qquad z = h,$$
$$x_1 = \mathrm{R}\sin\psi, \qquad y_1 = = \mathrm{R}\cos\psi, \qquad z_1 = h';$$

donc

$$(8)\quad \begin{cases} u = qz - ry = \cos\varphi\left(h\sin\theta\dfrac{d\psi}{dt} + \rho r\right), \\ v = rx - pz = -\sin\varphi\left(h\sin\theta\dfrac{d\psi}{dt} + \rho r\right); \end{cases}$$

quant à w, il est nul, comme on devait s'y attendre.

De même,

$$(9)\quad \begin{cases} u_1 = q_1 z_1 - r_1 y_1 = \cos\psi\left(\mathrm{R}r_1 - h'\sin\theta\dfrac{d\varphi}{dt}\right), \\ v_1 = r_1 x_1 - p_1 z_1 = \sin\psi\left(\mathrm{R}r_1 - h\sin\theta\dfrac{d\varphi}{dt}\right), \end{cases}$$

et $w_1 = 0$.

Avant d'aller plus loin, nous voyons que la vitesse du point I est la valeur absolue de l'une ou l'autre des deux expressions

$$h\sin\theta\frac{d\psi}{dt} + \rho r, \qquad \mathrm{R}r_1 - h'\sin\theta\frac{d\varphi}{dt},$$

de sorte que, en égalant dans ces deux expressions les coefficients de $\frac{d\psi}{dt}$ et de $\frac{d\varphi}{dt}$, nous avons ces relations que, du reste, la figure permet d'établir directement,

$$(10)\quad \begin{cases} \rho = \mathrm{R}\cos\theta - h'\sin\theta, \\ \mathrm{R} = h\sin\theta + \rho\cos\theta. \end{cases}$$

Nous avons ρ en fonction de R et de h'; calculons aussi h en fonction de ces mêmes quantités; nous trouvons aisément

$$(11)\qquad h = \mathrm{R}\sin\theta + h'\cos\theta.$$

Ces relations (10) et (11) nous seront utiles.

Il nous est facile d'avoir maintenant les composantes X, Y et X_1, Y_1 de la force de frottement dans les deux systèmes d'axes (Z et Z_1 sont nuls).

Posons $h\sin\theta\,\dfrac{d\psi}{dt}+\rho r=V$, et appelons (V) la valeur absolue de V; nous aurons, f étant le coefficient de frottement,

$$\frac{X}{-u}=\frac{Y}{-v}=\frac{fN}{(V)},$$
$$\frac{X_1}{-u_1}=\frac{Y_1}{-v_1}=\frac{fN}{(V)}.$$

Si nous appelons K la quantité positive $\dfrac{fN}{(V)}$, nous aurons donc

$$X=-Ku,\qquad Y=-Kv,$$
$$X_1=-Ku_1,\qquad Y_1=-Kv_1;$$

les moments de cette force par rapport à Oz et à Oz_1 sont

$$\begin{aligned} xY-yX&=-K(xv-yu)\\ &=-K\rho\left(h\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt}+\rho r\right)=-K\rho V,\\ x_1Y_1-y_1X_1&=-K(x_1v_1-y_1u_1)\\ &=-KR\left(Rr_1-h'\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt}\right)=-KRV, \end{aligned}$$

d'après les remarques faites plus haut.

Les équations du mouvement seront donc

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &C\frac{dr}{dt}=-K\rho V,\\ &A\sin^2\theta\,\frac{d^2\psi}{dt^2}+C\cos\theta\,\frac{dr}{dt}\\ &\qquad=-KRV+Mgl\sin\lambda\sin\theta\cos\psi. \end{aligned}\right.$$

Si nous éliminons K entre ces équations (12), nous obtenons

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\rho\left(A\sin^2\theta\,\frac{d^2\psi}{dt^2}+C\cos\theta\,\frac{dr}{dt}-Mgl\sin\lambda\sin\theta\cos\psi\right)\\ &\qquad\qquad-RC\frac{dr}{dt}=0. \end{aligned}\right.$$

Entre les mêmes équations (12), éliminons $\frac{dr}{dt}$, nous aurons

$$A \sin^2\theta \frac{d^2\psi}{dt^2} - Mgl \sin\lambda \sin\theta \cos\psi = - KV(R - \rho \cos\theta),$$

ou, en nous servant de (10) et divisant par $\sin\theta$,

$$(14) \qquad A \sin\theta \frac{d^2\psi}{dt^2} - Mgl \sin\lambda \cos\psi = - KhV.$$

D'autre part, (13) peut s'écrire, en tenant compte des mêmes relations et divisant encore par $\sin\theta$,

$$(15) \qquad \rho A \sin\theta \frac{d^2\psi}{dt^2} - Ch\frac{dr}{dt} - \rho Mgl \sin\lambda \cos\psi = 0.$$

Les équations (14) et (15), quand nous aurons remplacé dans la première K par sa valeur, seront les équations du problème.

Mais $K = \frac{fN}{(V)}$, donc $KV = \pm fN$, suivant que $V \gtrless 0$. Appelons ω la valeur initiale de $\frac{d\psi}{dt}$, ω' celle de $\frac{d\varphi}{dt}$, et posons

$$V_0 = h \sin\theta\omega + \rho r_0 = (h \sin\theta + \rho \cos\theta)\omega + \rho\omega',$$

le signe de V_0 fixera celui qu'on devra prendre à l'origine. Les équations du problème seront donc enfin

$$(16) \qquad \rho A \sin\theta \frac{d^2\psi}{dt^2} - Ch\frac{dr}{dt} - \rho Mgl \sin\lambda \cos\psi = 0,$$

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} & A \sin\theta \frac{d^2\psi}{dt^2} - Mgl \sin\lambda \cos\psi \\ & \quad = \mp \frac{fh}{d}\Big[A \sin\theta \cos\theta \frac{d\psi^2}{dt^2} - C \sin\theta\, r \frac{d\psi}{dt} \\ & \qquad\qquad + Mgl(\sin\lambda \cos\theta \sin\psi - \sin\theta \cos\lambda)\Big], \end{aligned} \right.$$

avec le signe $-$ ou le signe $+$ dans (17) suivant que V_0 sera > 0 ou < 0.

Si le corps devait presser sur le cercle à son extérieur, les équations seraient encore les mêmes, mais on devrait changer dans la seconde le signe de d, car le moment de N aurait changé de signe, tout en étant donné par la même équation.

La forme des équations (16) et (17) nous montre que, dans le cas général, la solution du problème exigerait l'intégration d'une équation différentielle fort compliquée du troisième ordre; nous verrons que, si $\lambda = 0$ ou π, le calcul peut être fait et la question complètement discutée; mais nous pouvons signaler un cas où l'on n'aurait à intégrer qu'une équation différentielle du second ordre : c'est celui où θ et λ seraient tous les deux égaux à $\frac{\pi}{2}$; dans ce cas, le cercle est vertical; l'axe du corps se déplace dans un plan parallèle à celui du cercle, de sorte que le contact doit être extérieur. Les équations deviennent alors, en tenant compte de ce que nous avons dit relativement à N et de ce que $\rho = h$:

$$N = \frac{C \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\psi}{dt}}{d},$$

$$A \frac{d^2\psi}{dt^2} - C \frac{d^2\varphi}{dt^2} - Mgl\cos\psi = 0,$$

$$A \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{Cfh}{d} \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\psi}{dt} - Mgl\cos\psi = 0,$$

en supposant $V > 0$.

Si l'on retranche les deux dernières, on obtient

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{fh}{d} \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\psi}{dt} = 0$$

qu'on peut intégrer et qui donne

$$\frac{d\varphi}{dt} = ke^{-\frac{fh}{d}\psi},$$

K étant une constante déterminée par les données initiales. Alors l'équation à intégrer sera

$$(18)\qquad A\frac{d^2\psi}{dt^2}+\frac{CKfh}{d}e^{-\frac{fh}{d}\psi}\frac{d\psi}{dt}-Mgl\cos\psi=0.$$

Les équations, comme le montre la valeur de N, ne conviennent au problème que tout autant que $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\psi}{dt}$ sont de même signe.

Si nous supposons qu'il en soit ainsi au début, le corps pressera sur le cercle. La valeur trouvée pour $\frac{d\varphi}{dt}$ montre que cette dérivée ne change pas de signe; il n'y a donc à discuter que $\frac{d\psi}{dt}$. Si le coefficient de frottement f était très petit, on pourrait intégrer (18) par approximations successives et suivre la variation de $\frac{d\psi}{dt}$; mais c'est un calcul sur lequel nous n'insisterons pas. On pourrait intégrer si l était nul, mais ce cas rentre comme cas particulier dans celui où λ est égal à 0 ou à π, cas que nous allons discuter complètement.

Supposons le contact intérieur et $\lambda=\pi$, c'est-à-dire le cercle R horizontal et au-dessus du point fixe. Les équations (16) et (17) deviennent, en supposant d'abord pour fixer les idées, $V_0>0$,

$$(19)\qquad \rho A\sin\theta\frac{d^2\psi}{dt^2}=-Ch\frac{dr}{dt},$$

$$(20)\qquad A\frac{d^2\psi}{dt^2}=-\frac{fh}{d}\left(A\cos\theta\frac{d\psi^2}{dt^2}-Cr\frac{d\psi}{dt}+Mgl\right).$$

Il faudrait changer le signe du second membre de cette dernière si V_0 était <0.

(19) s'intègre une première fois et donne

$$\rho A\sin\theta\frac{d\psi}{dt}-Chr=H,$$

avec

$$H = \rho A \sin\theta\omega - C h r_0 = \rho A \sin\theta\omega - C h(\omega' + \omega\cos\theta).$$

Nous en déduisons

$$r = \frac{\rho A \sin\theta \dfrac{d\psi}{dt} - H}{C h},$$

et (20) devient, après des réductions simples,

$$A \frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{fh}{d}\left[\frac{A(h\cos\theta - \rho\sin\theta)}{h}\frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{H}{h}\frac{d\psi}{dt} + Mgl\right].$$

Or nous avons vu que

$$h = R\sin\theta + h'\cos\theta,$$
$$\rho = R\cos\theta - h'\sin\theta;$$

donc

$$h\cos\theta - \rho\sin\theta = h',$$

et enfin l'équation à intégrer devient

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} A\frac{d^2\psi}{dt^2} &= -\frac{fh}{d}\left(\frac{Ah'}{h}\frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{H}{h}\frac{d\psi}{dt} + Mgl\right) \\ &= -\frac{fhF}{d}\left(\frac{d\psi}{dt}\right), \end{aligned}\right.$$

$F\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)$ étant le trinome entre parenthèses.

On pourrait l'intégrer complètement, mais il est plus commode de discuter sans effectuer l'intégration.

l peut être positif ou négatif; nous le supposerons positif pour fixer les idées. Alors toutes les lettres qui entrent dans l'équation sont des quantités positives, sauf H, qui pourra avoir les deux signes, suivant les circonstances initiales.

La valeur initiale de N étant supposée positive, $F(\omega)$ est > 0, de sorte que, pour $t = 0$, $\dfrac{d^2\psi}{dt^2}$ est < 0, et $\dfrac{d\psi}{dt}$ décroît à partir de ω.

Soit ω_1 la valeur de $\dfrac{d\psi}{dt}$ qui annulerait le glissement, c'est-à-dire pour laquelle V serait nul. Si ω'_1 et r_1 sont les valeurs correspondantes de $\frac{d\varphi}{dt}$ et de r, nous aurons

$$h \sin\theta \omega_1 + \rho r_1 = 0,$$
$$\rho A \sin\theta \omega_1 - C h r_1 = H,$$

d'où

$$\omega_1 = \frac{\rho H}{(Ch^2 + A\rho^2)\sin\theta}. \tag{22}$$

et ω_1 a le signe de H.

Remarquant que ω_1 doit être égal à ω si $V_0 = 0$, il est naturel de calculer $\omega_1 - \omega$. En remplaçant H par sa valeur $\rho A \sin\theta\omega - Ch(\omega' + \omega\cos\theta)$, on trouve sans difficulté

$$\omega_1 - \omega = \frac{-ChV_0}{(Ch^2 + A\rho^2)\sin\theta}. \tag{23}$$

$\omega_1 - \omega$ est donc de signe contraire à V_0, c'est-à-dire qu'il est négatif dans le cas présent, puisque nous avons supposé $V_0 > 0$ et $\omega_1 < \omega$.

Dès lors, si $H > 0$, ω_1 et *a fortiori* ω sont positifs, $\frac{d\psi}{dt}$ décroîtra de ω à ω_1, atteindra cette valeur après un temps fini qu'il serait facile de calculer; pendant ce temps, le trinome $F\left(\frac{d\psi}{dt}\right)$ reste positif et le corps presse toujours sur le cercle. Quand $\frac{d\psi}{dt}$ devient égal à ω_1, X et Y s'annulent, le mouvement devient un roulement sans glissement, et, comme nous négligeons le frottement de roulement, ce roulement se continuera indéfiniment avec une vitesse constante. Avant de passer au cas où H serait < 0, nous pouvons démontrer que le roulement que nous venons d'obtenir est un roulement stable. Pour cela, supposons $V_0 < 0$, mais $H > 0$; alors, dans (21), nous devons prendre le second membre avec le signe $+$, de sorte que $\frac{d\psi}{dt}$ croît; (23) montre que $\omega_1 > \omega$; dès lors, si $\omega > 0$, comme $F\left(\frac{d\psi}{dt}\right)$ ne s'annule pour aucune valeur positive de $\frac{d\psi}{dt}$, cette dernière croîtra de ω à ω_1 et nous aurons encore un roulement au bout d'un temps fini.

Cela posé, revenons au cas précédent et supposant que $\frac{d\psi}{dt}$ a atteint la valeur ω_1, de sorte que le mouvement est devenu un roulement, donnons à $\frac{d\psi}{dt}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$ des valeurs $\omega_1 + \varepsilon$, $\omega'_1 + \varepsilon'$, ε et ε' étant des quantités de signes quelconques aussi petites que l'on voudra; il est clair que H n'aura pas changé de signe. Si la petite vitesse de glissement que nous avons communiquée au corps est > 0, le premier raisonnement nous montre que le mouvement redeviendra très rapidement un roulement, et le second montre de même qu'il en sera encore ainsi si la vitesse est négative. Le roulement est donc stable.

Revenons maintenant à l'hypothèse $V_0 > 0$, mais supposons $H < 0$; alors ω_1 est encore $< \omega$, mais il est négatif; si $\omega < 0$, comme $F\left(\frac{d\psi}{dt}\right)$ ne s'annule en ce cas pour aucune valeur négative de $\frac{d\psi}{dt}$, cette dernière décroîtra encore de ω à ω_1 et l'on obtiendra un roulement; il en sera de même quel que soit le signe de ω si $F\left(\frac{d\psi}{dt}\right)$ a ses racines imaginaires ou si, ces racines étant réelles et, par suite, positives, ω est inférieur à la plus petite; mais les choses peuvent se présenter autrement : ω ne peut être compris entre les racines ω_2 et ω_3 de $F\left(\frac{d\psi}{dt}\right)$, mais il pourrait être supérieur à la plus grande ω_3;

alors $\frac{d\psi}{dt}$ décroîtrait de ω à ω_3; la forme de l'équation différentielle montre du reste que $\frac{d\psi}{dt}$ ne pourrait devenir égal à ω_3 qu'après un temps infini; le corps tendrait donc vers une position limite pour laquelle il n'exercerait plus de pression sur le cercle, mais n'atteindrait jamais cette position. Le glissement persisterait toujours. Il est facile de voir, du reste, que le corps accomplirait une infinité de révolutions autour de la verticale, car nous aurions toujours

$$\frac{d\psi}{dt} - \omega_3 > 0;$$

par suite

$$\psi - \psi_0 - \omega_3 t$$

serait une fonction croissante avec le temps; et, comme elle s'annule pour $t = 0$, on aurait constamment

$$\psi - \psi_0 - \omega_3 t > 0,$$

ce qui prouve que ψ pourrait augmenter indéfiniment.

Il reste à voir que ce cas peut se présenter.

Les inégalités auxquelles les constantes de la question devront satisfaire sont les suivantes :

$$\omega > 0,$$

$$A\frac{h'}{h}\omega^2 + \frac{(\rho A\sin\theta - Ch\cos\theta)\omega - Ch\omega'}{h}\omega + Mgl > 0,$$

$$(\rho A\sin\theta - Ch\cos\theta)\omega - Ch\omega' < 0,$$

$$[(\rho A\sin\theta - Ch\cos\theta)\omega - Ch\omega']^2 - 4AMglhh' > 0,$$

$$(2Ah' + \rho A\sin\theta - Ch\cos\theta)\omega - Ch\omega' > 0.$$

Si nous remplaçons dans la seconde et la cinquième h' par sa valeur $h\cos\theta - \rho\sin\theta$, elles deviennent

$$(A - C)\cos\theta\omega^2 - C\omega\omega' + Mgl > 0,$$

$$[(2A - C)h\cos\theta - \rho A\sin\theta]\omega - Ch\omega' > 0.$$

Or nous pouvons supposer $A > C$ et θ aussi petit que nous voudrons pourvu qu'il ne soit pas nul; alors il devient évident qu'on peut satisfaire aux inégalités en prenant ω' négatif et ω positif suffisamment grand. Dans ces conditions, nous aurons un mouvement dans lequel le glissement ne s'annulera jamais.

Le cas où $V_0 < 0$ se discuterait de la même manière et présenterait des circonstances analogues.

Nous allons terminer par l'étude d'un cas particulier intéressant, celui où $h' = 0$. Ce cas aurait une réalisation simple par un cercle tournant autour de son sommet et roulant sur un cercle horizontal ayant pour centre le sommet et au-dessus duquel il serait placé. d devenant égal à R, l'équation sera

$$(24) \qquad A \frac{d^2\psi}{dt^2} = \mp \frac{fh}{R} \left(\frac{H}{h} \frac{d\psi}{dt} + Mgl \right),$$

suivant que V sera $>$ ou < 0. Supposons d'abord $V > 0$, c'est-à-dire que nous prenions le signe —. Les formules (23) et (24) qui donnent ω_1 et $\omega_1 - \omega$ subsistent et montrent que $\omega_1 < \omega$.

Si $H > 0$, $\frac{d\psi}{dt}$ qui décroît est > 0, car il est supérieur à ω_1 qui est lui-même positif; quand il arrive à la valeur ω_1, le mouvement devient un roulement sans glissement.

Si $H < 0$ mais $\frac{H}{h}\omega + Mgl > 0$, ω_1 est < 0; d'autre part, $\frac{H}{h}\omega_1 + Mgl > 0$, d'après la formule (23) qui donne ω_1; $\frac{d\psi}{dt}$ peut donc décroître de ω à ω_1, sans que le corps cesse de presser sur le cercle; quand $\frac{d\psi}{dt}$ devient égal à ω_1, le mouvement devient un roulement sans glissement.

Si $H = o$, la seule différence est que $\omega_1 = o$; pendant que le corps glisse, on a

$$A\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{fh}{R}Mgl,$$

c'est-à-dire que l'angle ψ varie pour ainsi dire d'une façon uniformément accélérée, suivant la formule

$$A(\psi - \psi_0) = -\frac{fhMgl}{R}\frac{t_2}{2} + A\omega t.$$

Nous verrions de même que, quand $V_0 < o$, le mouvement devient un roulement sans glissement.

Remarquons que, dans les deux cas, si l'on suppose $H = o$, le corps tend vers une position limite pour laquelle on a

$$\frac{d\psi}{dt} = o, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = o,$$

et dans laquelle il demeurera par suite en repos. Il atteint du reste cette position limite après un temps fini et facile à calculer.

Les intégrales, quand $h' = o$, se présentent sous une forme simple qui se prête facilement au calcul, et même à la discussion.

En supposant encore $V_0 > o$, l'équation s'écrit

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{fH}{AR}\frac{d\psi}{dt} = -\frac{fhMgl}{AR}.$$

On en déduit

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{hMgl}{H} + Ke^{-\frac{fH}{AR}t},$$

K étant une constante déterminée par l'équation

$$\omega = -\frac{hMgl}{H} + K,$$

de sorte que

$$(25) \qquad \frac{d\psi}{dt} = -\frac{hMgl}{H} + \left(\omega + \frac{hMgl}{H}\right)e^{-\frac{fH}{AR}t}$$

et

$$(26)\quad \psi - \psi_0 = -\frac{hMgl}{H}t - \frac{AR\left(\omega + \frac{hMgl}{H}\right)}{fH}\left(e^{-\frac{fH}{AR}t} - 1\right).$$

Supposant par exemple $H > 0$, calculons le temps τ pendant lequel le corps glissera. Il sera donné par l'équation

$$\omega_1 = -\frac{hMgl}{H} + \left(\omega + \frac{hMgl}{H}\right)e^{-\frac{fH}{AR}\tau}$$

ou

$$\tau = \frac{AR}{fH}\log\frac{\omega + h\frac{Mgl}{H}}{\omega_1 + h\frac{Mgl}{H}},$$

et l'on voit que τ est bien positif, car nous savons que ω_1, dont nous avons la valeur, est $< \omega$ et ils sont positifs tous les deux.

Si H est < 0, nous supposons que

$$H\omega + hMgl > 0,$$

et, comme ω_1 est $< \omega$, il est clair que

$$H\omega_1 + hMgl > H\omega + hMgl.$$

Or ici nous aurons

$$e^{-\frac{fH}{AR}\tau} = \frac{H\omega_1 + hMgl}{H\omega + hMgl},$$

et comme $H < 0$, cette équation fournit bien une valeur positive pour τ.

Nous verrions de même le cas où $V_0 < 0$.

Remarque. — Nous avons vu que la composante normale de la pression que le corps exerce sur le cercle au point de contact est indéterminée, son moment seul par rapport au point fixe entrant dans les équations.

Cette indétermination, purement mathématique, est du genre de celle qu'on rencontre dans le mouvement d'un solide autour d'un axe fixe. Nous avons supposé la pression effectuée perpendiculaire à la droite d'appui OI; mais les équations conserveraient leur forme et les résultats que nous en avons déduits subsisteraient si la direction de cette pression, sans être perpendiculaire à OI, faisait avec cette droite un angle constant. Il ne saurait en être autrement si, en supposant que la direction de cette pression ne dépend que des corps au contact, la vitesse de glissement était constante. L'hypothèse faite revient donc à supposer que cette direction est indépendante de la vitesse de glissement, ce qui est conforme à la théorie du frottement.

Si nous supposons que la surface qui limite le corps est une surface convexe, elle pourra être considérée comme roulant à l'intérieur d'un cône de révolution ayant pour base le cercle R et pour sommet le point commun où les plans tangents à la surface aux points I de contact successifs rencontrent l'axe Oz_1 de ce cercle. On pourrait supposer N normale à ce cône, mais il y aurait un cas d'exception, celui où OI serait normale à la surface, et où cette dernière, dans le voisinage du point I, serait extérieure à la sphère de rayon OI. Car dans ce cas, avec l'hypothèse faite, le moment de la réaction N serait toujours nul et, si l'on négligeait le frottement, le corps devrait toujours se mouvoir comme s'il était simplement fixé par le point O, ce qui est impossible.

AUGUSTE COMTE EXAMINATEUR D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE [1];

PAR M. PIERRE LAFFITE,
Professeur au Collège de France.

EXAMENS DE RENNES.

DAVIEL, 19 ans (de $9^h 40^m$ à $11^h 40^m$).

1° *Quadrature d'un décagone régulier.*

Déterminant d'abord convenablement le rayon circonscrit, il le prend ensuite pour l'inscrit dans l'estimation de l'aire; mais il rectifie cette erreur sur avertissement et en commet toutefois de nouvelles dans l'évaluation finale évidemment absurde. Dans la revision il ne donne aucun signe de sagacité. (*Indifferently.*)

2° *Aire de la sphère.*

Exposition convenable de la démonstration, en faisant assez bien ressortir, sur interpellation, le véritable esprit de la méthode. Il en déduit bien la conversion graphique d'un globe en cercle et en mappemonde. (*Well.*)

Invité d'évaluer la population terrestre à 1000 habitants par lieue quarrée, il effectue très bien toutes les parties de l'opération, en fixant assez bien, quoique péniblement, le vrai degré de précision obtenu. (*Well.*)

3° *Dimensions d'une chaudière cylindrique d'après son volume et sa surface.*

Il forme très bien l'équation au rayon. Il l'analyse imparfaitement mais avec intelligence et assez bien en harmonie avec la question et sépare bien les deux cas par la formule ordinaire de réalité. Invité à déterminer les dimensions de la chaudière maximum, il aperçoit par cette formule la liaison de ce cas avec celui des racines égales; il en déduit bien ensuite,

(1) *Voir* même Tome, p. 65, 113 et 405.

mais avec hésitation, la détermination proposée, d'une manière toutefois trop pénible et confuse. (*Well.*)

4° *Construction de l'équation précédente*

$$x^3 - a^2x + \frac{8}{3}b^3 = 0.$$

Il emploie d'abord deux paraboles, qu'il construit péniblement et avec hésitation, mais d'une manière assez intelligente, sans profiter toutefois heureusement des circonstances pour simplifier le tracé. Il ne peut placer nettement les deux courbes en harmonie avec la question. (*Indifferently.*)

5° *Hyperbole par* 1 *directrice,* 1 *asymptote et* 1 *tangente.*

Prenant pour un axe la directrice et l'origine sur l'asymptote, il formule assez bien, mais sur avertissement, les conditions de la directrice, et spontanément celles de l'asymptote et de la tangente. (*Enough well.*)

Il analyse imparfaitement, mais avec intelligence, les divers cas d'impossibilité et ne reconnaît pas leur vrai symptôme algébrique. (*Weakly.*)

Interpellé sur le lieu du foyer en supprimant la tangente, il le reconnaît très péniblement, mais avec justesse. (*Enough well.*)

Ce candidat a un assez bon esprit, quoique lent et diffus, et une instruction assez rationnelle pour être hautement admissible. (A balancer probablement avec Sers et Anisson Dupéron, mais plus près de ce dernier. (+ ou + +.)

De Khor, 20 ans (de $11^h 40^m$ à $1^h 35^m$).

1° *Théorème de Pythagore.*

Exposition banale de la démonstration dont il ne peut, sur interpellation, faire convenablement ressortir le nœud. (*Very weakly.*)

Il étend assez bien le théorème aux polygones semblables et ensuite aux cercles. Il indique assez bien la condition relative aux ellipses, mais sans la justifier assez nettement, même *a posteriori.* A l'égard des paraboles, quoiqu'il sache leur similitude nécessaire, il ne peut décider la question. (*Weakly.*)

2° *Équilibre d'un poids soutenu par deux points sur deux plans inclinés.*

Exposition intelligente des deux conditions générales, analyse pénible mais judicieuse des différents cas, estimation correcte des pressions et détermination pénible mais exacte de l'inclinaison relative au minimum de chaque pression. (*Well.*)

Situation d'équilibre d'un triangle équilatéral.

Après une longue hésitation et divers essais hasardés, il ne peut concevoir aucun principe de solution. (*Badly.*)

3° *Discussion de la courbe* $y^4 - x^4 = 1$.

Il discute très bien l'ordonnée. Pour la tangente, il veut d'abord différencier; mais, rappelé à l'ordre officiel, il a peine à établir la règle élémentaire des tangentes, à laquelle il finit cependant par arriver. Il discute la tangente avec quelque intelligence, mais avec confusion et incertitude; il trouve assez bien l'asymptote et la vérifie lourdement : finalement, il a très péniblement reconnu la vraie forme. (*Near about well.*)

Ce candidat n'est que strictement admissible, quoique son esprit ne manque pas de justesse et que son instruction paraisse mieux comprise que chez le vulgaire des candidats de Paris. (A balancer probablement avec La Monneraye ou très peu au-dessus. (+).

ROCHER, 19 ans (de 5^h à 6^h45^m).

1° *Aire de la zone tempérée en hectares.*

Il prend une marche très compliquée pour évaluer la hauteur, et ne peut aboutir d'abord qu'à une identité. Toutefois, il change spontanément de marche, et parvient au résultat, quoique péniblement, sauf la transformation trigonométrique qu'il ne peut point accomplir. Il ne peut non plus estimer le rayon en mètres. (*Weakly.*)

2° *Point dont la somme des distances à trois autres est la moindre.*

Traitant la question analytiquement, il ne reconnaît pas la difficulté relative aux deux variables indépendantes et procède comme pour une. Formellement averti de cette fausse marche, il change de méthode et cherche une détermination directe; mais il ne présente, après de longs essais, aucune idée véritable de solution. (*Weakly.*)

3° *Doctrine des combinaisons.*

Il expose très bien une détermination directe de la formule des combinaisons. (*Very well.*)

Invité à énumérer les mots de quatre consonnes et trois voyelles, il finit par y parvenir très bien; pour exclure ceux où les quatre consonnes se suivent, il y parvient aussi, quoique péniblement, avec une véritable sagacité. (*Very well.*)

4° *Théorie de l'équation au quarré des différences.*

Exposition intelligente de la théorie ordinaire, mais pénible et imparfaite sur les inductions de l'état des signes de la transformée envers les racines de la proposée. (*Enough well.*)

Interpellé si toute équation est propre à être au quarré des différences d'une certaine autre primitive, il ne croit à la nécessité d'aucune condition. (*Weakly.*)

5° *Lieu des sommets des paraboles ayant le même foyer et une tangente commune.*

Prenant pour axes la tangente et la perpendiculaire du foyer, il ne peut former nettement l'équation du système, faute de conception assez large du foyer. (*Very weakly.*)

Invité à fixer *a priori* la nature de ce lieu, il discute graduellement avec beaucoup de justesse les caractères préliminaires de cette courbe, mais il ne croit pouvoir opérer la détermination précise que par la supposition gratuite que la courbe doit être du second degré, auquel cas il ne sait même accomplir nettement la solution. (*Imperfectly, but well.*)

6° *Équilibre d'un poids sur un plan.*

Explication très pénible, mais finalement juste, des deux conditions générales. Il estime assez judicieusement les modifications relatives au frottement. Invité à fixer le maximum d'inclinaison ainsi compatible avec l'équilibre, il finit par y parvenir très bien. (*Well.*)

Très judicieux, quoique peu sagace, mais fort mal enseigné, il est cependant admissible, bien qu'il fût dans son intérêt d'attendre encore un an, s'il devait être en meilleures mains. (+).

EXAMENS D'ANGOULÊME.

Montagut, 19 ans (de 10^h à 12^h).

1° *Simplification des fractions numériques.*

Exposition imparfaite mais intelligente du principe et plus convenable de la recherche du diviseur maximum. Invité à hâter la production générale du symptôme d'irréductibilité, il indique fort bien et d'une manière qui semble spontanée la faculté de diviser par excès comme par défaut; mais il en déduit d'abord très mal la limite générale du nombre des divisions; et quoiqu'il se rectifie ensuite à cet égard en général, il ne voit pas la formulation du nombre cherché. (*Near about well.*)

2° *Aire d'un triangle d'après ses côtés.*

Il calcule bien, à l'ordinaire, la hauteur, et puis l'aire, sans trop motiver les transformations successives. Il en déduit trop péniblement, mais avec justesse, le cas de la rationalité, qui le conduit au triangle rectangle, et il finit même par apercevoir incomplètement quelques autres triangles. (*Enough well.*)

Invité à y chercher le maximum des isopérimètres, il le fait assez bien. (*Well.*)

(Il demande ici à suspendre l'examen, à cause de son état subit de maladie.)

(L'examen est repris le lendemain, à $9^{h}30^{m}$ matin.)

3° *Équilibre d'un poids sur un plan résistant.*

Il analyse avec intelligence les conditions générales de cet équilibre, ainsi que les aperçus généraux relatifs à la stabilité. Il explique fort judicieusement les modifications réelles tenant au frottement, et en déduit bien, quoique avec un peu de confusion, le plus grand escarpement compatible avec l'équilibre. (*Very well.*)

4° *Dimensions d'un bol d'après son volume et sa surface.*

Il forme bien l'équation relative à la hauteur

$$x^3 - \frac{6}{5} m^2 x + \frac{8}{5} p^3 = 0.$$

Il l'analyse immédiatement par la condition de réalité, mais il hésite beaucoup pour prononcer sur le signe nécessaire des racines, sans penser même à Descartes, ni aux lois fondamentales de composition : il ne s'en tire que par des substitutions. Invité à se prononcer si alors les deux racines satisfont à la condition de la hauteur moindre que le diamètre $\left(\text{ce qu'il réduit bien à } y < \frac{m}{2}\right)$, il la transforme en $x < m$, et ne croit pas d'abord pouvoir prononcer sans résoudre l'équation : cependant, sommé d'insister, il pense à substituer m, et trouve que la vérification n'est pas la suite toujours nécessaire de la condition de réalité. Il concilie vaguement cette analyse avec la question et ne voit pas bien si, par sa nature, le problème doit, en cas de possibilité, admettre 3 solutions ou 2. Invité enfin à déduire les dimensions du bol maximum, il perd de vue son analyse antérieure; cependant, en se ravisant, il explique fort bien que ce cas correspond à une racine double. Mais, une fois là, il ne croit pas pouvoir évaluer l'inconnue autrement que par l'application des règles de résolution numérique des équations, en cherchant d'abord les racines commensurables et ensuite les incommensurables. (*Moderately*).

5° *Lieu du sommet d'une parabole invariable tangente à un angle droit fixe.*

Après avoir bien formulé les deux contacts, il pense, après avertissement, à exprimer l'invariabilité en formulant la constance de la distance du foyer au sommet. Pour formuler ce caractère, il procède d'après la théorie rationnelle des foyers qu'il paraît bien comprendre; il choisit ensuite, à l'égard du sommet, le caractère que la tangente y est perpendiculaire à la ligne focale et l'exprime convenablement. Il indique ensuite, d'une manière strictement satisfaisante, l'ensemble des opérations qui conduiraient à l'équation du lieu demandé. (*Enough well.*)

Intelligent, judicieux, et assez bien instruit, il sera probablement très bon à l'École s'il travaille bien. (A classer, presque sans doute, entre Tournadre et Sers, en le balançant avec Lepennec.) (+ +).

ALARD, 18 ans (de 1^h à 2^h50^m.)

1° *Théorème de Pythagore.*

Il démontre d'abord par les lignes, et ensuite par les aires, en faisant bien ressortir, mais sur interpellation, le véritable nœud de la démonstration. Il étend convenablement le théorème aux polygones semblables et ensuite aux cercles. Interpellé sur les ellipses, il répond fort bien. A l'égard des segments paraboliques homologues, il répond aussi fort bien *a posteriori* et *a priori*. (*Very well.*)

2° *Similitude des sections coniques.*

Dans le cas des ellipses, il en confond les axes, et démontre alors assez bien, par une comparaison simple des équations, la condition de similitude, quoique un peu trop péniblement. (*Well.*)

Invité à prononcer, dans ce dernier cas, si la seule définition habituelle de la parabole ne suffirait pas pour motiver immédiatement la proposition, il paraît soupçonner le principe de la théorie générale. Pour m'en assurer, je l'invite à prononcer sur les cissoïdes de Dioclès, et il répond malheureusement qu'elles ne sont pas toutes semblables. (*Weakly.*)

3° *Équation de la cissoïde ordinaire d'après la définition de Dioclès.*

Il motive fort rationnellement son choix très heureux des axes. Il forme alors assez simplement, et d'une manière évidemment spontanée, la véritable équation. Il discute bien l'ordonnée, pour quelqu'un évidemment peu habitué aux discussions de courbe. Il ne pense point à discuter la tangente pour décider de la forme de la courbe. Il imagine, sur mon avertissement, la comparaison de la courbe à la corde, et décide très bien ainsi, sans calcul, par une considération géométrique fort simple et certainement spontanée. (*Well.*)

4° *Théorème de M. Sturm.*

Il s'attache d'abord à la partie principale de l'argumentation, qu'il explique toutefois avec un peu de confusion. Invité à la manifester géométriquement, il finit par y parvenir péniblement avec un peu d'aide. Il termine ensuite convenablement la démonstration, quoique toujours un peu péniblement. (*Well.*)

Il croit que la proposition ne s'étend pas au cas des racines égales. (*Weakly.*)

Interpellé d'assigner ainsi les conditions d'entière imaginarité de $x^4+px=q$, il indique suffisamment la marche et répond avec intelligence sur les principaux incidents de l'exemple. (*Well.*)

5° *Section conique d'après* 1 *directrice et* 3 *points.*

Il ne produit, après une longue hésitation, aucune idée nette de solution, soit graphique, soit analytique, quoique averti qu'il pourrait choisir indifféremment. (*Very weakly.*)

Intelligent et judicieux, il sera probablement une utile acquisition pour l'École, quoique ayant été évidemment trop mal enseigné. (+ +.)

(A classer, presque sans aucun doute, immédiatement après Sers.)

CHABRIER, 22 ans (de $2^h 50^m$ à $5^h 05$.)

1° *Aire de la sphère.*

Exposition intelligente de la proposition en faisant ressortir, mais sur interpellation, le vrai motif des transformations principales. Il trouve, sur-le-champ, la conversion graphique de la sphère en cercle ou en mappemonde. (*Well.*)

Invité à évaluer en hectares l'aire de la zone tempérée, il finit, après une longue hésitation, par trouver la hauteur et puis l'aire sous la forme la plus simple, y compris la transformation trigonométrique. Il évalue bien le rayon en unités convenables et exécute avec intelligence l'ensemble des opérations numériques, en prenant toutes les précautions délicates pour maintenir les erreurs dans le même sens et en marquant bien le degré d'approximation obtenu. (*Well.*)

2° *Point dont la somme des distances à trois autres est la moindre.*

Il pense d'abord au centre du cercle circonscrit et reconnaît presque aussitôt son erreur. Après quelques autres fausses indications, il procède analytiquement et s'aperçoit toutefois spontanément qu'il n'arrivera pas ainsi à cause de deux variables indépendantes. L'analyse de cet échec le conduit judicieusement à penser, avec un peu d'aide, qu'il doit d'abord supposer constante l'une des distances. La question ainsi transformée, il tente encore deux fausses constructions et ne peut aboutir. (*Indifferently.*)

3° *Inscrire, dans une sphère donnée, un cône de volume donné.*

Il forme très bien l'équation à la hauteur $y^3 - 2ry^2 + 4a^3 = 0$. Il cherche, par Sturm, la condition de réalité en y commettant une erreur grave (ôter le facteur y), qu'il répare presque aussitôt et formule bien cette condition. En cas de réalité, il croit d'abord les trois racines positives et se rectifie promptement en voyant bien qu'elles sont suffisamment petites. Invité à en déduire le cône maximum, après avoir d'abord assez bien concilié son analyse avec la figure, il hésite excessivement à reconnaître *a posteriori* que ce cas correspond à une racine double, et le voit aussi *a priori*, quoique d'une manière un peu vague et surtout pénible. D'après ce principe, il achève convenablement l'opération et compare bien ce cône avec le cône équilatéral. (*Near about well.*)

4° *Équilibre d'un poids soutenu par deux plans inclinés.*

Il explique avec intelligence, quoique un peu péniblement et confusément, les deux conditions de cet équilibre et le rapport des pressions. Invité à déduire la situation d'un seul plan favorable à la moindre pression, il le fait très bien. (*Well.*)

Invité à déterminer la situation d'équilibre d'une ellipse donnée, il regarde judicieusement l'ellipse comme donnée et cherche à ajuster convenablement les deux tangentes. En partant avec sagacité d'après la petite équation de l'ellipse, il indique très bien l'ensemble de cette opération difficile de Géométrie analytique. (*Very well.*)

Interpellé enfin de convertir cet exemple en une méthode générale pour une courbe quelconque donnée, il généralise très bien. (*Very well.*)

Intelligent et judicieux, il manifeste une véritable portée, quoique un peu brouillon et d'un esprit trop incertain. Il sera certainement, malgré les apparences, une bonne acquisition pour l'École Polytechnique, s'il y travaille convenablement. (A classer, très probablement, entre Widmer et Boutier.) (+ +.)

VIVIER, 19 ans (de 12^h à 2^h).

1° *Triangle dont les trois côtés de l'aire sont des nombres entiers consécutifs.*

Il forme aisément l'équation convenable. Il la résout lourdement, mais sans erreur, et la vérifie bien. (*Well.*)

Invité à poursuivre l'analyse algébrique de cette équation, il ne pense point d'abord à profiter de la racine déjà trouvée qui réduirait au second degré. Il la discute d'ailleurs assez raisonnablement, mais sans sagacité. Il y fait ensuite disparaître le second terme, afin d'appliquer la condition de réalité et reconnaît ainsi que les autres racines sont imaginaires. Invité alors à les déterminer, il pense enfin à ôter la racine connue et termine bien. (*Enough well.*)

2° *Retour d'une bille à sa position initiale après une double réflexion sur un billard circulaire.*

Il fait d'abord une figure absurde que je suis obligé de rectifier formellement. Persistant, malgré mon avertissement, à faire de la Géométrie analytique, il choisit d'ailleurs de bons axes et forme bien la seconde équation au point d'incidence. Il construit bien, mais trop machinalement, l'hyperbole équilatère correspondante. Invité à y constater les deux vérifications prévues par la nature du problème, il exécute péniblement celle relative à la circonférence et beaucoup trop vaguement celle du centre. Interpellé si ces deux contrôles suffisent pour garantir la justesse générale de son équation, il hésite beaucoup et finit par répondre très juste, en énonçant même assez distinctement le vrai principe général de la doctrine des vérifications. (*Well.*)

Engagé maintenant à se passer de son hyperbole, il forme directement, après une légère indication, l'équation déterminée convenable du troisième degré, qu'il discute faiblement. Averti par moi de l'existence d'une racine étrangère, qu'il n'a pu spontanément apercevoir, je suis encore forcé de la lui indiquer formellement. Après l'avoir ôtée, il trouve la formule et y effectue bien, mais toujours péniblement, les deux vérifications. (*Enough well.*)

3° *Discussion de la courbe* $y^2 = x^3 - x^4$.

Il discute assez bien l'ordonnée, et un peu moins bien la tangente. Il trouve exactement la vraie figure, et les points les plus remarquables, sauf toutefois le point d'inflexion qu'il ne voit pas où placer, quoique très clairement prévu par l'ensemble de la discussion. (*About well.*)

4° *Équilibre des forces parallèles quelconques.*

Exposition raisonnable, mais très lourde, des conditions générales de cet équilibre; analyse très imparfaite des différents cas de gêne. (*Moderately.*)

Judicieux, quoique faiblement intelligent, assez bien instruit, et surtout fort exercé scolastiquement, il sera, sans doute, à tout prendre, une solide acquisition pour l'École. (Entre Le Correur et Blondeau très probablement.) (++).

EXAMENS DE TOULOUSE.

Larroque, 19 ans (de 3^h à $4^h 20^m$).

1° *Inscrire dans un triangle donné un rectangle d'aire donnée.*

Il forme très bien et rapidement l'équation à la base. Il explique trop vaguement la double solution, d'une manière qui en indiquerait, sur la figure, trois aussi bien que deux. Invité à trouver le rectangle maximum, il le trouve très péniblement après avoir dit d'avance qu'il devait être quarré. (*Moderately.*)

2° *Théorème de Pythagore.*

Exposition vulgaire de la démonstration par les aires, en faisant toutefois bien ressortir, sur interpellation, le nœud. Il étend bien le théorème aux polygones semblables et ensuite aux cercles. Interpellé sur les ellipses, il répond bien que les axes y doivent être proportionnels, et finit par le justifier *a posteriori*. Il répond de la même manière à l'égard des segments paraboliques toujours *a posteriori*. Invité à prononcer *a priori*, il répond par la similitude.

3° *Similitude nécessaire des paraboles ordinaires.*

Il pose directement en principe que cette similitude résulte nécessairement de la réductibilité à des équations où il n'entre qu'un seul paramètre. Invité à démontrer ce principe en prenant pour texte la parabole, il fait coïncider les axes et malheureusement les foyers de deux paraboles quelconques, et ne peut aboutir qu'à grand'peine à compléter la démonstration, de manière à faire croire que le principe ne soit chez lui qu'un vague et récent ouï-dire. (*Enough well.*)

4° *Discussion de la courbe* $y = x^5$.

Il discute faiblement l'ordonnée, et un peu mieux la tangente, où il voudrait faire étalage de différentiation. Il finit par donner toutefois la vraie figure. (*Near about well.*)

Invité à discuter les intersections rectilignes, il voit d'abord 1 intersection au moins dans tous les cas, et croit 5 au plus, qu'il finit cependant, d'après Descartes, par réduire à 3. Interpellé d'assigner la valeur de a (dans $y = ax + b$), qui, b restant fixé, séparerait les droites à 1 intersection et celles à 3, il pense aussitôt à la tangente; mais il a beaucoup de peine à formuler la condition précise du contact, quoique s'y prenant à peu près bien. (*Enough well.*)

5° *Lieu des projections du foyer d'une parabole sur les normales.*

Il forme bien les équations préparatoires, et exécuterait les éliminations, mais trop laborieusement. Invité alors à déterminer la courbe sans aucun calcul ultérieur, en supposant la courbe du second degré, il reconnaît assez bien que ce doit être une parabole, ayant pour axe celui de la parabole et pour sommet le foyer; pour trouver le paramètre, il pense heureusement à la normale à 45°, et finit par s'en bien tirer. (*Enough well.*)

6° *Parallélogramme des forces.*

Exposition assez intelligente de la décomposition tirée des forces parallèles. Invité à modifier la construction pour dispenser du concours effectif, il trouve bien la direction et l'intensité, mais nullement le point d'application. (*Indifferently.*)

(A balancer très probablement Maurel et certainement avant Vaisse). +.

Esprit lent et embarrassé, mais logique et même sagace, il vaut beaucoup mieux qu'il ne paraît; quoique son instruction soit un peu étroite, il réussirait probablement à l'École.

EXAMENS DE MONTPELLIER.

SIMONNEAU, 19 ans (de $12^h 15^m$ à $2^h 15^m$).

1° *Simplification des fractions numériques.*

Exposition convenable du principe et de la méthode du diviseur maximum. Invité à hâter la production du symptôme d'irréductibilité, il proclame immédiatement (mais sans spontanéité probablement) la faculté de diviser par excès; mais il fixe très mal ainsi la limite du nombre des opérations (le quart du diviseur), et, quoique averti, il persiste à confondre toujours le décroissement par équidifférence à celui par équiquotient. (*Near about well.*)

Il explique très bien les abréviations propres aux décimales. (*Very well.*)

Invité à simplifier ultérieurement, en n'altérant que fort peu et à un degré donné, il pense aussitôt aux fractions continues, mais s'en sert fort mal. (*Weakly.*)

2° *Bissection d'un hémisphère.*

Il forme bien l'équation à la hauteur $x^3 - 3rx^2 + r^3 = 0$. Il la discute en appliquant la condition ordinaire de réalité, après avoir heureusement changé x en $\frac{1}{x}$ pour faire disparaître le second terme : il assigne bien d'ailleurs les signes des racines. Il pense d'ailleurs spontanément à s'assurer très simplement, par la seule substitution de r, que l'une des racines positives est trop grande pour la question. Invité à approcher de la vraie valeur, il prend pour inconnue $\frac{x}{r}$, et y applique convenablement les fractions continues. (*Well.*)

3° *Construction de l'équation précédente.*

Il y emploie la parabole $x^2 = ry$, et l'hyperbole correspondante, qu'il construit bien toutes deux. Il montre fort bien, et par la voie la plus simple, la concordance de la figure avec l'analyse algébrique précédente. (*Very well.*)

Invité à remplacer son hyperbole par un cercle, il signale aussitôt l'impossibilité de le faire sans élever le degré d'une unité. Une première tentative inutile l'engage à prononcer que cette substitution ne peut se faire, et il y persiste malgré la discussion analytique et géométrique. (*Weakly.*)

4° *Lieu des sommets des paraboles ayant même foyer et un point commun.*

Employant comme auxiliaire l'équation de la directrice, il forme très bien l'équation du système. Il cherche ensuite les coordonnées du sommet pour en trouver la relation, comme point sur le diamètre à cordes rectangulaires; il exécute d'ailleurs avec intelligence ce plan trop compliqué de calcul, et indique bien le mode de formation analytique du lieu. (*Well.*)

Invité à construire directement la courbe par points, il le fait très bien, et en déduit, sur interpellation, l'équation du lieu. (*Well.*)

Invité enfin à indiquer, par cette construction, la figure générale de la courbe, il le fait assez bien, mais sans rien de saillant, et ne peut assigner que très péniblement sa tangente aux points principaux. (*Near about well.*)

5° *Équilibre d'un poids soutenu par deux plans inclinés.*

Explication convenable, quoique d'abord un peu confuse, des conditions générales et du calcul des pressions; il en déduit bien la direction propre à la moindre pression isolée sur chaque plan. (*Well.*)

Invité à trouver la situation d'équilibre d'un triangle équilatéral, il présente un aperçu trop compliqué, et d'ailleurs incomplet, de solution trigonométrique, qui témoigne cependant de l'intelligence. (*Moderately.*)

Judicieux et intelligent, quoique trop porté à calculer sans réflexion, et d'ailleurs fort instruit, il sera une bonne acquisition pour l'École (+ +).

(A classer, presque sans aucun doute, entre Doutres et Tournadre).

Bonnet, 18 ans (de $1^h 15^m$ à $4^h 15^m$).

1° *Inscrire un quarré dans un triangle.*

Il expose bien la construction ordinaire. Invité à classer les trois quarrés, il répond, d'une manière évidemment préparée, que cet ordre est inverse de celui des côtés. (*Well.*)

2° *Retour d'une bille à sa position initiale après deux réflexions consécutives sur un billard circulaire.*

Prenant pour inconnues les coordonnées du point d'incidence, il forme leur équation et détermine bien l'hyperbole correspondante, sans s'apercevoir sur l'équation, quelque évident que ce soit, qu'elle est équilatère, ce qu'il ne reconnaît qu'en la rapportant formellement au centre au lieu du sommet. Il vérifie bien les deux cas exceptionnels, mais sans pouvoir décider si un tel contrôle est suffisant ni prononcer en général sur le principe du nombre des vérifications. (*Enough well.*)

Invité à construire en se passant de son hyperbole, il cherche le point d'intersection des deux courbes par une équation du second degré, d'où il tire la formule convenable. Engagé enfin à former cette équation d'une manière directe et élémentaire, il finit par le faire convenablement, y découvre, sur avertissement, la racine étrangère, et forme bien l'équation. (*Well.*)

3° *Discussion de la courbe* $y^3 + x^3 = 1$.

Il discute bien l'ordonnée, mais on voit qu'il n'a aucune habitude de la discussion des courbes, puisqu'il ne pense ni à la tangente, ni à aucun autre mode formulé de décider du sens de la courbure. Il remédie spontanément à ce défaut d'instruction, en pensant à comparer la courbe avec une corde; mais il n'y réussit que pour la partie entre les deux points d'intersection, et s'obstine à employer cette unique corde dans le reste de la courbe, sans penser à en changer. (*Near about well.*)

Il cherche l'asymptote et la trouve péniblement d'après une méthode générale : il la vérifie convenablement. Il ne tire pas un parti assez heureux de cette détermination pour rectifier la figure. (*Near about well.*)

4° *Équilibre d'un poids suspendu entre deux points fixes par une corde à nœud coulant.*

Il expose avec beaucoup de peine, quoique mis sur la voie, la condition de cet équilibre : il ne peut finalement même s'en tirer (il est clair qu'il n'entend pas la Statique). (*Weakly.*)

Invité à construire la figure d'équilibre, il s'engage, malgré mon avis, dans de longues et pénibles comparaisons d'angles, qui n'ont même aucun rapport réel avec la question. (*Very weakly.*)

Je lui indique alors la vraie construction, et je lui demande de déterminer par suite la courbe d'ascension d'un reverbère. Prenant pour axes la verticale et l'horizontale d'un point de suspension, il forme bien l'ordonnée d'un point quelconque du lieu, et très péniblement l'abscisse, d'après cette construction, en fonction de la longueur variable de la corde. Il arrive ainsi au résultat, sauf les erreurs du calcul, mais par une voie trop compliquée. (*Enough well.*)

Instruction trop hâtive et trop faible, mais jugement assez sain, et sagacité supérieure à l'ordinaire. Il mérite finalement d'entrer dès cette année; l'École rectifiera probablement ce que ses habitudes scolastiques ont d'étroit et de vicieux (+).

(A classer, presque sans aucun doute, entre Lambrecht et A. Colin).

REYNAUD, 20 ans (de 10^h à 12^h).

1° *Bissection d'un triangle donné à partir d'un point quelconque.*

Il forme très lourdement l'équation déterminée, où il introduit des données superflues. Il la discute très faiblement et interprète mal la double solution. (*Indifferently.*)

2° *Lieu d'un sommet d'un triangle invariable dont les deux autres sommets décrivent deux droites rectangulaires.*

Il forme bien les équations préparatoires, en exprimant l'invariabilité par celle des côtés. Il exécute convenablement les éliminations, et résout bien l'équation finale, après ne l'avoir toutefois suffisamment simplifiée que sur un avis formel. Invité à faire attention au phénomène algébrique que présente cette formule (et qui indique la décomposition de l'équation en deux autres du second degré), il ne peut ni saisir cette indication évidente, ni, à plus forte raison, l'interpréter géométriquement, malgré mes avertissements réitérés sur la position nette de la question. Engagé alors à analyser directement la définition, il finit par y apercevoir la décomposition du lieu, et la retrouve enfin, sur un nouvel avis, dans la formule. Invité alors à déterminer *a priori* les deux ellipses par une analyse plus complète de la définition, il voit d'abord, avec un peu d'aide, que les axes des deux ellipses sont perpendiculaires entre eux, et pense ensuite, pour trouver ces axes, à chercher un couple de diamètres conjugués; mais il ne peut les déterminer de longueur. Conseillé alors de revenir à l'équation, il y détermine par la formule usitée la direction des axes en y reconnaissant la rectangularité des deux ellipses, et ensuite très raisonnablement leur longueur. Il voit très bien sur l'équation le cas du triangle rectangle, et le vérifie convenablement sur la figure; il traite aussi fort bien l'autre cas singulier du triangle réduit à une droite. (*Enough well.*)

3° *Théorème de Descartes.*

Exposition intelligente de la démonstration ordinaire, et des indications usitées. Invité à préciser ainsi la nature des racines de $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$, il voit aussitôt qu'elle équivaut à $\frac{x^5+1}{x+1}$, et répond alors fort bien. Sur l'équation $x^3 + x + 1 = 0$, il généralise judicieusement cet artifice en multipliant par $x + a$, et finit par très bien choisir a, de manière à décider la question après quelque hésitation. (*Well.*)

4° *Équilibre d'un poids sur un plan résistant.*

Il explique raisonnablement la loi générale de cet équilibre, et les modifications relatives au frottement. Invité à trouver le maximum d'escarpement ainsi compatible avec l'équilibre, il le fait très bien. (*Well.*)

Judicieux et intelligent, il sera une bonne acquisition pour l'École, quoique ayant été instruit d'une manière trop subalterne : il est moins brillant, mais plus solide très probablement, que Simoneau (+ +).

(A classer, presque sans aucun doute, entre Doutres et Tournadre, immédiatement avant Simoneau.)

AUDIBERT, 17 ans (de $1^h 45^m$ à $3^h 30$).

1° *Quadrature d'un dodécagone régulier d'après son côté.*

Il réduit aisément la question à chercher tang 15°. Il fait alors de vaines transformations en autres lignes trigonométriques du même arc, et ne peut sortir du cercle vicieux. Cependant il est ainsi machinalement conduit à calculer le rayon circonscrit, en ayant convenablement égard à la nature du polygone. Il finit ainsi par trouver la vraie formule et la simplifie bien, mais la construit trop péniblement et d'une manière trop compliquée. (*Enough well.*)

2° *Condition des coefficients de $x^3 - 3px = 2q$, pour deux racines en raison donnée.*

Il substitue a et ma, et cherche à calculer p et q en m et a :

il retranche heureusement les deux équations, et détermine p, par suite q : il finit par bien apercevoir, sur interpellation, que ces calculs étaient réellement faits d'avance d'après les lois de composition. Trouvant que le quotient $\frac{p}{q}$ dépend de a, il croit d'abord que la relation indépendante de a n'existe point : et cependant, interpellé, il finit par élargir son idée (il paraît là ne manquer que d'habitudes élevées), et trouve la relation cherchée, et la vérifie bien pour le cas des racines égales, qu'il traite d'ailleurs directement dans le même esprit. (*Enough well.*)

3° *Lieu du sommet d'une parabole invariable tangente en* 1 *point fixe à* 1 *droite fixe.*

Prenant bien les axes, il forme aisément le contact. Pour formuler l'invariabilité, il pense à celle de la distance du foyer au sommet. Il cherche le sommet comme point où la tangente est perpendiculaire au diamètre, et le formule bien avec un peu d'aide. A l'égard du foyer, il veut d'abord partir banalement de la définition algébrique; mais, invité à réfléchir sur le choix du caractère, il recourt bientôt spontanément à la propriété caustique pour la tangente donnée : il suit très heureusement cette idée, et s'aperçoit bien qu'il a déjà (dans la formulation du sommet) l'équation de l'axe dont il a alors besoin. Finalement, il exprime fort bien l'invariabilité. (*Very well.*)

Arrivé à ce point, il hésite beaucoup à concevoir le mode de formation de l'équation du lieu : cependant il finit par caractériser suffisamment l'élimination convenable, sans apercevoir les moyens évidents d'abréviation. (*Sufficiently.*)

Invité à discuter *a priori* la courbe autant que possible, il reconnaît judicieusement les circonstances les plus générales; mais il ne peut la décrire par points. (*Indifferently.*)

4° *Équation de la cissoïde ordinaire d'après la définition de Newton.*

Il motive très imparfaitement le choix, d'ailleurs convenable, des axes. Il ne conçoit pas d'une manière assez large, assez rationnelle et assez directe, le mode de formation de l'équation du lieu, qu'il ne cherche que par des essais vaguement dirigés. Il finit cependant par arriver ainsi à l'équation, et la discute fort bien, de manière à reconnaître très bien, soit ainsi, soit par la définition, la véritable forme de la courbe : il nomme la cissoïde qu'il connaît par la définition de Dioclès. (*Well.*)

5° *Équilibre d'un poids soutenu par trois plans inclinés.*

Il n'a pas d'idée assez nette de la nature de cet équilibre, qu'il ne croit pas d'abord caractérisé par une véritable équation. Quoique son bon sens le rectifie à cet égard, il ne sait point assez la Statique pour saisir nettement même le principe de la formation de cette équation. (*Weakly.*)

Il est incontestablement le plus intelligent et le plus judicieux de tous les candidats de Montpellier, quoique jusqu'ici dressé à des habitudes mathématiques trop subalternes, contre lesquelles il lutte difficilement, mais avec succès, et à la prolongation desquelles l'École mettra sans doute un terme suffisant et opportun. (+ +.)

(A classer, sans presque aucun doute, entre Schmutz et Tricotel.)

MARIE, 18 ans (de $10^{h}30$ à midi).

1° *Décider trigonométriquement si* 3 *points inaccessibles sont en ligne droite.*

Il croit d'abord pouvoir prononcer d'après une seule station, et indique un caractère absurde : il a beaucoup de peine à reconnaître la nécessité de deux stations. Il finit cependant par bien concevoir l'opération, et la compare judicieusement à l'observation directe. (*Enough well.*)

Même question pour 4 *points en cercle, dont il faut trouver le rayon.*

Il finit par reconnaître d'abord, mais avec beaucoup de peine, si le quadrilatère est plan, et indique ensuite un bon caractère d'inscriptibilité. (*Near about well.*)

Il explique convenablement la formule ordinaire du rayon par les côtés. (*Well.*)

2° *Dimensions d'une calotte sphérique d'après son volume et sa surface totale.*

Il forme bien les équations préparatoires, et en déduit bien, trop lentement, par excès d'adresse, l'équation finale à la hauteur $y^4 - 8a^2y^2 + 32b^3y - a^4 = 0$. Il n'y voit pas nettement que les 2 racines réelles permanentes sont nécessairement étrangères à la question. L'ensemble de sa discussion algébrique est très faible : il ne voit pas même le signe nécessaire des 2 autres racines en cas de réalité. Il concilie d'ailleurs cette analyse très imparfaitement avec la nature de la question. Invité à déterminer les dimensions de la calotte maximum, il la croit caractérisée par $y = a$, et cherche à démontrer ce sophisme, sans penser ni au principe des racines égales, ni aux conditions de réalité. (*Weakly.*)

3° *Lieu d'un sommet d'un triangle invariable dont les 2 autres décrivent 2 droites rectangulaires.*

Il institue péniblement une analyse presque impraticable et confuse, quoique strictement correcte. Il ne peut la simplifier assez pour la rendre exécutable. (*Sufficiently.*)

Invité alors à discuter *a priori*, en supposant que l'équation soit du 4° degré, il ne pense nullement à la décomposition évidente du lieu, et n'aperçoit que la double symétrie, dont il apprécie sainement l'influence algébrique, sans pouvoir même déterminer par quelques positions choisies les coefficients restés indéterminés, quoique très formellement mis sur la voie à cet égard. (*Very weakly.*)

4° *Discussion de la courbe* $y^4 + x^4 = 1$.

Il discute très faiblement l'ordonnée et ne pense pas à la tangente. Il imagine de comparer la courbe au cercle correspondant; mais il ne s'en sert que comme d'une sorte d'artifice d'évaluation des ordonnées, et finalement ne peut prononcer sur la vraie figure. (*Weakly.*)

Il promettait beaucoup plus qu'il n'a tenu; mais il n'est pas sans intelligence, quoique trop faiblement préparé. En persistant convenablement, il pourra devenir bon l'an prochain, mais il n'est, cette fois, que très strictement admissible. (+.)

(A classer, presque sans doute, entre Bertin et Urbain.)

DUTENS, 19 ans (de $2^h 15^m$ à 4^h).

1° *Volume produit par un hexagone régulier autour d'un côté, d'après la longueur du côté.*

Il emploie immédiatement la règle de Guldin et évalue très bien les deux facteurs. (*Well.*)

Invité à fixer la direction de l'axe correspondant au maximum de volume, il le fait très bien. (*Very well.*)

Invité enfin à démontrer la règle de Guldin, il le fait convenablement, quoique d'une manière un peu trop compliquée, pour des éléments rectangulaires; et il emploie ensuite assez bien le théorème des moments, quoiqu'avec un peu d'hésitation, dans le passage des éléments à l'ensemble. (*Well.*)

2° *Doctrine des combinaisons.*

Il motive assez bien, mais sur interpellation, la conversion des combinaisons en arrangements. Il établit ensuite suffisamment la formule ordinaire. Invité à l'appliquer au dénombrement des mots de 4 consonnes et 3 voyelles, il le fait très judicieusement, et en retranche fort bien ceux où toutes les consonnes se suivent. (*Very well.*)

3° *Théorème de M. Sturm.*

Il expose convenablement, mais sans rien de saillant, et même d'une manière un peu lourde, la démonstration ordinaire, qu'il n'achève même que péniblement. (*Near about well.*)

Invité à manifester par les courbes l'argument principal, il finit par le faire suffisamment avec un peu d'aide. (*Enough well.*)

Il paraît comprendre à peu près l'extension au cas des racines égales. (*Near about well.*)

Invité aux conditions d'entière imaginarité de $x^2+px=q$, il ne suit pas bien, dans l'exécution du calcul, le véritable esprit de la règle quant aux modifications permises : à cela près, l'application est convenable. (*Moderately.*)

4° *Rectangle maximum circonscriptible à une ellipse donnée.*

Il répond d'abord que le moindre est celui des axes, et s'obstine à le répéter, sans le prouver d'ailleurs. Après une longue hésitation, il n'institue aucun plan rationnel de solution. Il ne pense pas même à chercher le lieu circonscrit aux rectangles. (*Very weakly.*)

5° *Lieu des projections du foyer d'une parabole sur les normales.*

Il institue assez bien l'analyse préparatoire, et exécute suffisamment les éliminations, sans prévoir assez tôt le degré du résultat. (*Moderately.*)

Invité alors à déterminer la courbe sans calcul, en la supposant du second degré, il voit assez bien que ce sera une parabole, dont il assigne l'axe et le sommet, et il imagine, pour déterminer le paramètre ou le foyer, une construction exacte, mais trop compliquée, d'où il ne peut déduire nettement son rapport avec le paramètre primitif, lors même que ce rapport lui est annoncé. (*Ner about well.*)

Assez intelligent et judicieux pour former un bon élève ordinaire. (+.)

(A classer, sans presque aucun doute, entre (Nicolas) Colin et Lambrecht.)

(*Revue occidentale, philos., soc. et polit.*, t. V, n° 2).

NOTE DE GÉOMÉTRIE.
SUR UNE PARABOLE INTIMEMENT LIÉE A UNE CONIQUE DONNÉE ET A UN POINT DONNÉ DE SON PLAN;

Par M. G. LEINEKUGEL,
Élève Ingénieur hydrographe de la Marine.

Nous nous proposons dans cette Note de revenir sur les propriétés remarquables d'une parabole (H) que nous avons rencontrée et étudiée incidemment en traitant à un point de vue purement géométrique la question du concours général de l'année 1889 (*Nouvelles Annales,* 3e série, t. VIII, juin).

Nous montrerons que certains théorèmes énoncés sur les coniques par M. Godefroy (*Nouvelles Annales,* 3e série, t. XII; 1893) ont été démontrés dans l'étude de cette parabole (*loc. cit.*). En particulier, la solution de la recherche des points du plan d'une conique qui, après transformation par polaires réciproques (la courbe directrice étant un cercle), donneront les axes de la conique transformée, se trouve renfermée complètement dans l'étude de cette conique.

I. Rappelons, en leur donnant toute la généralité qu'elles comportent, certaines propriétés que nous avons énoncées (*Nouvelles Annales,* 3e série, t. IX, janvier 1890) au sujet d'une hyperbole équilatère (h). Ce sont les propriétés de cette dernière conique qui conduisent directement, comme nous l'avons montré (*loc. cit.*), à celles de la parabole (H)

Cette hyperbole équilatère (h) peut être considérée comme :

1° *Le lieu des centres du réseau doublement infini des coniques* (c) *du plan qui satisfont à cette condition unique de rencontrer une conique* (p) *donnée, en quatre points équidistants d'un point donné* O;

2° *Le lieu des pieds des normales menées du point* O *à toutes les coniques* (c) *définies comme précédemment;*

3° *Le lieu des milieux des sécantes communes à la conique* (p) *et aux coniques* (c);

4° *Le lieu des sommets des triangles autopolaires communs à la conique* (p) *et aux coniques* (c).

Il est à remarquer que cette hyperbole équilatère (h) reste la même quand, dans les lieux géométriques précédents, on remplace la conique (p) par une quelconque des coniques qui lui sont concentriques et homothétiques.

Si, dans le plan d'une conique (p), on se donne un point O, il existe une conique (h) bien définie qui admet (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. IX) comme tangente en O la perpendiculaire à la polaire de ce point par rapport à la conique (p), qui passe par le centre I de (p), a ses asymptotes parallèles aux axes de (p) et admet pour centre le centre de gravité du quadrilatère formé par les quatre points communs à (p) et à un cercle quelconque de centre O. Nous avons eu l'occasion de montrer à ce sujet la propriété remarquable déduite de là et que nous rappelons :

Tous les quadrilatères formés par les points communs à une série de cercles concentriques (O) *et à une série* *de coniques concentriques et homothétiques à une conique donnée* (p) *ont tous même centre de gravité.*

En transformant cette hyperbole (h) par rapport à un cercle (O) de centre O, on obtient la parabole (H) en question, dont nous résumons les propriétés; on peut la considérer comme :

1° *L'enveloppe des polaires d'un point* O *par rapport au réseau doublement infini des coniques* (C) *du plan qui satisfont à cette condition unique d'avoir avec une conique donnée* (P) *quatre tangentes communes équidistantes d'un point* O;

2° *L'enveloppe des tangentes aux pieds des normales menées du point* O *aux coniques* (C) *définies comme précédemment;*

3° *L'enveloppe des droites menées pour chacun des quadrilatères circonscrits à la conique* (P) *et à une conique* (C) *par chaque sommet et perpendiculairement à la droite qui joint le point* O *à ce sommet;*

4° *L'enveloppe des côtés des triangles autopolaires communs à la conique* (P) *et aux coniques* (C);

5° *L'enveloppe des normales aux coniques* (C) *aux points où leurs tangentes passent par le point donné* O;

6° *L'enveloppe des axes de toutes les coniques* (C).

Inutile de faire remarquer que la conique (P) est la transformée de la conique (p) par rapport à (O).

La dernière propriété (6°) de (H) nous montre que les axes de (P) sont deux tangentes à cette parabole. Il résulte de là qu'avant la transformation les deux points du plan de la figure, à laquelle appartiennent la conique (p) et le cercle (O), qui donnent les axes de la transformée (P) de (p), sont deux points de l'hyperbole (h). Ces points sont évidemment sur la polaire du point (O) par rapport à (p).

Aussi pouvons-nous formuler cette propriété générale :

Les points du plan qui, dans la transformation par polaires réciproques d'une conique (p) *par rapport à un cercle* (O) *de centre* (O), *donneront les axes de la conique transformée, sont aux points communs à la polaire de* O *par rapport à* (p) *et à l'hyperbole aux pieds des normales issues de ce point* O *relativement à la conique* (p).

Nous voyons, d'après ce qui précède, qu'à tout point O du plan d'une conique (P) correspond une parabole (H), bien définie, de même que précédemment nous avons montré qu'il y avait une hyperbole équilatère intimement liée au point et à la conique. Cette parabole (H) est tangente à la polaire de O par rapport à (P), aux axes de (P), aux normales à la conique (P) aux points où les tangentes à cette conique passent par O, aux tangentes à cette même conique aux points où les normales passent par O, enfin aux parallèles menées du point O aux axes de la polaire réciproque (p) de (P) par rapport à un cercle (O) de centre O.

La directrice de cette parabole (H) (voir *loc. cit.*) est la droite qui joint le point O au centre de (P), c'est-à-dire la perpendiculaire menée de O à la polaire de ce point par rapport à (p) (*voir* lemme III, *loc. cit*).

II. Nous terminerons en proposant au lecteur ces deux questions corrélatives :

1° *Démontrer que toutes les hyperboles équilatères* (h), *qui correspondent dans le plan d'une conique* (p) *à des points* O *situés en ligne droite, passent par un point fixe.*

2° *Démontrer que toutes les paraboles* (H), *qui cor-*

respondent dans le plan d'une conique (P) *à des points* O *situés en ligne droite, touchent une droite fixe.*

III. De la première (1°) on déduit une solution géométrique très simple de l'une des questions proposées au concours d'agrégation (*Mathématiques spéciales,* année 1893).

On sait que, si l'on considère deux quadriques dont les axes sont parallèles, le lieu des centres des quadriques qui passent par leur intersection est une cubique gauche C passant par les centres des deux quadriques données et par les points à l'infini sur les axes qui sont les centres des trois paraboloïdes qui passent par les points communs aux deux quadriques.

Il est évident que cette cubique C passe également par les sommets du tétraèdre autopolaire communs aux deux quadriques, qui sont les sommets des quatre cônes passant par l'intersection des deux quadriques.

Cette cubique n'est autre chose que la cubique C aux pieds des normales menées du centre de l'une des deux quadriques données (H) et (H_1) à une quadrique (H_2) concentrique à l'autre et dont les carrés des axes sont égaux au rapport des carrés des axes des deux quadriques données; leurs directions sont celles des deux quadriques.

Il résulte de là que, les deux quadriques données restant concentriques et homothétiques à deux quadriques (H) et (H_1), la cubique C reste la même.

Il suffit pour avoir la solution de la première question proposée au concours d'agrégation (1893) de remplacer (H_1) par le cône enveloppe des plans perpendiculaires aux génératrices de (H) menées d'un point donné.

Voici la solution de la deuxième question, qui est particulièrement intéressante.

La cubique C, considérée comme la courbe aux pieds des normales menées du centre ω_1 de (H_1) par rapport à la quadrique (H_2) définie plus haut, se projette sur chacun des plans principaux de (H_2) suivant trois hyperboles équilatères h_1, h_2, h_3. Si le point ω_1 décrit dans l'espace une droite Δ, sur chacun des plans principaux, les points ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 décriront les droites δ_1, δ_2, δ_3. D'après la propriété émise plus haut (1°), les hyperboles h_1 correspondant à tous les points ϖ_1 de δ_1 passeront par un point fixe a_1 situé sur δ_1. Puisque le point ω_1 appartenait à la cubique, la perpendiculaire Δ_1 élevée en a_1 à ce plan principal est une génératrice de la surface cherchée, lieu des cubiques C correspondant aux différents points de Δ.

Les droites Δ_2, Λ_3 construites d'une manière analogue et passant par les points a_2, a_3 sont deux autres génératrices de cette surface, à laquelle appartiendra évidemment la droite Δ, puisque la cubique C passait par le point ω_1 de Δ.

Il est évident que cette surface cherchée est l'hyperboloïde défini par ces trois génératrices du même système Δ_1, Δ_2, Δ_3, puisqu'il doit rencontrer un cylindre du second degré, admettant pour base une hyperbole équilatère h_1 et dont la direction des génératrices est Δ_1, suivant une cubique.

Nous terminerons en donnant la construction géométrique des points a_1, a_2, a_3 dans les trois plans principaux de (H_2). Du centre ω, commun à (H_1), (H_2), on mène, dans le plan principal qui contient δ_1, une droite perpendiculaire à cette dernière, puis son diamètre conjugué par rapport à la section principale de (H_2); ce diamètre rencontre δ_1 suivant le point cherché a_1. On opère de même dans les deux autres plans principaux pour les points a_2, a_3.

Cet hyperboloïde lieu de C a donc pour trace sur chacun des plans principaux de (H) une hyperbole équilatère admettant comme directions asymptotiques celles des axes de la section principale de (H) et passant par le centre de cette quadrique, par la trace de Δ sur ce plan et par le point a situé dans ce plan.

SUR UN PROBLÈME PROPOSÉ PAR M. E. AMIGUES;

PAR M. S. HOTT.

Dans ses *Leçons d'Algèbre à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales*, M. E. Amigues propose le problème suivant après l'étude des séries :

On a deux cercles A *et* B *égaux et tangents et une tangente commune. Dans le triangle curviligne qu'ils forment, on inscrit un cercle* C_1, *puis, dans le triangle formé par les cercles* A, B, C_1, *on inscrit un cercle* C_2; *ainsi de suite. Expression générale des rayons de ces cercles. Somme de leurs aires.*

1. Soient p un entier et R et r_p les rayons des cercles A et C_p. Je pose

$$s_p = r_1 + r_2 + \ldots + r_p.$$

Par raison de symétrie, les centres des cercles C_1, C_2, ... se trouvent sur la tangente aux cercles A et B menée par leur point de contact, et, par suite, la distance de ce point au centre du cercle C_n est égale à

$$R - 2s_{n-1} - r_n.$$

Un théorème connu sur les tangentes et sécantes menées à un cercle par un même point donne

$$(R - r_1)^2 = r_1(2R + r_1),$$
$$(R - 2s_{n-1} - r_n)^2 = r_n(2R + r_n).$$

D'où

$$r_1 = \frac{R}{4},$$

$$(1) \qquad r_n = \frac{(R - 2s_{n-1})^2}{4(R - s_{n-1})}.$$

En calculant, à l'aide de la formule (1), r_2, r_3, r_4, on remarque que l'expression

$$R - 2s_{n-1}$$

prend successivement les valeurs $\frac{R}{2}$, $\frac{R}{3}$, $\frac{R}{4}$.

On est ainsi amené à poser

$$R - 2s_{n-1} = \frac{R}{n};$$

c'est-à-dire

$$s_{n-1} = \frac{R}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

d'où

$$s_n = \frac{R}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

et, par soustraction,

$$(2) \qquad r_n = \frac{R}{2n(n+1)}.$$

La formule (2) est vérifiée par les valeurs $\frac{R}{4}$, $\frac{R}{12}$, $\frac{R}{24}$, $\frac{R}{40}$, que l'on obtient en calculant directement r_1, r_2, r_3, r_4. En la supposant vraie pour les rayons r_1, r_2, ..., r_{n-1}, on a

$$s_{n-1} = \sum_1^{n-1} \frac{R}{2p(p+1)} = \frac{R}{2}\sum_1^{n-1}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{R}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

et la relation (1) devient

$$r_n = \frac{\left(\frac{R}{n}\right)^2}{4\left(\frac{R}{2} + \frac{R}{2n}\right)} = \frac{R}{2n(n+1)}.$$

La formule (2) est donc exacte.

On peut remarquer que la limite de s_n pour n infini est égale à $\frac{R}{2}$. Ce résultat était facile à prévoir, car la somme des diamètres de tous les cercles C_1, C_2, ..., est évidemment égale à R.

2. Soit S la somme des aires de ces cercles.

$$S = \frac{\pi R^2}{4} \sum_1^\infty \frac{1}{n^2(n+1)^2}.$$

En partant de l'identité

$$\frac{1}{n^2(n+1)^2} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2 = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{2}{n(n+1)},$$

et s'appuyant sur les formules [1]

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)} = 1,$$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

on trouve

$$S = \frac{\pi R^2(\pi^2 - 9)}{12}.$$

---

(1) JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, 2e édition, t. I, p. 360.

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1894 (1);

PAR M. AUDIBERT.

La droite Δ rencontre, en un point P, le plan mobile $y = mx$. Ce plan coupe la sphère S suivant un méridien et la polaire de P, relative à ce méridien, rapportée à l'axe OZ et à la trace de son plan sur XOY, comme axe des abscisses ξ, a pour équation dans ce plan

$$\xi(bp - aq)\sqrt{1 + m^2} - z(q - pm) - r^2(b - am) = 0,$$

et dans l'espace

$$y = mx,$$
$$x(bp - aq)(1 + m^2) - z(q - pm) - r^2(b - am) = 0,$$

L'équation de Σ est la résultante de l'élimination de m,

$$(1) \quad (aq - bp)(x^2 + y^2) + z(qx - py) - r^2(ay - bx) = 0;$$

elle représente une surface du second degré, réglée et à centre, soit un hyperboloïde à une nappe.

2° On voit d'abord que tout plan parallèle à XOY coupera Σ suivant un cercle. Transportons l'origine à son centre en faisant en même temps pivoter, autour de OX, les axes OY et OZ d'un angle dont la tangente soit $\frac{-q}{p}$, l'équation (1) devient

$$(aq - bp)(x^2 + y^2) + \sqrt{p^2 + q^2}\,xz - \frac{r^4}{4(p^2 + q^2)}(aq - bq) = 0.$$

(1) *Voir* même Tome, p. 296.

Laissant OY fixe et faisant tourner ZOX d'un angle α, l'équation transformée, pour $z = 0$, donne

$$(aq - bp)(y^2 + x^2 \cos^2\alpha) \\ + \sqrt{p^2+q^2} \sin\alpha \cos\alpha\, x^2 - \frac{r^4}{4(p^2+q^2)}(aq - bp) = 0,$$

relation qui devient, pour $\operatorname{tang}\alpha = \dfrac{\sqrt{p^2+q^2}}{aq - bp}$,

$$y^2 + x^2 = \frac{r^4}{4(p^2+q^2)}.$$

Tous les plans parallèles à ce cercle donneront une nouvelle série de sections circulaires, faisant avec les premières un angle α.

Revenons au système primitif de coordonnées.

L'origine O centre de S et la droite Δ déterminent le plan

$$qx - py - (aq - bp)z = 0,$$

perpendiculaire en son milieu à la corde de contact des deux plans tangents menés par la droite Δ à la sphère; il est incliné sur XOY de l'angle α et sa trace sur ce plan fait avec OX un angle, dont la tangente est $-\dfrac{p}{q}$. Toute section qui lui sera parallèle donnera donc un cercle de la seconde série.

3° Concevons un système de coordonnées, parallèle à l'ancien, dont l'origine O_1 est sur l'axe OZ, commun aux deux systèmes $(OO_1 = h)$.

On donne, comme précédemment, une droite Δ_1,

$$x = a_1 z + p, \qquad y = b_1 z + q$$

et la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

L'équation de la surface Σ_1 engendrée ne différera de celle de $\Sigma(1)$ que par le changement de a en a_1 et de b en b_1; mais, rapportée au système primitif, distant de h, elle deviendra

$$(a_1 q - b_1 p)(x^2 + y^2) + z(qx - py) \\ + x(r^2 b_1 + qh) - y(r^2 a_1 + ph) = 0,$$

et on l'identifiera avec (1) en posant

$$b_1 = \frac{r^2 b - qh}{r^2}, \qquad a_1 = \frac{r^2 a - ph}{r^2}.$$

4° Les équations de Δ_1, rapportées au même système dont on aurait transporté l'origine dans le plan XOY au point $x = p$, $y = q$, seront

$$r^2 x = (r^2 a - ph)(z + h), \qquad r^2 y = (r^2 b - qh)(z + h).$$

Éliminant h, on a l'équation du lieu des positions de Δ_1 quand le point O_1 se déplace sur OZ :

$$(qx - py)^2 = (aq - bp)[z(qx - py) + r^2(bx - ay)];$$

elle représente un paraboloïde hyperbolique.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA MÊME QUESTION;

Par un ancien élève de Mathématiques spéciales.

Soit D la polaire de Δ par rapport à (S); la projection orthogonale de D sur un plan (P) est la polaire du point de rencontre de Δ et de (P), par rapport à la section de ce plan et de (S).

Cette droite est alors l'arête d'un dièdre droit dont les faces passent respectivement par l'axe oz et par D. Lorsqu'on fait tourner (P) autour de oz, elle engendre alors, comme l'on sait, un hyperboloïde Σ dont les sections circulaires sont perpendiculaires, les unes à oz et les autres à la polaire D de Δ.

Nous avons ainsi répondu aux deux premières parties de la question proposée.

Pour que la surface Σ reste la même lorsqu'on a déplacé la sphère, il faut que D conserve la même position ; la droite Δ_1 qu'on doit substituer à Δ est alors la polaire de D par rapport à (S) dans sa nouvelle situation. *Quel est le lieu des droites telles que* Δ_1, *lorsque le centre de* (S) *décrit* oz ? C'est là l'énoncé de la quatrième partie qui reste à traiter et qu'on peut formuler ainsi :

On demande le lieu des polaires d'une droite par rapport à une sphère de grandeur invariable, dont le centre décrit une droite donnée.

Indépendamment des notations précédentes désignons par O la droite fixe dont on prend la polaire. Plaçons-la verticalement ; sa projection horizontale est en o. Prenons un plan vertical parallèle à la droite décrite par le centre de la sphère (S), et soient C et C′ les projections de cette droite.

Si le centre de (S) est en (c, c'), la polaire de O par rapport à cette sphère est l'horizontale qui se projette en G perpendiculairement à oc et telle que le produit $cm \times co$ soit égal au carré du rayon de (S).

Par le centre (c, c') menons une perpendiculaire au plan vertical. Elle se projette horizontalement suivant cab, qui rencontre G en a et qui coupe en b la parallèle ob à C.

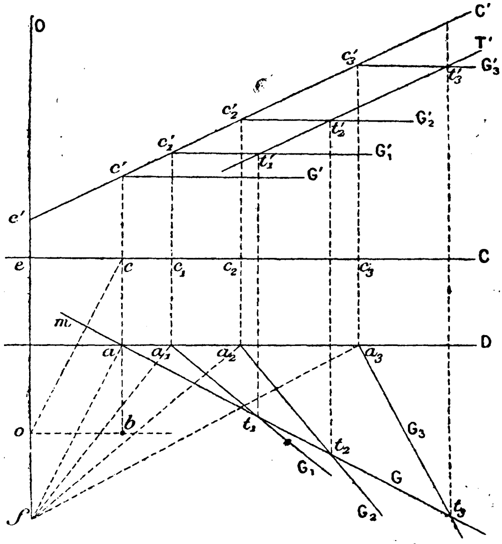
On a $ca \times cb = cm \times co =$ const.

Mais le segment cb est constant, par suite le segment ca est aussi de grandeur constante.

Lorsque le centre de (S) se déplace, le point (a, c') décrit alors la droite (D, C′) parallèle à (C, C′).

Cette droite (D, C′) est le lieu des traces des polaires telles que (G, G′) sur le plan de front projeté en D.

Ce plan de front coupe le lieu demandé suivant cette droite et, comme il contient la polaire de O par rapport



à la sphère (S) de centre (e, e') pied de la perpendiculaire commune aux deux droites données, on voit qu'il coupe le lieu des droites telles que (G, G′) suivant deux droites.

Ce lieu est alors du second degré et, par suite, c'est un paraboloïde hyperbolique, puisque les droites (G, G′) sont horizontales.

Autrement. — Par le point a, menons la droite af parallèlement à co, elle rencontre en f la perpendiculaire of au plan vertical.

Le segment of étant égal à ca est de grandeur constante et le point f est fixe quelle que soit la position du centre c.

La droite G étant perpendiculaire à af et le point a décrivant D, G enveloppe une parabole qui a f pour foyer et D pour tangente au sommet.

Prenons (G, G') dans trois autres positions.

Les traces de ces droites sur le plan vertical mené par G sont les points (t_1, t'_1), (t_2, t'_2), (t_3, t'_3).

Mais les droites G_1, G_2, G_3 étant tangentes à une parabole déterminent, sur les tangentes D et G à cette courbe, des segments proportionnels; on a alors

$$\frac{t_1 t_2}{t_2 t_3} = \frac{a_1 a_2}{a_2 a_3} = \frac{c'_1 c'_2}{c'_2 c'_3}.$$

D'après cela, si l'on prend les projections verticales t'_1, t'_2, t'_3, ces points sont en ligne droite.

Les polaires telles que (G, G'), qui s'appuient sur la droite (D, C'), s'appuient donc en outre sur une autre droite projetée en G, et, comme elles sont horizontales, *elles appartiennent à un paraboloïde hyperbolique.*

Je désignerai cette surface par (G).

Remarques. — Lorsque le centre de la sphère est à l'infini, la polaire de O est perpendiculaire au plan vertical. Les génératrices du paraboloïde (G), qui ne sont pas horizontales, rencontrent cette droite à l'infini et se projettent alors verticalement suivant des droites parallèles. Ainsi *la droite* T′ *qui contient les points* t'_1, t'_2, t'_3 *est parallèle à* C′.

On voit que le paraboloïde (G), qui a déjà pour plan directeur un plan perpendiculaire à O, a pour second plan directeur un plan parallèle à la droite des centres de (S) ainsi qu'à la perpendiculaire commune à cette droite et à O.

L'axe de (G) est cette perpendiculaire commune : cette droite est en effet parallèle aux deux plans directeurs et le plan tangent à (G) au point où elle rencontre cette surface lui est perpendiculaire, puisque c'est le plan de front qui contient D.

Nous avons vu que T' est parallèle à C'; les segments $c'_1\, t'_1$, $c'_2\, t'_2$, $c'_3\, t'_3$, ... sont alors égaux; de là résulte ce théorème :

Deux tangentes D *et* G *à une parabole interceptent, sur les tangentes* G_1, G_2, G_3, ..., *à cette courbe, des segments dont les projections, faites sur une droite arbitraire, dans la direction des diamètres de cette parabole, sont des segments égaux.*

Transformons ce théorème par polaires réciproques en prenant comme cercle directeur une circonférence dont le centre est au foyer de la parabole; on obtient ainsi cette proposition de Géométrie élémentaire :

On donne une circonférence de cercle E *et sur cette courbe les points* α, β, γ.

Les droites qui joignent les points α, β *à un point arbitraire de* E *déterminent sur la tangente en* γ *à cette courbe des points dont la somme ou la différence des inverses des distances à* γ *est constante* (la somme lorsque les points de rencontre sont de part et d'autre de γ).

Transformons ce théorème par rayons vecteurs réciproques en prenant le point γ pour pôle de transformation. On trouve ainsi :

On donne deux circonférences de cercles qui se coupent. Par leurs points de rencontre on mène deux droites parallèles. Les segments interceptés sur ces droites par les circonférences données sont égaux.

Cette propriété connue se démontre très simplement. Si on la prend comme point de départ, elle conduit par deux transformations successives au théorème relatif à la parabole.

On a ainsi un autre moyen d'arriver à ce théorème. Sa démonstration directe est du reste très simple et il est facile de le généraliser.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION PROPOSÉE [1] POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1894;

PAR M. GEORGES CAFFIN,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Lille.

On sait que l'enveloppe des droites de Simson d'un triangle est une hypocycloïde à trois rebroussements, engendrée par un cercle égal au cercle des neuf points du triangle, roulant dans un cercle concentrique à ce dernier, et de rayon triple. Il est facile de ramener à cette question celle qui était proposée aux candidats à l'École Normale.

Le problème reposait sur la transformation de Steiner. Si l'on considère un faisceau ponctuel de coniques, on sait que les polaires d'un point fixe A passent par un autre point fixe B, les points A, B étant ainsi conjugués par rapport à toutes les coniques du faisceau. Le point A étant donné, le point B est bien déterminé, sauf si l'on se donne pour A un des sommets du triangle conjugué commun à toutes les coniques, auquel cas le point B est indéterminé sur le côté opposé du triangle.

Cela étant, et le point A décrivant une droite D, trouver le lieu décrit par le point B. Ce lieu est une conique qui est aussi le lieu des pôles de la droite fixe D par rapport à toutes les coniques du faisceau.

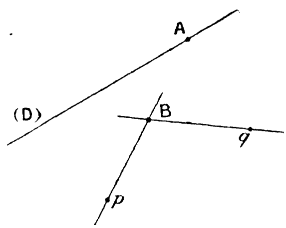
---

[1] *Voir* même Tome, p. 299

Soient, en effet, p, q les pôles de (D) par rapport à deux coniques fixes. Le conjugué d'un point A s'obtiendra en prenant l'intersection des polaires de A par rapport aux deux coniques fixes. Les faisceaux pB, qB sont homographiques, et la conique, lieu de B, passe en p, q, ce qui démontre la propriété annoncée.

Comme (D) coupe les trois côtés du triangle conjugué, la conique (C), lieu de B, est circonscrite à ce triangle.

Fig. 1.



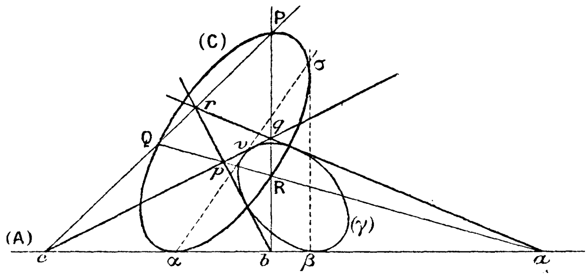
Réciproquement, toute conique circonscrite au triangle est la transformée d'une droite D. En effet, soient deux points p, q de cette conique, p', q' leurs conjugués; la droite $p'q'$ est la droite cherchée.

Les points à l'infini de la conique (C) s'obtiendront en prenant les points d'intersection de (D) avec la conique (Γ) transformée de la droite de l'infini. Donc, pour que (C) soit une parabole, il faut et il suffit que (D) enveloppe la conique (Γ).

On propose alors de chercher combien il passe d'axes de paraboles (C) par un point P donné et la nature de ces axes, en un mot l'enveloppe de ces axes. La question peut être transformée avantageusement.

Considérons deux triangles homologiques PQR, pqr dont les côtés se coupent en abc sur l'axe d'homologie (A) et tels que les points p, q, r appartiennent aux côtés du triangle P, Q, R. Soient α, β deux points de l'axe. Il existe une conique (C) passant en P, Q, R et tangente en α à (A). Soit $\alpha\sigma$ la polaire de β dans la conique (C). Il existe une conique (γ) tangente à $\alpha\sigma$, pr,

Fig. 2.



qr et tangente en β à (A) ou encore à deux droites infiniment voisines (A), (A)' se coupant en β; (A') détermine sur les quatre tangentes A, $\alpha\sigma$, pr, qr un rapport anharmonique

$$\rho = (\beta\alpha\, ba).$$

De même pq détermine le rapport

$$\rho' = (cv\, pq).$$

Mais, dans la conique (C), les polaires des points α, β, a, b passent respectivement par les points c, ν, p, q, ce qui entraîne $\rho = \rho'$. La conique (γ) est donc tangente à pq.

Si maintenant A est la droite de l'infini et si α, β sont conjugués par rapport aux points circulaires, on obtient ce théorème :

Les axes des paraboles circonscrites à un triangle sont les tangentes aux sommets des paraboles inscrites dans le triangle qui a pour sommets les milieux des côtés du premier.

Or les tangentes aux sommets des paraboles inscrites dans un triangle sont les droites de Simson du triangle, et la question se trouve ainsi ramenée à la question bien connue que nous avons rappelée en commençant.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Maurice d'Ocagne.

Si l'on se reporte aux démonstrations que j'ai données (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. IX, p. 289) de deux théorèmes généraux sur la détermination de la normale aux courbes planes, on peut remarquer que rien, dans ces démonstrations, ne suppose que les *distances sous l'angle* θ du point M ou de la droite D aux diverses courbes de référence soient prises avec une même valeur de l'angle θ.

D'autre part, l'énoncé du théorème I peut, dans le cas général (ainsi que je l'ai fait au n° 3, dans le cas où toutes les distances sont normales), être modifié au moyen du théorème de Leibnitz.

Dans ces conditions, les énoncés des deux théorèmes en question peuvent prendre la forme que voici :

THÉORÈME I. — *Si les distances* $MP_1 = l_1$, $MP_2 = l_2$, ..., $MP_n = l_n$, *sous des angles constants, mais d'ailleurs quelconques, d'un point* M *à diverses courbes de référence, sont liées par l'équation*

$$\varphi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = 0,$$

et si les droites joignant le point M *aux centres de courbure* Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n *des courbes de référence, répondant aux points* P_1, P_2, ..., P_n, *font respectivement les angles (pris avec leur signe)* ω_1, ω_2, ..., ω_n *avec* MP_1, MP_2, ..., MP_n, *la normale à la courbe, lieu du point* M, *est dirigée suivant la résultante des vec-*

teurs $\frac{1}{\cos\omega_1}\frac{d\varphi}{dl_1}, \frac{1}{\cos\omega_2}\frac{d\varphi}{dl_2}, \ldots, \frac{1}{\cos\omega_n}\frac{d\varphi}{dl_n}$ *dirigés eux-mêmes suivant* $M\Omega_1, M\Omega_2, \ldots, M\Omega_n$.

Théorème II. — *Si les distances* $l_1, l_2, \ldots, l_n$ *sous des angles constants, mais d'ailleurs quelconques, d'une droite* D *à diverses courbes de référence sont liées par l'équation*

$$\varphi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = 0,$$

la normale à l'enveloppe de la droite D *passe par le centre de gravité des masses* $\frac{d\varphi}{dl_1}, \frac{d\varphi}{dl_2}, \ldots, \frac{d\varphi}{dl_n}$, *respectivement appliquées aux centres de courbure correspondants des courbes de référence.*

Le théorème I permettra en particulier de construire la normale au lieu des points d'où l'on peut mener à une courbe donnée une tangente et une normale égales entre elles.

Lettre de M. C. Possé, professeur à l'Université de Saint-Pétersbourg, à M. Brisse.

Dans un manuscrit d'un ancien collaborateur des *Nouvelles Annales,* M. C. Harkema, de Saint-Pétersbourg (mort il y a plus de quinze ans), qui m'a été communiqué récemment par un des amis du défunt, se trouve une petite Note, probablement rédigée pour être insérée dans votre honorable Recueil. Vu l'extrême simplicité du résultat annoncé dans cette Note, je me permets de vous le communiquer en omettant la démonstration, tout à fait évidente; il est très probable que ce résultat est connu, mais comme je n'ai pas pu le trouver exprimé explicitement dans les ouvrages que j'ai sous ma main, je me suis décidé à vous le faire connaître en vous priant d'en faire tel usage qu'il vous plaira. Voici la remarque de feu M. Harkema.

L'équation différentielle $P\,dx + Q\,dy = 0$ admet comme facteur d'intégrabilité les expressions

$$(1)\qquad \frac{1}{P^2+Q^2}$$

ou

$$(2)\qquad \frac{1}{P^2-Q^2},$$

selon qu'on a

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{\partial Q}{\partial x},\\ \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial y}\end{aligned}\right.$$

ou

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{\partial Q}{\partial x},\\ \frac{\partial P}{\partial x} &= -\frac{\partial Q}{\partial y}.\end{aligned}\right.$$

On ramène l'équation proposée à une équation où les variables sont séparées, en prenant pour nouvelles variables

$$u = x + iy,$$
$$v = x - iy$$

dans le premier cas, et

$$u = x + y,$$
$$v = x - y$$

dans le second.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1894).

Mathématiques élémentaires.

On considère un quadrilatère Q de sommets A, B, C, D, dont les diagonales se coupent en un point O, et les cercles circonscrits aux triangles OAB, OBC, OCD et ODA. Les centres O_1, O_2, O_3, O_4 de ces cercles sont les sommets d'un parallélogramme P.

1° Le parallélogramme P étant donné, démontrer que tous les quadrilatères Q qui lui correspondent ont une surface constante et des diagonales de longueur constante.

2° Le parallélogramme P étant donné et le point O étant assujetti à décrire une droite Δ, prouver que les sommets du quadrilatère Q se déplacent sur les côtés d'un parallélogramme P'; étudier la déformation de P' quand Δ varie; trouver les positions de la droite Δ pour lesquelles le parallélogramme P' a une surface maximum.

3° Construire le quadrilatère Q, connaissant le parallélogramme P et soit deux angles de Q, soit les rapports $\frac{AB}{AD}$ et $\frac{CB}{CD}$. Discuter.

4° On suppose que le quadrilatère Q soit inscriptible; connaissant le parallélogramme P, trouver le lieu des sommets de Q et le lieu du centre du cercle circonscrit à ce quadrilatère. (Ces lieux sont des coniques.)

Mathématiques spéciales.

On considère toutes les hyperboles équilatères H qui déterminent sur l'axe Oy des segments variables ayant leur milieu au point O, et qui divisent harmoniquement un segment fixe AB porté par l'axe Ox perpendiculaire à l'axe Oy. On désignera par a, b les abscisses des points A et B.

1° Prouver qu'il y a dans le plan xOy une infinité de segments MM' divisés harmoniquement par toutes les hyperboles H; les extrémités M, M' de ces segments sont chacune le centre d'une hyperbole H réduite à deux droites.

2° Les extrémités M, M' d'un même segment sont les foyers d'une conique tangente en O à l'axe Ox et tangente en des points variables aux parallèles à l'axe Oy issues des points A et B.

3° Trouver le lieu des milieux des segments MM' et le lieu S de leurs extrémités M et M'.

4° Montrer que ce dernier lieu S est une courbe que l'on peut définir comme l'enveloppe de quatre familles de cercles qui touchent chacun la courbe en deux points. Trouver le lieu des centres de ces cercles et prouver que la courbe S peut se reproduire de trois manières par inversion.

5° Aux extrémités M, M′ de chaque segment divisé harmoniquement par les hyperboles H on mène les tangentes à la courbe S; trouver le lieu du point de rencontre de ces tangentes.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

Première question. — On considère l'intégrale

$$V = \int_1^z \frac{(1 + z + z^3)\, dz}{z^2(1 + z)\sqrt{a^2 + z^2}},$$

obtenue en allant du point (1) au point (z) par un chemin quelconque, la valeur initiale du radical pour $z = 1$ étant $+\sqrt{a^2 + 1}$, et a désignant un nombre *commensurable*.

1° Indiquer la nature des points singuliers de l'intégrale V;

2° Calculer les périodes de cette intégrale;

3° Montrer que, pour une infinité de valeurs de a, le nombre des périodes se réduit à un; indiquer la méthode à suivre pour obtenir l'expression générale de ces valeurs de a.

Deuxième question. — Les variables complexes u et z étant liées par la relation

$$u^2 = 1 + z^6,$$

on considère l'intégrale

$$W = \int_1^z \frac{P(z, u)\, dz}{z^2 u}$$

dans laquelle $P(z, u)$ désigne un polynome entier en z et u.

Trouver la forme que doit avoir ce polynome :

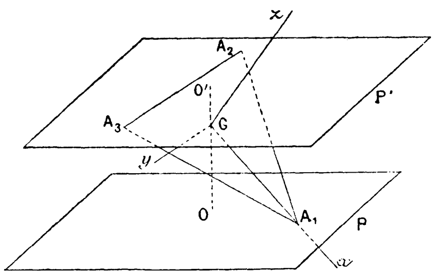
1° Pour que l'intégrale W soit finie en tous les points du plan des z à distance finie ou infinie, quelle que soit la détermination adoptée pour u, excepté au point $z = 0$, la valeur *correspondante* de u étant $+1$;

2° Pour que le résidu de W relatif à ce point ($z = 0$, $u = +1$) soit égal à $+1$.

3° Le polynome $P(z, u)$ satisfaisant aux conditions précédentes, quel est, en général, le nombre des périodes de l'intégrale W?

Composition de Mécanique rationnelle.

Une plaque homogène pesante infiniment mince, ayant la forme d'un triangle équilatéral $A_1A_2A_3$, de côté a, repose par le sommet A_1 sur un plan horizontal P sur lequel elle glisse *avec frottement*, tandis que le côté A_2A_3 glisse *sans frottement* sur un plan horizontal P′ placé au-dessus du premier.



Le triangle est percé en son centre de gravité G d'une ouverture infiniment petite, dans laquelle passe une tige verticale fixe OO′ parfaitement polie : la réaction de cette tige OO′ sur le triangle est donc une force horizontale appliquée en G.

Enfin, on suppose le plan du triangle incliné de 45° sur la verticale.

A l'instant $t = 0$, on imprime au triangle, autour de OO′, une vitesse angulaire ω_0, dans le sens positif des rotations.

On demande d'étudier le mouvement du système et de calculer les réactions normales des plans P et P′ sur le triangle.

1° Montrer que, si la vitesse angulaire initiale ω_0 a une certaine valeur μ, la réaction du plan P sur le sommet A_1 est *nulle*.

2° Indiquer ce qui arrive suivant que ω_0 est inférieur ou supérieur à μ, et suivant que le sommet A_1 peut ou non s'élever au-dessus du plan P.

Nota. — On appellera N_1 la réaction normale du plan P sur le sommet A_1 et l'on remarquera que les réactions normales du plan P′ sur le côté A_2A_3 peuvent se réduire à deux forces verticales N_2 et N_3 appliquées aux sommets A_2 et A_3. Si l'on prend pour axes liés au corps solide mobile un axe Gx dirigé suivant GA_1, un axe Gy parallèle à A_2A_3 et un axe Gz normal au plan du triangle et dirigé vers le haut, l'équation de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point G est de la forme

$$A(x^2+y^2)+2Az^2=1.$$

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1894.

PREMIÈRE SESSION.

Géométrie analytique.

On donne dans un plan deux axes rectangulaires, $x'Ox$, $y'Oy$, un cercle C dont l'équation est $x^2+y^2-r^2=0$, et une droite D dont l'équation est $x-d=0$.

A un point quelconque F de la circonférence du cercle C on fait correspondre une conique Δ qui passe par l'origine des coordonnées, qui a un foyer au point F et pour laquelle la directrice qui correspond à ce foyer F est la droite D.

Soient I le centre de cette conique Δ, A et A' les sommets de son axe focal, A étant celui de ces deux sommets qui est le plus près de F, F' son second foyer.

1° Trouver le lieu du point I quand le point F décrit la circonférence du cercle C. Ce lieu est une conique; déterminer, par une construction géométrique, ses sommets et les points où elle rencontre la circonférence du cercle C.

2° Déterminer par une construction géométrique le point A et le point A', sommets de l'axe focal de la conique Δ qui correspond à un point donné F de la circonférence du cercle C.

3° Trouver le lieu du point A et le lieu du point A' quand le point F décrit la circonférence du cercle C.

4° Trouver le lieu décrit par le foyer F' quand le foyer F décrit la circonférence du cercle C.

Nota. — On indiquera comment se modifie chacun des lieux demandés quand, laissant fixes les axes de coordonnées, et invariable le rayon r du cercle C, on fait croître d de o à $+\infty$.

Calcul trigonométrique.

Résoudre un triangle connaissant sa surface et deux hauteurs.

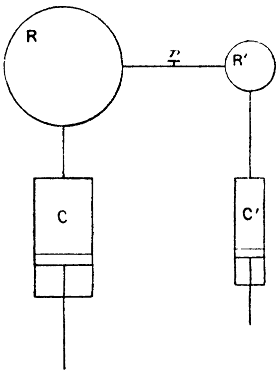
Démontrer que le problème admet en général deux solutions ou pas de solutions et calculer, pour les données particulières suivantes, celle des deux solutions pour laquelle la troisième hauteur du triangle est la plus petite.

$$h_a \text{ (hauteur abaissée sur le côté } a) = 28576^{\text{m}},45,$$
$$h_b \text{ (hauteur abaissée sur le côté } b) = 54217^{\text{m}},32,$$
$$S = 121634^{\text{ha}}.$$

Physique.

Une machine pneumatique et une machine de compression dont les corps de pompe sont C et C′ sont reliés respectivement à des réservoirs de capacité R et R′.

On fait le vide en R par n coups de piston, tandis qu'on le comprime en R′ par n' coups; puis on fait communiquer les deux réservoirs par un robinet r jusque-là fermé.



On demande de calculer la pression finale X de l'air après équilibre, en supposant les machines sans espaces nuisibles et la pression initiale uniforme H_0.

On écrira la condition pour que l'on ait $X = H_0$ dans le cas où $R = R'$.

Exemple numérique :

$R = R' = 2, \qquad n = 5, \qquad C = 2, \qquad C' = \frac{1}{16}, \qquad n' = 31.$

Chimie.

I. *Préparations des hydracides :* Écrire seulement les formules des réactions.

II. *Problème.* — Dans un appareil à hydrogène en activité, on introduit 10^{gr} d'acide azotique fumant. Quand la réaction, que l'on suppose complète, est achevée, on transvase le liquide dans un ballon, on verse un excès de potasse et l'on fait bouillir. On dessèche le produit qui se dégage et on le fait passer dans un tube à oxyde de euivre chauffé au rouge sombre.

Le gaz obtenu est ensuite recueilli sur la cuve à mercure.

On demande :

1° Le volume de ce gaz, supposé sec, dans les conditions normales de température et de pression;

2° La perte de poids du tube à oxyde de cuivre.

Ne pas tenir compte de l'air des appareils.

Écrire les équations qui représentent les réactions.

Faire un croquis de l'appareil.

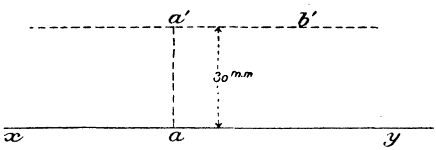
Poids atomiques : $H = 1$, $Az = 14$, $O = 16$.

Poids du litre d'air à 0° et 76^{cm} de pression : $1^{gr},293$.

Densité de l'hydrogène : 0,06947.

Épure.

La ligne de terre xy étant tracée parallèlement aux grands côtés du cadre à une distance de 60^{mm} au-dessous du milieu



du cadre, on considère, dans le plan vertical, une parabole dont l'axe est la verticale aa' placée au milieu du cadre, dont la directrice est la ligne de terre et dont le sommet a' est à 30^{mm} au-dessus de la ligne de terre; cette parabole, en tournant autour de son axe, engendre un paraboloïde. On considère, d'autre part, un cône de révolution ayant pour sommet le sommet aa' de la parabole et pour axe une parallèle ab, $a'b'$ à la ligne de terre : l'angle des génératrices de ce cône avec son axe est supposé égal à 45°.

1° Construire les projections de l'intersection de ces deux surfaces, et représenter leur solide commun, en supposant le cône prolongé de part et d'autre de son sommet.

2° Construire la projection de l'intersection sur un deuxième plan vertical ayant pour trace horizontale la perpendiculaire en a à la ligne de terre.

Nota. — On indiquera à l'encre rouge la construction d'un point et de la tangente en ce point à la parabole et à chacune des projections de l'intersection.

Titre extérieur : Géométrie descriptive.
Titre intérieur : Intersection d'un paraboloïde et d'un cône.

SECONDE SESSION.

Géométrie analytique.

On donne deux axes rectangulaires, $x'Ox$, $y'Oy$, un point M situé dans l'angle xOy, dont les coordonnées sont a et b, un point P situé sur l'axe des y dont l'ordonnée est p. Par le point P on mène, dans le plan des axes, une droite quelconque PR, et, à cette droite PR, on fait correspondre la conique Δ qui passe par le point M, qui a son foyer en O, et pour laquelle la droite PR est la directrice qui correspond au point O.

I. Déterminer géométriquement dans quelle région du plan doit être située la droite PR pour que la conique Δ qui lui correspond soit une ellipse, ou pour qu'elle soit une hyperbole.

Discuter le problème en laissant fixe le point M et en déplaçant le point P sur l'axe des y.

II. Former l'équation du lieu décrit par le centre de la conique Δ quand la droite PR tourne autour du point P. Le lieu se compose d'une droite et d'une conique C. Suivre les transformations de la conique C quand, le point M restant fixe, le point P se déplace sur l'axe des y.

Expliquer géométriquement les résultats trouvés par l'analyse.

III. Démontrer que la conique C est doublement tangente au cercle décrit sur OP comme diamètre, et reconnaître si cette conique pénètre, ou ne pénètre pas dans ce cercle.

Démontrer que si, laissant fixe le point P, on déplace le point M, un des deux axes de la conique C passe toujours par le milieu I de OP, et trouver sur quelle ligne il faut dans ces conditions placer le point M pour que l'autre axe de la conique C passe aussi par le milieu de OP.

Calcul trigonométrique.

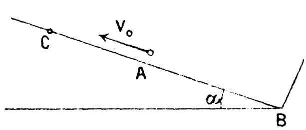
Résoudre un triangle connaissant le rayon du cercle circonscrit, un angle et la hauteur abaissée d'un des sommets des autres angles.

On démontrera que ce problème, pour les données suivantes, admet deux solutions et l'on calculera celle qui admet le plus grand côté b perpendiculaire à la hauteur donnée h_b :

$$R = 32437^{\text{m}},24,$$
$$h_b = 21634^{\text{m}},75,$$
$$A = 29^{\circ}27'32'',6.$$

Physique.

D'un point A on lance avec une vitesse V_0 sur un plan incliné formant avec l'horizon un angle α, suivant la ligne de



plus grande pente, et de bas en haut, une bille mobile sans frottement, qui, après s'être élevée en un point C, redescend et vient frapper un obstacle placé en B à la partie inférieure du plan.

Un observateur placé en A mesure le temps T écoulé entre l'époque du départ du mobile et l'instant où lui parvient le bruit produit par le choc.

On demande de calculer la distance $x = AB$.

Exemple numérique. — Vitesse du son :

$$V = 34000^{cm} \text{ à la } 1'',$$
$$V_0 = 2452^{cm},5 \text{ à la } 1'',$$
$$g = 981^{cm},$$
$$T = 17'',$$
$$\alpha = 30^{\circ}.$$

Chimie.

1° Action de l'acide azotique à divers degrés de concentration sur les métalloïdes et les métaux.

Écrire seulement les formules des réactions.

2° *Problème.* — On chauffe $3^{gr},72$ d'oxalate neutre de potassium sec avec un excès d'acide sulfurique concentré (environ 50^{gr}).

Le mélange gazeux qui se dégage est dirigé dans un tube en porcelaine rempli de braise et chauffé au rouge vif, puis, le gaz à sa sortie est reçu dans un tube eudiométrique sur la cuve à mercure. Quand l'expérience est terminée, on fait passer dans l'eudiomètre un certain volume d'oxygène pur préparé par le dichromate de potassium et l'acide sulfurique concentré.

On excite l'étincelle électrique et l'on agite le gaz restant avec un excès de lessive de potasse.

On demande :

1° Quels sont les gaz qui se dégagent avant leur passage dans le tube à braise incandescente et quel est le volume total du mélange qu'ils forment;

2° Quel est le gaz recueilli dans l'eudiomètre, quel est son volume et ce qu'il devient après le passage de l'étincelle;

3° Quel est le poids de dichromate de potassium nécessaire pour fournir un volume d'oxygène tel, que le résidu gazeux soit nul après l'absorption par la potasse.

On supposera les gaz secs et dans les conditions normales de température et de pression.

Poids du litre d'air

$$1^{gr},293, \qquad \delta = 0,0694.$$

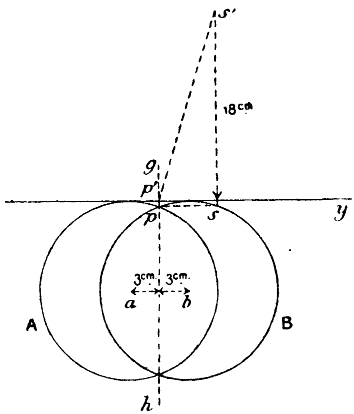
Poids atomiques

$$H = 1, \quad C = 12, \quad O = 16, \quad K = 39, \quad Cr = 52.$$

Écrire toutes les équations et faire les croquis des appareils.

Épure.

La ligne de terre xy étant tracée au milieu du cadre parallèlement aux petits côtés, on décrit dans le plan horizontal



deux cercles égaux A et B de 9^{cm} de rayon, tangents à la ligne de terre et ayant leurs centres respectifs a et b à 3^{cm} de part et d'autre de la ligne médiane gh du cadre.

Soient (p, p') le point d'intersection de ces deux cercles le plus rapproché de la ligne de terre, (s, s') le point dont la cote est 18^{cm} et dont la projection horizontale s est à l'intersection du cercle B et de la parallèle à la ligne de terre menée par p.

On considère :

1° Un cône dont la base est le cercle A dans le plan horizontal et dont le sommet est le point (s, s');

2° Un cylindre dont la base est le cercle B dans le plan horizontal et dont les génératrices sont parallèles à la droite $(ps, p's')$.

Construire la partie de la projection horizontale de l'intersection de ces deux surfaces comprise entre les bords du cadre, et la partie de la projection verticale située au-dessus de la ligne de terre jusqu'aux bords du cadre.

On indiquera à l'encre rouge la construction des points et droites remarquables.

On supposera les deux surfaces opaques.

Titre extérieur : Géométrie descriptive.

Titre intérieur : Intersection d'un cône et d'un cylindre.

BIBLIOGRAPHIE.

La Géométrie analytique d'*Auguste Comte*. Nouvelle édition, précédée de la Géométrie de *Descartes*. 1 vol. in-8° de 112 et de VIII-598 pages, avec 3 planches contenant 82 figures. Paris, Louis Bahl, 14, rue Chauveau-Lagarde; 1894. Prix 12^{fr}.

Nous ne pouvons qu'applaudir à la réimpression de l'Ouvrage, devenu introuvable, du célèbre philosophe. Nos lecteurs, que la publication de ses *Questions d'examen* a intéressés, seront sans doute fort aises de se rendre compte dans le texte de l'auteur du point de vue sous lequel Auguste Comte envisageait la Géométrie analytique.

Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques, par *Ch. Méray*, professeur à la Faculté des Sciences de Dijon. — Tome I : Principes généraux. Paris. Gauthier-Villars et fils; 1894. Grand in-8 de XXXIII-405 pages, avec figures. Prix : 13^{fr}.

I.

Dans les Sciences, en Mathématiques comme ailleurs, il arrive souvent, presque toujours, que les découvertes, les faits nouveaux, ne se présentent pas, tout d'abord, sous leur jour le plus simple, mais, d'une façon indirecte, sous une forme contournée, difficile à concevoir, qui masque, souvent, la portée de la découverte. Lorsque la Science s'est développée, lorsque les faits se sont accumulés comme les matériaux préparés d'un édifice à construire, il vient un homme, spécialement doué, à vues larges, qui relie tous ces résultats épars, les enchaîne et les réunit en un corps de doctrines procédant d'une idée générale, simple et féconde, dominant toutes les autres.

Depuis de longues années, M. Méray, dans l'intérêt de ses élèves, et dans l'intérêt de tous, s'est attaché, avec une persévérance admirable, à cette dure besogne de coordination et de redressement pour l'Analyse infinitésimale. Il ne faudrait pas croire que c'était là un simple travail de classement. Il lui a fallu reconstruire toute l'Analyse pas à pas, avec méthode, reprendre toutes les démonstrations, en inventer de nouvelles pour servir de traits d'union, modifier souvent les idées mêmes pour les rattacher à une idée unique, primordiale.

L'Analyse infinitésimale était, il y a environ vingt ans, probablement arrivée à cet état de développement qui nécessite un retour en arrière pour faire la coordination dont je viens de parler. La chose était à l'ordre du jour, car, tandis que M. Méray, en France, dirigeait tous ses efforts dans eette voie, d'autres savants éminents, comme MM. Weierstrass et Kronecker, en Allemagne, s'engageaient dans les mêmes études. MM. Méray et Weierstrass travaillèrent ainsi le même sujet, parallèlement, s'ignorant l'un l'autre, et arrivèrent, à peu près aux mêmes époques, à des conclusions semblables. Tous deux se contentèrent, très longtemps, d'enseigner leurs idées à leurs élèves sans les publier et il en résulte qu'aujourd'hui il y a entre leurs travaux des questions de priorité très difficiles à résoudre. Le plus simple, dans ce cas, croyons-nous, est de ne pas chercher à les trancher, car le mérite de chacun de ces grands savants n'est pas diminué par celui de l'autre et il suffit de citer leurs deux noms simultanément pour leur rendre à tous deux justice.

Dès 1872, M. Méray avait publié un Ouvrage important intitulé *Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale*. La modestie de ce titre fut préjudiciable au Livre. On crut, généralement, que ce titre de *Précis* ne désignait qu'un abrégé des théories courantes de l'Analyse, à l'usage des étudiants, et on ne s'aperçut pas qu'il contenait toute une méthode nouvelle d'exposition de l'Analyse basée, uniquement, sur la considération des *séries entières*. Tandis qu'on citait des travaux de MM. Briot et Bouquet, Weierstrass, Heine, etc., on oubliait le nom de Méray à qui appartenait, souvent, la priorité de ces travaux [1]. Cet état de choses regrettable, à tous les points de vue, va, enfin, cesser, car M. Méray publie, en ce moment, dans un Ouvrage magistral, qui ne devra rester inconnu à aucun mathématicien, le résultat complet de ses travaux, l'exposition méthodique de ses idées sur l'Analyse infinitésimale.

II.

Lorsqu'on embrasse l'ensemble de l'Analyse et de ses applications, on s'aperçoit, bientôt, d'un fait *fondamental :* c'est que toutes les fonctions intéressantes, *utiles,* toutes celles qui ont donné lieu à une étude approfondie, sont *développables en séries ordonnées suivant les puissances entières des accroissements des variables,* en *séries entières,* suivant l'expression de M. Méray. Et cela est encore vrai pour les fonctions qui en dérivent. Cela est tellement constant, que, chaque fois que les physiciens étudient un phénomène, ils supposent toujours que la fonction qui le représente est *développable.* On la suppose, d'abord, *constante* quelquefois, puis *linéaire,* puis, *parabotique,* etc., et l'on prend de plus en plus de termes à mesure qu'on entre plus avant dans l'étude approfondie de la loi physique.

---

(1) J'ai, personnellement, dans un travail paru dans les *Annales de l'École Normale supérieure,* en 1891, intitulé : *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées qui contiennent plusieurs fonctions inconnues*, fait deux oublis de ce genre.

Je suis heureux de saisir cette occasion pour les réparer.

1° J'ai omis de citer le nom de M. Méray, à propos des équations aux différentielles totales, à côté de ceux de Bouquet et de M. Mayer (*Introduction*).

2° Dans la *Note* finale, j'ai attribué l'invention de la *fonction majorante* à M. Weierstrass. Il serait plus juste de dire que MM. Weierstrass et Méray l'ont tous deux employée dans leurs Cours depuis fort longtemps et il est probable que la priorité appartient à M. Méray.

C'est ce fait fondamental qui sert de base à l'*Analyse* telle que la conçoit M. Méray. Pour lui, toute fonction digne d'être prise en considération est représentée ou, plutôt, *engendrée* par une série entière et il écarte, systématiquement, les fonctions anormales, inutiles dans la pratique, qui ne rentrent pas dans ce type et dont l'intérêt est purement philosophique.

Cette manière d'envisager l'Analyse lui donne de la clarté, de la simplicité, et, surtout, une très grande unité de méthode. Dans cet ordre d'idées, l'Analyse devient un prolongement naturel de l'Algèbre. L'étude des fonctions développées en séries devient une généralisation de l'étude des polynomes entiers et ne nécessite que la connaissance des règles élémentaires du calcul algébrique. Comme tout repose sur une seule idée primordiale, qui domine tout, il règne dans l'Ouvrage entier une unité d'exposition remarquable. Les propositions s'enchaînent sans interruption et, comme toutes s'appuient les unes sur les autres, il en résulte que, en dernière analyse, l'ensemble est supporté, uniquement, par la notion et les propriétés élémentaires des nombres entiers. Cet enchaînement continu augmente la certitude des théories (au sens logique du mot); la solidité des raisonnements paraît inébranlable et leur uniformité, loin d'être monotone, les débarrasse des artifices toujours si pénibles.

Les *Leçons nouvelles* initient le lecteur à toutes les questions importantes du Calcul infinitésimal, à toutes celles dont l'utilité et la nécessité sont certaines. Si, après cette étude approfondie, le lecteur, parfaitement préparé à aborder les questions mathématiques les plus ardues, désire connaître celles qui ont un intérêt purement philosophique, il pourra, sans difficulté, lire les Mémoires originaux. Il y apprendra comment on peut concevoir une fonction autrement que par un développement en série et il y trouvera la justification des idées de M. Méray en y voyant que les fonctions issues de cette conception plus générale n'ont guère servi qu'à des développements philosophiques d'un très grand intérêt *en eux-mêmes*, mais peu utiles dans la pratique. Peut-être M. Méray aurait-il pu glisser dans son Ouvrage quelques indications sur ces idées très courantes et qui ont été l'objet de remarquables travaux; il aurait rendu service à ses lecteurs désireux de compléter leurs connaissances. Sous l'empire d'une préoccupation constante d'*unité de méthode*, il a, systématiquement, écarté toutes ces questions. Cela laisse à son œuvre un cachet personnel sans rien enlever à sa grande valeur. Un Ouvrage intitulé *Leçons* ne peut pas avoir la prétention d'embrasser le domaine complet des Mathématiques. Ce n'est pas un *dictionnaire* que l'Ouvrage de M. Méray et c'est un des meilleurs éloges qu'on puisse en faire.

III.

La *première Partie* de l'Ouvrage complet, qui est la seule parue, contient toutes les propriétés générales des fonctions qui ne dépendent ni de leurs natures spécifiques ni du nombre des variables. Le nom d'aucune fonction *particulière* n'y est prononcé, à part ceux des polynomes entiers et des fractions rationnelles. Cela donne à ce volume un caractère abstrait et il est certain que sa lecture exigera, de la part du lecteur, un plus grand effort que s'il était entrecoupé par des exemples et des monographies qui reposent l'esprit. S'il s'agissait d'un livre élémentaire, destiné à des débutants, il faudrait blâmer sérieusement cette façon de procéder, mais, dans un livre d'Analyse destiné à des étudiants qui ont déjà l'habitude du raisonnement et l'esprit rompu aux abstractions, cela ne peut avoir que l'inconvénient de les forcer à tendre un peu plus leur esprit (si cela peut être considéré comme un inconvénient). D'ailleurs, il faudrait bien se garder de juger ce premier Volume isolément. Chaque Chapitre est une introduction toute prête pour des Chapitres des Volumes suivants et le lecteur, que l'étude ininterrompue de ce premier Volume pourrait fatiguer, n'aura qu'à l'arrêter au point voulu pour prendre dans les Volumes suivants les exemples et les applications qui donneront du repos à son esprit ou bien faciliteront l'assimilation des théories générales.

L'auteur, en partant de la notion de nombre entier, nous conduit tout d'un trait jusqu'aux confins des théories générales de l'Analyse, jusqu'à la démonstration de l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles simultanées. Cela, sans un exemple particulier, sans prononcer, une seule fois, le nom d'une fonction spéciale. S'il est vrai que cette méthode est bien abstraite, elle a, il faut en convenir, l'avantage de montrer que ces propriétés générales se tiennent debout *toutes seules*, se lient les unes aux autres et que l'édifice complet des théories fondamentales de l'Analyse, ainsi présentées, forme un tout homogène, logiquement enchaîné.

Avant d'entrer dans le détail du Volume, disons quelques mots de la terminologie qui y est adoptée. Cette terminologie est celle que l'auteur emploie depuis 1869 et qu'il à proposée dès 1872 dans le *Précis*. Depuis, on a imaginé d'autres termes qui ne sont ni mieux ni plus mal, mais qui ont eu la chance d'être répétés; on comprend, aisément, que M. Méray ait tenu à conserver ceux dont il est l'auteur et qu'il a choisis avant tout autre, pour bien spécifier des idées qui lui appartiennent.

Une fonction *olotrope* est une fonction engendrée par une série entière, c'est ce que nous appelons une fonction *holomorphe* (Briot et Bouquet), ou *régulière* (Weierstrass) ou encore *développable*. Les *olomètres* sont les rayons des cercles de convergence. Une *pseudo-fonction oloïde* est une suite de séries entières dont les cercles de convergence empiètent les uns sur les autres et qui se raccordent dans les parties communes de ces cercles. Les coefficients de ces séries sont les *articles* de la pseudo-fonction et celle-ci se forme par ce que nous appelons un *prolongement* ou *continuation*, opération que M Méray nomme *cheminement*. Enfin, dans la théorie des équations différentielles, les systèmes *immédiats* sont ceux qui sont du premier ordre et qui fournissent immédiatement un certain nombre de dérivées de fonctions inconnues en fonction des variables indépendantes, des fonctions inconnues et de leurs autres dérivées (s'il y a lieu). Un système immédiat est *passif* lorsque les conditions d'intégrabilité sont vérifiées, c'est-à-dire lorsqu'il est *complètement intégrable*.

IV.

Dans les trois premiers Chapitres du premier Volume, l'auteur reprend rapidement la théorie des fractions, des nombres négatifs, incommensurables et imaginaires. Pour ne pas donner à ces considérations une trop grande place il s'est, en général, contenté d'indications sommaires, mais qui, quoique brèves, sont du plus haut intérêt. Ce sont là trois Chapitres qui devraient être lus et commentés par tout le monde. On a dit si souvent, malheureusement, des choses ridicules sur ces sujets qu'on éprouve vraiment un grand plaisir à lire ces développements si logiques et si clairs. Les fractions sont des *fictions* introduites par la nécessité de généraliser le quotient de deux nombres entiers. Les nombres négatifs sont amenés par la nécessité de créer des *fictions* rendant toutes les soustractions possibles (servant aussi à mesurer les grandeurs dirigées). Pour conduire le lecteur à la notion de nombre incommensurable, M. Méray introduit ce qu'il appelle les *variantes*. Une variante $v_{m,n,} \ldots$ est une quantité qui est définie quand les valeurs de ses indices m, n, ... sont déterminées. Une variante est dite *convergente* si la différence $v_{m'',n'',\ldots} - v_{m',n',\ldots}$ devient infiniment petite lorsque les indices m'', n'', ..., m', n', ... sont infiniment grands. Toute variante qui a une limite est convergente, mais la réciproque n'est pas vraie. Toute variante convergente n'a pas nécessairement une limite (entière ou fractionnaire) et, alors, *par définition*, l'auteur désigne sous le nom de *nombre incommensurable* une *fiction* appelée par lui la *limite d'une variable convergente* qui ne tend pas vers un nombre commensurable.

Enfin, les nombres imaginaires sont introduits, d'une façon tout à fait rationnelle, comme des systèmes de deux nombres réels rendant possible la résolution de toute équation entière à une inconnue.

Dans ces trois Chapitres, d'une façon rapide, mais remarquablement précise, M. Méray a cimenté des bases solides à son œuvre.

Le quatrième Chapitre est la théorie complète des séries dont les termes sont des constantes; il est clair, bref et très complet.

Avec le Chapitre V, nous entrons dans la théorie des fonctions. C'est, maintenant surtout, que la personnalité de l'auteur se dégage. Tout de suite, sans s'attarder à l'étude des séries entières à une variable, il attaque la théorie de celles qui dépendent de plusieurs, expose les propriétés fondamentales, étudie la continuité de la série et établit le théorème d'Abel étendu à des séries à plusieurs variables. Les grandes analogies entre les séries et les polynomes entiers, analogies qui feront, précisément, l'intérêt des fonctions *olotropes*, sont mises en lumière. Citons dans ce Chapitre (n° 130) une très intéressante démonstration du lemme de Cauchy pour établir la *majorance* de la fonction

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{\xi}{R'_x}\right)\left(1 - \frac{\eta}{R'_y}\right)\cdots},$$

qui est la fonction majorante de Cauchy. Cette démonstration ne s'appuie absolument que sur les principes de l'Algèbre élémentaire et cela était nécessaire pour que l'auteur pût rester, jusqu'au bout, fidèle à son principe ([1]). Les séries entières prennent les noms de fonctions *olotropes,* et les Chapitres VI et VII sont réservés à l'étude de leurs propriétés. M. Méray a une horreur profonde pour notre définition ordinaire de la dérivée, et il est vrai que celle qu'il propose après Lagrange et qui s'impose, avec sa méthode, est beaucoup plus simple. $f(x, y, \ldots)$ étant une fonction olotrope, $f(x+h, y+k, \ldots)$ en est une aussi de $x, y, \ldots, h, k, \ldots$; les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \cdots$ ne sont alors autre chose que les coefficients de $h, k, \ldots$ dans le développement de $f(x+h, y+k, \ldots)$. Toujours avec sa façon de procéder, qui va du général au particulier, il définit de suite la différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables, $\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{y} k + \ldots$; le cas d'une fonction d'une variable n'est qu'un cas particulier du cas général. Le Chapitre VI se termine par plusieurs paragraphes (n° 173) remarquables sur les *pseudo-fonctions oloïdes* où, en particulier, l'auteur montre comment une telle pseudo-fonction définit, dans des aires imperforées, une véritable fonction olotrope.

C'est dans le Chapitre VII que la divergence du point de départ de M. Méray de celui de Cauchy se fait le plus sentir, par la nécessité où il se trouve de démontrer des choses qui, au point de vue de Cauchy, sont relativement évidentes. Lorsqu'on définit, comme d'habitude, une fonction holomorphe par la continuité et l'existence de la dérivée, il faut démontrer la *possibilité* du développement en série et la démonstration même montre que, si une fonction est holomorphe, dans des aires, le développement à partir de valeurs initiales données, prises dans ces aires, a pour cercles de convergences

---

([1]) On sait que, d'ordinaire, on se sert du Calcul intégral pour établir ce lemme. La démonstration est très simple; mais M. Méray devait absolument la bannir, car, plus tard, ce lemme même lui servira à faire le *Calcul inverse des dérivées,* c'est-à-dire à donner la notion d'intégrale.

les plus grands cercles contenus tout entiers dans ces aires et décrits de ces valeurs initiales comme centres. Au point de vue de M. Méray, la possibilité du développement d'une fonction olotrope *n'est pas à démontrer*, puisque le développement même *sert de définition*, de génération même à la fonction. Dire alors que la fonction $f(x, y, \ldots)$ est olotrope dans les aires S_x, S_y, ... avec les olomètres δx, δy, ... c'est affirmer par un mot que, si l'on prend un système *quelconque* de valeurs initiales $x_0, y_0, \ldots$, dans ces aires, la fonction était déjà représentable par une série ordonnée suivant les puissances croissantes entières de $x - x_0$, $y - y_0$, ... convergente tant que x, y, ... restent à l'intérieur des cercles décrits de x_0, y_0, ... comme centres avec δx, δy, ... pour rayons. De cette définition même, il découle bien que le développement est convergent dans les cercles de rayons δx, δy, ..., mais *rien de plus*, et on ne sait pas, *a priori*, si ce développement est encore convergent lorsque les cercles ont des rayons plus grands, mais de façon à être contenus dans les aires S_x, S_y, ... L'auteur se trouve conduit à démontrer cette proposition qui n'a pas sa raison d'être au point de vue de Cauchy et qui est absolument nécessaire au sien : « *Quand une fonction est olotrope dans des aires S_x, S_y, ... avec les olomètres δ_x, δ_y, ..., et qu'on ne sait rien de plus sur elle, son développement en série à partir des valeurs initiales x_0, y_0, .., tombant dans les aires considérées, a pour rayons de convergence maximum les quantités positives obtenues en ajoutant δ_x, δ_y, ..., respectivement à Δ_x, Δ_y, ..., rayons des plus grands cercles de centres x_0, y_0, ..., qui n'ont aucun point extérieur aux aires dont il s'agit* (n° 201). Cet exemple suffit pour montrer la différence irréductible qui existe entre les deux voies.

La notion de l'intégrale n'est, au fond, que la notion inverse de celle de la dérivation. En conséquence, M. Méray ne retient que cette façon de l'envisager et repousse, résolument, toute autre façon de la concevoir. Pour bien affirmer son idée, il abandonne le nom de *Calcul intégral* pour lui substituer celui de *Calcul inverse des dérivées* qui sert de titre au Chapitre VIII. Toujours exclusivement soucieux des cas généraux, il aborde donc, d'emblée, le problème général de l'intégration des différentielles totales : *trouver une fonction olotrope u* *de h variables satisfaisant aux h équations immédiates*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{U}_x(x, y, \ldots),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{U}_y(x, y, \ldots),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

L'intégrale indéfinie (et définie) n'est, alors, que le cas particulier à une variable. D'ailleurs, il y a plus, tandis que, d'ordinaire, on commence par traiter le cas de variables réelles pour passer, ensuite, au cas des variables imaginaires, il ne s'embarrasse de cette distinction pas plus ici qu'ailleurs, et il traite le tout d'un seul coup. Cette façon de procéder est certainement très légitime, très générale et surtout rapide, mais il est certain qu'elle exigera de la part des débutants un effort d'esprit plus considérable que la méthode ordinaire, plus longue et peut-être moins naturelle, mais qui gradue mieux la difficulté. Heureusement, il est probable que, malgré le sentiment de M. Méray, tous ses lecteurs auront les connaissances comprises dans le programme de Mathématiques spéciales et connaîtront déjà l'intégrale d'une fonction d'une variable.

Le Chapitre IX contient une théorie des fonctions composées, très documentée. Ce sujet, si délicat, est fait en une seule fois et en peu de mots, par le lemme de Cauchy pour leur olotropie et par des manipulations de séries pour la formation de leurs dérivées. C'est tout un Chapitre qui n'existait qu'à l'état rudimentaire dans le *Précis*.

Je n'insisterai pas sur les derniers Chapitres du Volume où les idées et les démonstrations sont beaucoup moins éloignées de celles qui ont cours. Dans le Chapitre X, l'auteur reprend la théorie des équations aux différentielles totales générales avec plusieurs fonctions inconnues et où les seconds membres contiennent aussi ces fonctions. Le Chapitre XI est réservé à l'étude des fonctions *implicites en général,* où la personnalité de l'auteur se remet vigoureusement en saillie. Le Chapitre XII, qui traite des équations différentielles partielles, est une reproduction, à peu près littérale, d'un Mémoire publié en collaboration avec M. Riquier, dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure.*

Enfin, le Chapitre XII, qui clôt le Volume, est un complément à la théorie des équations différentielles totales, dans lequel il faut signaler une démonstration du fait qu'on peut résoudre les équations intégrales par rapport aux constantes arbitraires.

Nous regrettons vivement que le manque d'espace ne nous ait pas permis de faire un compte rendu plus détaillé de ce Volume si remarquable, mais nous espérons cependant que ce simple aperçu suffira pour donner à chacun le désir d'étudier et d'approfondir les grandes idées que M. Méray a jetées, à profusion, dans son œuvre, et dont, mieux encore sans doute, les Volumes suivants feront ressortir la solidité et la simplicité.

C. Bourlet.

Cours de Géométrie analytique à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales et des candidats aux Écoles du Gouvernement; par *B. Niewenglowski,* professeur de Mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand, membre du Conseil supérieur de l'Instruction publique. 3 volumes gr. in-8°, avec nombreuses figures, se vendant séparément. Paris, Gauthier-Villars et fils. Tome I : Sections coniques; 1894, prix : 10fr. Tome II : Construction des courbes planes. Compléments relatifs aux coniques. Tome III : Géométrie dans l'espace, avec une Note sur la transformation des figures, par E. Borel, maître de conférences à la faculté des Sciences de Lille. (*En préparation.*)

Ce *Cours* comprend tout ce qui est exigé des candidats à l'École Polytechnique ou à l'École Normale relativement à la Géométrie analytique : il contient davantage. Les élèves qui se préparent à subir les épreuves d'un concours difficile sont obligés d'apprendre plus que *le programme*, en vertu de cet adage : *Qui peut le plus, peut le moins.* Aussi l'auteur ne s'est-il pas limité aux seules théories qui figurent explicitement dans les programmes officiels. Ni les coordonnées trilinéaires, ni les coordonnées tangentielles n'y sont mentionnées; leur connaissance est pourtant précieuse : c'est pourquoi l'auteur leur a fait une place importante. Néanmoins il a réservé la prédominance aux coordonnées cartésiennes qui constituent l'instrument fondamental.

L'emploi des coordonnées tangentielles exige quelque expérience ; on ne peut le nier. On ne doit donc, à son avis, les introduire dans l'enseignement qu'avec beaucoup de prudence et de ménagement. Il a cru possible et avantageux d'exposer la théorie des coordonnées homogènes et des coordonnées trilinéaires aussitôt après la *ligne droite;* mais c'est surtout la transformation par polaires réciproques qui permet de comprendre l'usage des coordonnées tangentielles en éclairant d'un jour plus vif les raisonnements directs qui semblent parfois quelque peu détournés. Pour cette raison il a placé les principales applications des coordonnées tangentielles après les polaires réciproques.

A la suite de chaque Chapitre, il a indiqué quelques exercices dont il aurait pu facilement étendre le nombre en faisant des emprunts aux journaux ou aux recueils de problèmes. Il a préféré n'indiquer que des applications immédiates ou des compléments utiles.

Le premier Volume contient la ligne droite, le cercle et une partie de la théorie des coniques ainsi que la théorie des tangentes. Le deuxième renfermera les théories générales relatives aux courbes planes et des compléments concernant les coniques. Un troisième Volume sera consacré à la Géométrie dite *à trois dimensions*. L'auteur a toujours donné la préférence aux méthodes symétriques; pour passer de la Géométrie plane à la Géométrie dans l'espace, il suffira souvent de reprendre exactement des calculs déjà faits, en introduisant une variable de plus.

L'ordre que l'auteur a suivi a été déterminé par le choix des matières qu'il lui a paru utile de grouper pour constituer son enseignement; cet ordre n'est pas indispensable et il sera bien facile de le modifier. Les élèves de seconde année pourront, par exemple, étudier les théories générales relatives aux courbes planes aussitôt après la théorie des tangentes et terminer par les coniques. L'auteur a pensé qu'il y aurait plus de profit pour les élèves de première année à commencer par les théories les plus faciles.

Il a adopté, suivant en cela un usage de plus en plus répandu, deux sortes de caractères pour le texte, les plus petits étant réservés aux questions les plus difficiles et ne faisant pas partie des programmes, et parfois aussi à de simples applications.

Le dernier Volume renfermera une Note importante relative à la transformation des figures, rédigée par M. E. Borel.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Théorie des jeux de hasard, par *H. Laurent,* examinateur d'admission à l'École Polytechnique, professeur à l'Institut national agronomique. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1894. Petit in-8° de 176 pages. Prix : 2fr,50.

Notations de Logique mathématique, par *G. Peano,* professeur d'Analyse infinitésimale à l'Université de Turin. Introduction au formulaire de Mathématiques publié par la *Rivista di Matematica.* Turin, Bocca frères; 1894. In-8° de 52 pages.

Exercices de Calcul intégral, par *L. Collette,* ancien élève de l'École normale des Sciences de Gand, professeur agrégé de l'enseignement moyen du degré supérieur. Solutions des questions posées au Cours d'Analyse donné à l'Université de Liége. Liége, Nierstrasz; 1894. Grand in-8° de VIII-112 pages. Prix : 3fr.

Leçons d'Algèbre, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales et des candidats à l'École Normale supérieure et à l'École Polytechnique, par *E. Pruvost,* inspecteur général de l'Instruction publique, ancien professeur de Mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand et *D. Piéron,* inspecteur de l'Académie de Paris, ancien professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis. Première Partie. Paris, Paul Dupont; 1893. Grand in-8° de 610 pages. Prix : 15fr.

Questions de Mécanique, à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales, par *X. Antomari* et *C.-A. Laisant,* Drs ès Sciences mathématiques. Paris, Nony et Cie; 1895. In-8° de 224 pages. Prix : 3fr,50.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE [1]

(TOME XIII, 3e SÉRIE).

A3. — Théorie des équations.

C1. — Calcul différentiel.

D. — Théorie des fonctions; séries.

E. — Intégrales définies.

[1] Les indications en caractères gras placées à la suite du numéro d'ordre correspondent à la classification adoptée par le Congrès de Bibliographie mathématique de 1889.

H. — Équations différentielles.

K. — Géométrie de la droite, du plan, du cercle et de la sphère.

L¹. — Coniques.

L² — Quadriques.

M¹. — Courbes planes algébriques.

M². — Surfaces algébriques.

M³. — Courbes gauches algébriques.

M⁴. — Courbes transcendantes.

O. — Géométrie infinitésimale.

P. — Transformations géométriques.

R. — Mécanique.

V. — Histoire des Sciences mathématiques.

MÉLANGES.

TABLE DES AUTEURS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE

(TOME XIII, 3e SÉRIE).

(On a mis à la droite de chaque nom d'auteur les numéros de la Table précédente auxquels il faut se reporter pour trouver les titres des Mémoires et l'indication des pages correspondantes.)

20558 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

EXERCICES.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1658. On donne un triangle abc.

Du sommet a, on abaisse sur bc la perpendiculaire aa'. De même, de b on abaisse la perpendiculaire bb'.

Du point i, centre du cercle inscrit au triangle $a'cb'$, on mène des parallèles à ac et bc. Ces droites rencontrent ces côtés aux points α, β.

Démontrer que la circonférence, qui touche en α et β les côtés cb, ca, est tangente au cercle des neuf points du triangle donné. (MANNHEIM.)

1659. Étant donnée une conique (C), on considère le triangle formé par les tangentes menées d'un point P à la conique et la polaire de ce point P par rapport à (C). Montrer que l'orthocentre de ce triangle est sur la polaire du point P par rapport au cercle orthoptique de la conique (C).

(E.-N. BARISIEN.)

1660. Les deux tangentes au point double d'une cubique étant réelles, si d'un point de la courbe A_1 on peut mener deux tangentes réelles, il n'y a qu'un des points de contact, A_2 par exemple, d'où l'on puisse mener de nouveau des tangentes réelles; alors de A_2 on mène la tangente dont le point de contact A_3 jouit de la même propriété, etc. : montrer que le point limite vers lequel on tend ainsi est le point d'inflexion réel de la courbe. (A. ASTOR.)

1661. Démontrer que, si le rapport d'un terme au terme précédent dans la succession a_1, a_2, a_3, ... tend vers une limite finie et déterminée k, on a, pour n croissant à l'infini,

$$\lim \sqrt[n]{a_1^{u_n} a_2^{u_{n-1}} a_3^{u_{n-2}} \ldots a_n^{u_1}} = k^s,$$

u_1, u_2, u_3, ... étant les termes d'une série convergente quelconque, dont la somme est s. (CESARO.)

1662. Démontrer que la *clothoïde* [1] est la seule courbe jouissant de la propriété suivante : *le barycentre d'un arc quelconque est en ligne droite avec les centres de courbure aux points extrêmes.* (CESARO.)

1663. Si deux variables imaginaires, z et z', sont liées par la relation homographique

$$z = \frac{az' + b}{cz' + d},$$

dans laquelle a, b, c, d sont des quantités imaginaires, et si l'une des variables z' décrit une courbe C', la variable z décrit une courbe C qui est superposable à l'une des transformées par rayons vecteurs réciproques de la courbe C'.

Si la courbe C' n'est autre que l'axe des x, la courbe C est, par suite, un cercle, théorème déjà proposé par Laguerre dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*. (E. AMIGUES.)

1664. Une courbe du quatrième ordre, qui a trois points doubles, admet généralement quatre tangentes doubles, qui forment quatre triangles homologiques du triangle déterminé par les points doubles. (ERNEST DUPORCQ.)

1665. Si trois cercles sont inscrits à un triangle, les quatrièmes tangentes communes qu'ils admettent, pris deux à deux, forment un triangle homologique du premier.

(ERNEST DUPORCQ.)

1666. Par un point fixe P du plan d'un cercle donné (C), on mène une corde quelconque dont les extrémités sont A et B. Le cercle (Σ) de diamètre PA rencontre le cercle (C) en un second point A'; le cercle (Σ') de diamètre PB rencontre le cercle (C) en un second point B'. Montrer que le point de concours des droites AA' et BB', ainsi que le point de concours des tangentes communes aux cercles (Σ) et (Σ') sont tous deux sur une même droite fixe.

En donner une solution analytique et une solution géométrique. (E.-N. BARISIEN.)

1667. Un point M parcourt une ellipse de foyers F et F'.

---

[1] Ligne dont la courbure varie proportionnellement à l'arc. Voyez *Nouvelles Annales*, 1886 : p. 512.

Le lieu du point de rencontre des tangentes communes aux cercles de diamètres FF′ et FM est une conique ayant un foyer au centre de l'ellipse. (E.-N. Barisien.)

1668. Étant donnée une parabole de sommet O et de foyer F, on trace une corde focale AC. Le cercle circonscrit au triangle OAB rencontre l'axe de la parabole en un point P tel que FP = AB. (E.-N. Barisien.)

1669. Par le foyer F d'une parabole, on mène une corde AB et on décrit sur AB comme diamètre une circonférence Σ qui rencontre la parabole en deux autres points C et D. On porte sur FC, du côté opposé à C, une longueur FD′ = FD, et sur FD, du côté opposé à D, une longueur FC′ = FC. Montrer que les points C′ et D′ sont situés sur la circonférence Σ.

(E.-N. Barisien.)

1670. Étant donnés trois points A, B, C sur une courbe quelconque, soient A′ le pôle de BC, B′ le pôle de AC, et C′ le pôle de AB. Lorsque les points A, B, C se réunissent en un seul A, on a

$$\lim \left(\frac{A'B'.A'C'.B'C'}{\text{surface } A'B'C'}\right) = R,$$

R étant le rayon du cercle osculateur en A.

(E.-N. Barisien.)

1671. On considère une courbe quelconque, son centre de courbure C en un point M quelconque de la courbe, puis le centre de courbure C_1 correspondant au point C de la première développée, puis encore le centre de courbure C_2 correspondant au point C_1 de la seconde développée, et ainsi de suite jusqu'au centre C_m. On sait que, si les coordonnées x et y de C sont des fonctions d'un paramètre t, il en est de même des coordonnées x_n et y_n d'un quelconque des centres de courbure C_n. Montrer que l'expression

$$\frac{dx_n^2 + dy_n^2}{dx_n\, d^2y_n - dy_n\, d^2x_n}$$

conserve la même valeur pour les coordonnées de l'un quelconque des centres de courbure successifs.

(E.-N. Barisien.)

1672. La podaire du centre de la courbe

$$4(x^2+y^2-a^2)^3+27a^2x^4=0$$

a pour équation

$$4(x^2+y^2)^3-a^2(2x^2+y^2)^2=0.$$

Le rapport de l'aire de la première courbe à celle de la seconde est $\frac{15}{19}$. (E.-N. BARISIEN.)

1673. Par un point fixe situé sur une circonférence de cercle, on mène deux cordes rectangulaires. Sur chacune de ces cordes, comme diamètre, on décrit respectivement les cercles (c), (c'). Le lieu des points de rencontre des tangentes communes aux deux cercles (c), (c') est une strophoïde droite. (E.-N. BARISIEN.)

1674. On considère tous les cercles tangents en un même point à une conique donnée. Lieu du pôle de la seconde corde d'intersection du cercle et de la conique par rapport à la conique. (ANDRÉ CAZAMIAN.)

1675. On considère tous les cercles de rayon constant tangents à une conique. Lieu du pôle de la seconde corde d'intersection du cercle et de la conique par rapport à la conique. Cas particulier d'un cercle de rayon nul. Montrer que, dans ce cas, le pôle de la seconde corde d'intersection du cercle et de la conique n'est autre que le point fixe du théorème de Frégier relatif aux angles droits ayant leur sommet au point considéré de la conique. (ANDRÉ CAZAMIAN.)

1676. Trouver, sur une conique, le point le plus éloigné et le point le plus rapproché d'un point donné situé hors de son plan. (ANDRÉ CAZAMIAN.)

1677. On considère les coniques inscrites dans un quadrilatère. Le lieu du second point de rencontre de chaque conique avec la droite joignant un sommet au point de contact avec un des côtés ne passant pas par ce sommet est une conique.
(ANDRÉ CAZAMIAN.)

1678. Lieu des sommets et enveloppe des axes des paraboles conjuguées par rapport à un triangle donné.
(ANDRÉ CAZAMIAN.)

1679. On considère les coniques passant par deux points fixes et tangentes à une droite donnée en un point donné. Lieu du point de rencontre des tangentes à la conique menées par deux points fixes pris sur la droite. (ANDRÉ CAZAMIAN.)

1680. On considère un faisceau de coniques passant par quatre points fixes :

1° Lieu des points de contact des tangentes menées à chacune d'elles par un point pris sur l'un des côtés du quadrilatère.

2° Lieu des points de rencontre des tangentes menées à chacune des coniques du faisceau par deux points pris sur l'une d'entre elles. (ANDRÉ CAZAMIAN.)

1681. On considère les coniques inscrites dans un triangle et passant par un point fixe. Le lieu du second point de rencontre avec chaque conique de la droite joignant un sommet A au point de contact avec le côté opposé est une quartique unicursale. (ANDRÉ CAZAMIAN.)

1682. On considère les coniques touchant quatre droites données. Deux points quelconques étant pris sur l'une de ces droites, le lieu des points de rencontre des tangentes menées de ces deux points à l'une quelconque des coniques du faisceau est une conique. Si les deux points fixes sont pris sur l'une des coniques du faisceau, le lieu est une cubique.

(ANDRÉ CAZAMIAN.)

1683. On donne une ellipse de foyers F et F'. Par l'un des foyers on mène une sécante quelconque rencontrant l'ellipse aux points M et M' :

1° Enveloppe des cercles de diamètres MM', FM, F'M.

2° Soit N le point de concours des normales en M et M'. Lieu du point de rencontre de la sécante MFM' avec la parallèle au grand axe menée par le point N.

3° Soit P le point de rencontre des tangentes à l'ellipse en M et M'. Lieu du centre de gravité du quadrilatère MNM'P.

(ANDRÉ CAZAMIAN.)

1684. Le lieu des points de rencontre des tangentes menées par deux sommets d'un triangle à toute conique conjuguée par rapport à ce triangle et passant, en outre, par un point fixe est une quartique trinodale. (ANDRÉ CAZAMIAN.)

QUESTIONS RÉSOLUES.

Question 1547.

Soient AA′, BB′ *deux diamètres conjugués d'une ellipse;* MM′ *un diamètre quelconque : les pôles des quatre droites* MA, MA′, M′B, M′B′ *sont situés sur une hyperbole qui passe par le centre de l'ellipse et est tangente, en ce point, au diamètre* MM′; *le centre de cette courbe est situé sur l'ellipse, et ses asymptotes sont parallèles aux droites* AA′, BB′, *respectivement.* (GENTY.)

SOLUTION

Par M. E.-N. BARISIEN.

Désignons par O le centre de l'ellipse, et soient P le pôle de MA, P′ le pôle de MA′, Q le pôle de M′B et Q′ le pôle de M′B′. Prenons pour axe des x le diamètre AA′, pour axe des y le diamètre BB′ et soient $OA = a$, $OB = b$. Si x_1 et y_1 sont les coordonnées du point M, on a

$$(1)\qquad b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2.$$

L'équation générale des coniques passant par P, P′, O est de la forme

$$(2)\qquad (b^2xx_1 + a^2yy_1 - a^2b^2)(ux + vy - 1) + b^2(x^2 - a^2) = 0,$$

u et v étant deux paramètres arbitraires.

L'équation générale des coniques passant par Q, Q′, O est aussi de la forme

$$(3)\qquad (b^2xx_1 + a^2yy_1 + a^2b^2)((Ux - Vy - 1) - a^2(y^2 - b^2) = 0.$$

En identifiant les équations (2) et (3), nous aurons les valeurs de u, v, U et V, et nous obtiendrons ainsi l'équation de la conique passant par les cinq points P, P′, Q, Q′ et O.

Les équations d'identification sont

$$\frac{ux_1+1}{Ux_1} = \frac{vy_1}{Vy_1-1} = \frac{ua^2y_1+vb^2x_1}{Ua^2y_1+Vb^2x_1}$$
$$= \frac{a^2u+x_1}{x_1-a^2U} = \frac{b^2v+y_1}{y_1-b^2V}.$$

Si l'on désigne par λ la valeur commune de ces rapports, on a

$$(4) \qquad ux_1+1 = U\lambda x_1,$$
$$(5) \qquad vy_1 = V\lambda y_1 - \lambda,$$
$$(6) \qquad ua^2y_1+vb^2x_1 = U\lambda a^2y_1 + V\lambda b^2x_1,$$
$$(7) \qquad a^2u+x_1 = \lambda x_1 - a^2U\lambda,$$
$$(8) \qquad b^2v+y_1 = \lambda y_1 - b^2V\lambda.$$

Ces cinq relations doivent donner λ, u, v, U et V.

De (4) et (5) on tire

$$(9) \qquad u = \frac{\lambda Ux_1-1}{x_1}, \qquad v = \frac{\lambda Vy_1-\lambda}{y_1}.$$

En portant ces valeurs dans (6), les quantités U et V disparaissent, et l'on trouve

$$(10) \qquad \lambda = -\frac{a^2y_1^2}{b^2x_1^2}.$$

Si l'on porte les valeurs (9) dans (7) et (8), en tenant compte de (10) et de (1), on trouve

$$U = 0, \qquad V = \frac{1}{y_1}.$$

Donc

$$u = -\frac{1}{x_1}, \qquad v = 0.$$

En portant ces valeurs, soit dans (2), soit dans (3), l'équation de la conique passant par les cinq points P, P', Q, Q' et O se réduit à

$$(11) \qquad xy - xy_1 + yx_1 = 0.$$

C'est bien une hyperbole tangente à l'origine à MM', dont le centre a pour coordonnées

$$x = -x_1, \qquad y = y_1.$$

C'est le second point de rencontre avec l'ellipse de la parallèle à AA' menée par le point M.

Les asymptotes de l'hyperbole (11) sont parallèles à AA' et BB'.

Remarques. — On voit aisément que l'enveloppe de l'hyperbole (11), lorsque le point M se déplace sur l'ellipse, est la quartique

$$x^2y^2 - a^2y^2 - b^2x^2 = 0,$$

connue sous le nom de *Kreuzcurve*.

Question 1555.

D'un point P *pris sur une strophoïde droite, on mène deux tangentes à la courbe; soient* T *et* T' *les points de contact. L'enveloppe de la corde* TT' *est une parabole ayant même sommet que la strophoïde, et dont le foyer est le symétrique du point double par rapport à ce sommet commun.* (FAUQUEMBERGUE.)

SOLUTION

Par M. E.-N. BARISIEN.

Si l'on prend pour axes de coordonnées l'axe de symétrie de la courbe, et sa perpendiculaire menée par le point double, l'équation de la strophoïde droite est

$$y = x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

En posant $y = tx$, on aura

$$x = \frac{a(t^2-1)}{t^2+1}, \qquad y = \frac{at(t^2-1)}{t^2+1}.$$

C'est l'équation de la strophoïde sous la forme de courbe unicursale.

L'équation de la tangente à la strophoïde au point de paramètre t est

$$\frac{X - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y - y}{\frac{dy}{dt}}.$$

Or

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4at}{(t^2+1)^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{a(t^4+4t^2-1)}{(t^2+1)^2}.$$

Par suite, l'équation de la tangente devient, après avoir supprimé le facteur (t^2+1),

$$(1) \qquad X(t^4+4t^2-1) - 4tY - a(t^2-1)^2 = 0.$$

D'autre part, cette équation représente aussi les quatre valeurs t des tangentes issues d'un point (X, Y). Si ce point est sur la courbe, on a

$$X = \frac{a(m^2-1)}{m^2+1}, \qquad Y = \frac{am(m^2-1)}{m^2+1}.$$

En portant ces valeurs de X et Y dans (1), on obtient l'équation suivante en t,

$$t^4 - t^2(3m^2-1) + 2tm(m^2-1) + m^2 = 0.$$

Or, cette équation doit admettre deux fois la racine $t = m$. Le premier membre de cette équation est donc divisible par $(t^2 - 2tm + m^2)$. En effectuant la division, on trouve pour quotient

$$t^2 + 2tm + 1 = 0.$$

Si donc t_1 et t_2 sont les valeurs de t relatives aux points T et T', on a

$$(2) \qquad t_1 + t_2 = -2m, \qquad t_1 t_2 = 1.$$

L'équation de la droite TT' est donc

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{a(t_1^2-1)}{t_1^2+1} & \frac{at_1(t_1^2-1)}{t_1^2+1} & 1 \\ \frac{a(t_2^2-1)}{t_2^2+1} & \frac{at_2(t_2^2-1)}{t_2^2+1} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant cette équation et supprimant le facteur

$(t_1 - t_2)$, il vient

$$x(t_1^2 t_2^2 + 2t_1 t_2 + t_1^2 + t_2^2 - 1) \\ - 2y(t_1 + t_2) - a(t_1^2 t_2^2 - t_1^2 - t_2^2 + 1) = 0,$$

et, en tenant compte des relations (2),

$$(3) \qquad m^2 x + my - a(1 - m^2) = 0.$$

Cette droite a m pour paramètre variable : elle peut s'écrire

$$m^2(x + a) + my - a = 0.$$

L'équation de l'enveloppe TT' est, par suite,

$$y^2 + 4a(x + a) = 0.$$

C'est la parabole définie par l'énoncé.

Remarques. — 1° D'après (3), on voit que la droite TT' et la droite joignant le point double au point P sont également inclinées sur l'axe de la strophoïde.

2° Il est facile de voir que les abscisses de T et T' sont égales et de signes contraires : par conséquent le milieu de TT' parcourt la perpendiculaire à l'axe élevée au point de rebroussement.

Question 1573.

D'un point M *du plan d'une ellipse, on mène à cette courbe les quatre normales* MN_1, MN_2, MN_3, MN_4 *et les deux tangentes* MT_1 *et* MT_2; *trouver le lieu du point tel que l'expression*

$$\frac{MN_1 . MN_2 . MN_3 . MN_4}{MT_1 . MT_2}$$

ait une valeur constante donnée l^2. (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. L. Bosi,

Professeur à Teramo (Italie).

Soit

$$(1) \qquad F(x, y) = b^2 x^2 + a^2 y_2 - a^2 b^2 = 0$$

l'équation de l'ellipse et désignons par ξ, η les coordonnées de M, par x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4 celles de N_1, N_2, N_3, N_4 et par X_1, Y_1; X_2, Y_2 celles de T_1, T_2.

Le système des équations (1) et

$$(2)\qquad (\xi - x)a^2y - (\eta - y)b^2x = 0$$

donne les coordonnées de N_1, N_2, N_3, N_4, et en éliminant y entre ces équations on obtient

$$(3)\qquad \begin{cases} f(x) = x^4 - \dfrac{2a^2\xi}{c^2}x^3 \\ \qquad + \dfrac{a^2}{c^4}(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - c^4)x^3 + \dfrac{2a^4\xi}{c^2}x - \dfrac{a^6\xi^2}{c^4} = 0, \end{cases}$$

où

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Or on a

$$\overline{MN}_i^2 = (\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

et en substituant $\eta - y_i$ au moyen de (2), puis y_i^2 au moyen de (1),

$$\overline{MN}_i^2 = \frac{c^2(\xi - x_i)^2\left(\dfrac{a^2}{c} - x_i\right)\left(\dfrac{a^2}{c} + x_i\right)}{b^2x_i^2}.$$

Donc

$$(4)\qquad \begin{cases} (MN_1.MN_2.MN_3.MN_4)^2 \\ = \dfrac{\left\{\begin{aligned} &c^8(\xi - x_1)^2(\xi - x_2)^2(\xi - x_3)^2(\xi - x_4)^2\left(\dfrac{a^2}{c} - x_1\right)\left(\dfrac{a^2}{c} - x_2\right) \\ &\times\left(\dfrac{a^2}{c} - x_3\right)\left(\dfrac{a^2}{c} - x_4\right)\left(\dfrac{a^2}{c} + x_1\right)\left(\dfrac{a^2}{c} + x_2\right)\left(\dfrac{a^2}{c} + x_3\right)\left(\dfrac{a^2}{c} + x_4\right)\end{aligned}\right\}}{b^8x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2} \\ = \dfrac{c^8\,\overline{f(\xi)}^2 f\left(\dfrac{a^2}{c}\right)f\left(-\dfrac{a^2}{c}\right)}{b^8x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2}. \end{cases}$$

Mais de (3) on tire

$$f(\xi) = \frac{b^2\xi^2}{c^4}F(\xi, \eta),$$

$$f\left(\frac{a^2}{c}\right) = \frac{a^6b^2}{c^6}(\xi^2 + \eta^2 + c^2 - 2c\xi),$$

$$f\left(-\frac{a^2}{c}\right) = \frac{a^6b^2}{c^6}(\xi^2 + \eta^2 + c^2 + 2c\xi),$$

$$x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2 = \frac{a^{12}\xi^4}{c^8},$$

et en substituant dans (4) on obtient

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &(\mathrm{MN}_1.\mathrm{MN}_2.\mathrm{MN}_3.\mathrm{MN}_4)^2 \\ &= \frac{\overline{\mathrm{F}(\xi,\eta)}^2(\xi^2+\eta^2+c^2-2c\xi)(\xi^2+\eta^2+c^2+2c\xi)}{c^4}. \end{aligned} \right.$$

Les coordonnées de T_1, T_2 sont données par le système des équations (1) et

$$(6)\qquad b^2\xi x + a^2\eta y - a^2 b^2 = 0;$$

en retranchant membre à membre (1) de (6), on a

$$(7)\qquad (\xi - x)b^2 x + (\eta - y)a^2 y = 0,$$

et en éliminant y entre (1) et (6)

$$(8)\qquad \varphi(x) = x^2 - \frac{2a^2b^2\xi}{b^2\xi^2+a^2\eta^2}x + \frac{a^4(b^2-\eta^2)}{b^2\xi^2+a^2\eta^2} = 0.$$

Or on a

$$\overline{\mathrm{MT}}_i^2 = (\xi - \mathrm{X}_i)^2 + (\eta - \mathrm{Y}_i)^2 \qquad (i = 1, 2),$$

et en substituant $\eta - \mathrm{Y}_i$ au moyen de (7), puis Y_i^2 au moyen de (1),

$$\overline{\mathrm{MT}}_i^2 = \frac{c^2(\xi - \mathrm{X}_i)^2\left(\frac{a^2}{c} - \mathrm{X}_i\right)\left(\frac{a^2}{c} + \mathrm{X}_i\right)}{a^2(a - \mathrm{X}_i)(a + \mathrm{X}_i)}.$$

Donc

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &(\mathrm{MT}_1.\mathrm{MT}_2)^2 \\ &= \frac{c^4(\xi-\mathrm{X}_1)^2(\xi-\mathrm{X}_2)^2\left(\frac{a^2}{c}-\mathrm{X}_1\right)\left(\frac{a^2}{c}-\mathrm{X}_2\right)\left(\frac{a^2}{c}+\mathrm{X}_1\right)\left(\frac{a^2}{c}+\mathrm{X}_2\right)}{a^4(a-\mathrm{X}_1)(a-\mathrm{X}_2)(a+\mathrm{X}_1)(a+\mathrm{X}_2)} \\ &= \frac{c^4\,\overline{\varphi(\xi)}^2\,\varphi\left(\frac{a^2}{c}\right)\varphi\left(-\frac{a^2}{c}\right)}{a^4\varphi(a)\varphi(-a)}. \end{aligned} \right.$$

Mais de (8) on tire

$$\varphi(\xi) = \frac{(\xi^2 - a^2)\mathrm{F}(\xi,\eta)}{a^2\eta^2 + b^2\xi^2},$$

$$\varphi\left(\frac{a^2}{c}\right) = \frac{a^4b^2(\xi^2+\eta^2+c^2-2c\xi)}{c^2(a^2\eta^2+b^2\xi^2)},$$

$$\varphi\left(-\frac{a^2}{c}\right) = \frac{a^4b^2(\xi^2+\eta^2+c^2+2c\xi)}{c^2(a^2\eta^2+b^2\xi^2)},$$

$$\varphi(a) = \frac{a^2 b^2(\xi - a)^2}{a^2\eta^2 + b^2\xi^2},$$

$$\varphi(-a) = \frac{a^2 b^2(\xi + a)^2}{a^2\eta^2 + b^2\xi^2},$$

et en substituant dans (9) on obtient

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &(\mathrm{MT}_1.\mathrm{MT}_2)^2 \\ &\quad = \frac{\mathrm{F}(\xi, \eta)(\xi^2 + \eta^2 + c^2 - 2c\xi)(\xi^2 + \eta^2 + c^2 + 2c\xi)}{(a^2\eta^2 + b^2\xi^2)^2}. \end{aligned} \right.$$

Enfin de (5) et (10) on déduit

$$\left(\frac{\mathrm{MN}_1.\mathrm{MN}_2.\mathrm{MN}_3.\mathrm{MN}_4}{\mathrm{MT}_1.\mathrm{MT}_2}\right)^2 = \frac{(a^2\eta^2 + b^2\xi^2)^2}{c^4},$$

d'où il résulte que le lieu demandé a pour équation

$$b^2\xi^2 + a^2\eta^2 = \pm c^2 l^2.$$

Ce lieu se compose d'une ellipse imaginaire et d'une réelle qui sont concentriques, semblables et semblablement situées par rapport à l'ellipse donnée : il ne change pas si, au lieu de (1), on considère une ellipse concentrique, semblable et semblablement située.

Si la conique donnée est une hyperbole

$$(11)\qquad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

le lieu de M a pour équation

$$b^2\xi^2 - a^2\eta^2 = \pm c^2 l^2,$$

où

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Ce lieu se compose de deux hyperboles qui ont mêmes asymptotes que l'hyperbole donnée : il ne change pas si, au lieu de (11), on considère une hyperbole ayant mêmes asymptotes.

Question 1597.

Pierre tire quatre cartes d'un jeu de piquet; il donne les trois premières à Paul et garde la quatrième pour lui. Pierre a gagné si sa carte n'est de la couleur d'aucune des cartes de Paul, ou si, étant de la couleur de l'une ou de *plusieurs d'entre elles, elle a une valeur supérieure. La mise de Paul étant de 1^fr, quelle doit être celle de Pierre pour que le jeu soit équitable?* (E. Rouché.)

SOLUTION

Par M. Audibert.

Soient m, n, p, q les probabilités pour que Paul ait reçu 0, 1, 2, 3 cartes de même couleur que celle que Pierre a gardée. Dans le premier cas ce dernier est sûr de gagner, dans le second il a pour lui une chance sur deux, une sur trois dans le troisième, et une sur quatre dans le dernier. Sa probabilité totale de gain

$$P = \frac{m}{1} + \frac{n}{2} + \frac{p}{3} + \frac{q}{3}.$$

Au lieu de supposer que Pierre donne à Paul trois cartes sur les quatre qu'il a prélevées dans le jeu de piquet, nous n'altérerons en rien les chances respectives des deux joueurs, si nous modifions ainsi le jeu : Pierre prélèvera d'abord une carte dans le jeu complet; Paul, après lui, en prendra trois sur les trente et une qui restent.

Le nombre total de jeux différents de trois cartes qu'il pourra former est $\frac{31.30.29}{1.2.3} = R$: c'est le dénominateur commun aux quatre fractions m, n, p et q. Pour calculer les numérateurs, divisons les 31 cartes en deux groupes, le premier de 24 de couleurs différentes, l'autre de 7 de même couleur que celle de Pierre.

Tous les jeux de Paul qui ne contiennent pas de cartes de la couleur de celle de Pierre se formeront avec le premier groupe, et de $\frac{24.23.22}{1.2.3}$ manières différentes.

Ceux qui n'en ont qu'une seule résulteront de l'association de chaque combinaison de deux objets du premier groupe avec un du second; on en pourra constituer $\frac{24.23}{1.2}7$.

Pour avoir tous ceux qui en renferment deux, on joindra à chacun des 24 objets du premier groupe une combinaison de deux du second; il y en aura $24\frac{7.6}{1.2}$.

Enfin ceux qui en auront trois proviendront exclusivement des combinaisons trois à trois des objets du second groupe qui sont au nombre de $\frac{7.6.5}{1.2.3}$. On conclut de là que

$$m = \frac{24.23.22}{1.2.3.R}, \quad n = \frac{24.23.7}{1.2.R}, \quad p = \frac{24.7.6}{1.2.R}, \quad q = \frac{7.6.5}{1.2.3.R}$$

et l'on vérifie que $m + n + p + q = 1$.

Le calcul numérique donne $P = 0.7045$. A ce compte la mise de Pierre devrait être de $2^{fr}, 38$.

Question 1636.

Étant données deux cubiques C *et* C′ *dont les équations en coordonnées polaires sont*

$$(C) \qquad r = \frac{a \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta}{\cos\theta},$$

$$(C') \qquad r = \frac{a' \cos^2\theta + b'^2 \sin^2\theta}{\cos\theta},$$

et dont le pôle est en O, *montrer que si une droite quelconque rencontre la cubique* (C) *en* A, B, C, *et la cubique* C′ *en* A′, B′, C′, *on a la relation*

$$\frac{OA.OB.OC}{OA'.OB'.OC'} = \frac{a-b}{a'-b'}.$$ (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. J. Destoux.

Mettons l'équation de la droite sous la forme

$$r(A\cos\theta + \sin\theta) + C = 0;$$

ce qui donne, en élevant au carré et remplaçant $\sin^2\theta$ par $1 - \cos^2\theta$,

$$(1) \qquad (A^2+1)r^2\cos^2\theta + 2ACr\cos\theta + C^2 - r^2 = 0.$$

L'équation de la cubique (C) peut s'écrire

$$(2) \qquad (a-b)\cos^2\theta - r\cos\theta + b = 0.$$

Éliminons maintenant $\cos\theta$ entre ces deux équations, ce qui peut se faire en égalant les deux valeurs de $\cos^2\theta$ qu'on peut tirer des équations précédentes; on obtient une équation du troisième degré en r^2; le coefficient de r^6 est

$$(A^2+1),$$

et le terme indépendant de r^2 est

$$-2(a-b)^2(1-C^2)^2,$$

d'où

$$\overline{OA}^2.\overline{OB}^2.\overline{OC}^2 = \frac{2(a-b)^2(1-C^2)^2}{A^2+1}.$$

On trouve de même

$$\overline{OA'}^2.\overline{OB'}^2.\overline{OC'}^2 = \frac{2(a'-b')^2(1-C^2)^2}{A^2+1}.$$

On a donc

$$\frac{\overline{OA}^2.\overline{OB}^2.\overline{OC}^2}{\overline{OA'}^2.\overline{OB'}^2.\overline{OC'}^2} = \frac{(a-b)^2}{(a'-b')^2}.$$

N. B. — M. A. Droz Farny, de Porrentruy, a résolu cette question et la question 1637.

Question 1651 (1).

SOLUTION

Par M. AUDIBERT.

Considérons le groupe-type des deux permutations à la fois symétriques et inverses l'une de l'autre

$$\begin{array}{ll|ll} 1\ldots\ldots. & n & n+1\ldots & 2n \\ 2n\ldots.. & n+1 & n\ldots\ldots. & 1 \end{array}$$

Ce groupe est divisé en deux Tableaux par une droite.

Supposons invariables les colonnes formées de deux nombres superposés; en les permutant entre elles dans le Tableau de droite, par exemple, nous obtiendrons les permutations spéciales dont il s'agit, si, en même temps, nous déplaçons les colonnes de gauche primitivement symétriques des premières, par rapport à la droite, de telle sorte qu'après ce changement méthodique la symétrie subsiste encore.

---

(1) *Voir* p. 1* du présent Volume.

Nous obtiendrons ainsi $n\,!$ permutations spéciales.

Faisons ensuite passer dans le groupe-type *une* des colonnes de droite dans le Tableau de gauche à la place de sa symétrique qui viendra la remplacer à droite. Nous constituerons ainsi un nouveau groupe secondaire qui ne différera du groupe-type que par l'interchange d'une colonne dans chaque Tableau.

En le permutant méthodiquement, il donnera $n\,!$ permutations spéciales. Or il est clair que nous pouvons constituer n groupes secondaires de ce genre, dont l'ensemble nous fournira $n.n\,!$ permutations spéciales.

Prenons ensuite dans le groupe-type, et de toutes les manières possibles, à la fois deux colonnes à droite venant remplacer leurs symétriques dans le Tableau de gauche, nous obtiendrons $\frac{n(n-1)}{1.2}$ groupes secondaires dérivés chacun du groupe-type, dont l'ensemble nous donnera

$$\frac{n(n-1)}{1.2}\,n\,!$$

permutations spéciales.

En transposant de la même manière trois colonnes à la fois de droite à gauche et permutant méthodiquement les $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ groupes secondaires résultant, nous formerons encore

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,n\,!$$

permutations spéciales, et ainsi de suite.

Finalement, le nombre de ces permutations formées sera

$$n\,!\left[1+\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-1)}{1.2.3}+\ldots+\frac{n}{1}+1\right]$$
$$= n\,!.2^n = 2.4.6\ldots 2n.$$

Toutes ces permutations seront distinctes, car elles proviennent de groupes différents ou de permutations d'un même groupe. Une permutation spéciale étant donnée, la nature des n nombres de droite, par exemple, fera reconnaître à quel groupe elle appartient et la permutation méthodique de ce groupe la reproduira.

La probabilité cherchée sera donc

$$\frac{2.4.6\ldots 2n}{2n!} = \frac{1}{1.3.5\ldots(2n-1)}.$$

Dans le cas d'un nombre impair, $2n+1$, dans le groupe-type

$$\begin{array}{cccccc} 1\ldots\ldots\ldots & n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n+1 \\ 2n+1\ldots & n+2 & n+1 & n & \ldots & 1 \end{array}$$

la colonne médiane $\begin{array}{c} n+1 \\ n+1 \end{array}$ n'ayant pas de symétrique demeure inamovible. Le nombre des permutations spéciales sera le même que pour le nombre pair $2n$ et la probabilité s'exprimera par la formule $\dfrac{1}{1.3.5\ldots(2n+1)}$.

N. B. — M. J. Destoux a aussi résolu la question.

Question 1550.

Étant donnés un cercle fixe (A) *et une droite tournant autour d'un point fixe* O, *on considère un cercle* (B) *de rayon constant tangent au cercle et à la droite; on demande le lieu du point de contact de ce cercle et de la droite.* (D'Ocagne.)

SOLUTION.

Par M. Brocard.

La question revient à chercher les intersections d'un cercle mobile par la polaire de l'origine, le centre du cercle étant supposé se mouvoir sur une circonférence donnée.

Soient donc O l'origine, A le centre de la circonférence (A), OAx l'axe des x, a la distance OA, b le rayon du cercle mobile (B), c celui du cercle fixe.

Le cercle mobile aura pour équation

$$(1) \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=b^2.$$

avec la condition

$$(2) \qquad (\alpha-a)^2+\beta^2=c^2.$$

La polaire de l'origine par rapport au cercle (B) a pour équation

$$(3) \qquad -\alpha x - \beta y + \alpha^2 + \beta^2 - b^2 = 0$$

ou

$$(4) \qquad \alpha x + \beta y + a^2 + b^2 - c^2 - 2a\alpha = 0,$$

et il reste à éliminer α et β entre les équations (1), (2) et (4). Mais les équations (1) et (3) donnent

$$x^2 + y^2 = \alpha x + \beta y.$$

On a donc, pour équation du lieu,

$$\begin{aligned} 4a^2c^2y^2 = {} & [(2a - x)(x^2 + y^2) - x(a^2 + b^2 - c^2)]^2 \\ & + (x^2 + y^2 - a^2 + b^2 - c^2)^2 y^2. \end{aligned}$$

Le lieu est une courbe du sixième degré.

Nous avons supposé le cercle (B) tangent extérieurement au cercle (C). Il resterait à le supposer tangent intérieurement au cercle (C), ce qui est toujours possible. On en conclut une autre courbe du sixième degré, correspondant à cette seconde série de circonférences.

Par suite de l'indépendance des paramètres a, b, c, les deux courbes peuvent affecter une très grande variété de tracés.

Question 1654.

On considère un triangle équilatéral ABC *et une droite* (D) *passant par le centre* O *du triangle. Par le point* A *on mène une droite* (Δ) *symétrique par rapport à la direction* (D) *de la droite perpendiculaire en* A *à* AO; *de même en* B, *on mène la droite* (Δ)' *symétrique, par rapport à la même direction* (D), *de la perpendiculaire en* B *à* BO; *on agit de même en* C *pour construire la droite* (Δ)''.

Montrer que ces trois droites (Δ), (Δ)', (Δ)'' *se rencontrent en un même point situé sur le cercle circonscrit au triangle* ABC. (E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. BROCARD.

En d'autres termes, l'énoncé proposé revient au suivant :

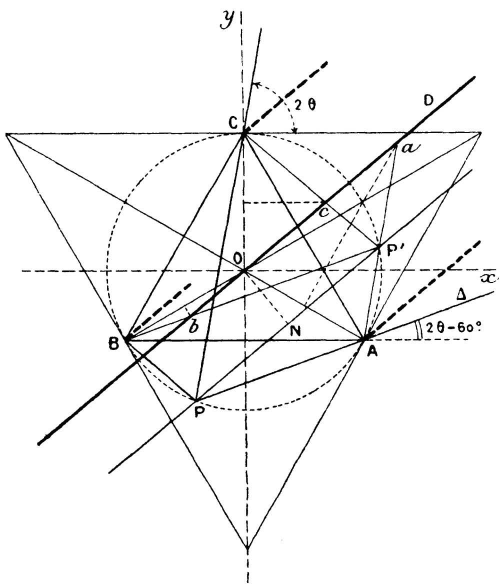
Étant donnée une droite (D) quelconque, on la prend pour base de trois triangles isoscèles ayant pour sommets A, B, C et pour un de leurs côtés la tangente AT_1 en A, BT_2 en B et CT_3 en C. Les troisièmes côtés concourent en un point M de la circonférence ABC.

En effet, soient α, β, γ les projections de A, B, C sur (D). En prenant $\alpha T'_1 = \alpha T_1$, $\beta T'_2 = \beta T_2$, $\gamma T'_3 = \gamma T_3$, les droites T'AM, BT'_2M font avec (D) des angles égaux à ceux des tangentes en A et B avec la même droite (D). Donc les droites précitées font entre elles le même angle que les tangentes, ou son supplément, c'est-à-dire 120° ou 60°. L'angle AMB est donc de 60° et, par suite, M est sur la circonférence ABC.

SOLUTION

Par M. H. Lez.

Soit O le point de rencontre des hauteurs du triangle ABC;



si l'on prend pour axe des y une des hauteurs OC et pour axe des x une parallèle au côté correspondant AB, les coordonnées des sommets seront

$$\begin{array}{llll} \text{A}, & x = h\sqrt{3}, & y = -h, \\ \text{B}, & x = -h\sqrt{3}, & y = -h, \\ \text{C}, & x = 0, & y = 2h. \end{array}$$

Soit θ l'angle que fait la droite OD avec l'axe des x, la droite Δ symétrique de la perpendiculaire en A à OA, par rapport à la direction D, fera un angle de $2\theta - 60°$ avec le même axe; elle aura pour équation

$$y + h = \operatorname{tang}(2\theta - 60°)(x - h\sqrt{3}).$$

De même, la droite de symétrie, passant par le sommet B, sera représentée par

$$y + h = \operatorname{tang}(2\theta + 60°)(x + h\sqrt{3}).$$

Quant à la droite de symétrie, passant par le sommet C, il est facile de voir qu'elle fait un angle égal à 2θ; son équation est donc

$$y - 2h = x \operatorname{tang} 2\theta.$$

Ces équations peuvent s'écrire sous la forme

$$(y + h)(1 + \sqrt{3}\operatorname{tang}2\theta) - (x - h\sqrt{3})(\operatorname{tang}2\theta - \sqrt{3}) = 0,$$
$$(y + h)(1 - \sqrt{3}\operatorname{tang}2\theta) - (x + h\sqrt{3})(\operatorname{tang}2\theta + \sqrt{3}) = 0,$$
$$y - 2h - x\operatorname{tang}2\theta = 0.$$

Leur somme algébrique est nulle; les droites qu'elles représentent concourent donc en un point P ayant pour coordonnées

$$x = -\frac{4h\operatorname{tang}2\theta}{1 + \operatorname{tang}^2 2\theta} = -\frac{8h\mu(1 - \mu^2)}{(1 + \mu^2)^2},$$
$$y = \frac{2h(1 - \operatorname{tang}^2 2\theta)}{(1 + \operatorname{tang}^2 2\theta)} = \frac{2h(1 + \mu^4 - 6\mu^2)}{(1 + \mu^2)^2},$$

si l'on met $\operatorname{tang}2\theta$ en fonction de $\operatorname{tang}\theta$ et si l'on écrit $\operatorname{tang}\theta = \mu$.

Ce point P se trouve sur le cercle circonscrit

$$x^2 + y^2 = 4h^2.$$

De même, si par un sommet A, par exemple, on mène une droite symétrique de la direction D, par rapport à la perpendiculaire en A à OA, et qu'on agisse ainsi aux deux autres sommets, on trouvera trois droites concourant en un point P' symétrique de P par rapport à la droite ON menée perpendiculairement à la direction D.

En effet, si, au milieu des trois segments OA, OB, OC, on élève des perpendiculaires qui rencontrent OD en a, b, c, et si l'on joint deux à deux les points Aa, Bb, Cc, on aura les trois droites en question.

Or, les coordonnées des points de rencontre de ces perpendiculaires avec $y = \mu x$ sont

$$a, \qquad x = \frac{2h}{\sqrt{3} - \mu}, \qquad y = \frac{2h\mu}{\sqrt{3} - \mu},$$

$$b, \qquad x = -\frac{2h}{\sqrt{3} + \mu}, \qquad y = -\frac{2h\mu}{\sqrt{3} + \mu},$$

$$c, \qquad x = \frac{h}{\mu}, \qquad y = h.$$

Par suite, les droites Aa, Bb, Cc sont représentées par

$$x(\sqrt{3} + \mu) + y(1 - \mu\sqrt{3}) - 2h(1 + \mu\sqrt{3}) = 0,$$
$$x(\sqrt{3} - \mu) - y(1 + \mu\sqrt{3}) + 2h(1 - \mu\sqrt{3}) = 0,$$
$$x\mu + y - 2h = 0.$$

Mais la somme algébrique de ces trois équations étant nulle, les droites qu'elles représentent concourent en un point P' dont les coordonnées sont

$$x = \frac{4h\mu}{1 + \mu^2}, \qquad y = \frac{2h(1 - \mu^2)}{1 + \mu^2}.$$

Ce point est aussi sur le cercle circonscrit $x^2 + y^2 = 4h^2$, ainsi qu'il est facile de le vérifier.

Maintenant si l'on joint les points P, P', on trouve, après réduction, pour l'équation de la droite PP',

$$(y - \mu x)(1 + \mu^2) + 2h(3\mu^2 - 1) = 0;$$

cette droite est donc parallèle à OD.

Elle coupe la perpendiculaire ON, ou $\mu y + x = 0$, en un point N ayant pour coordonnées

$$x = \frac{2h\mu(3\mu^2 - 1)}{(1+\mu^2)^2}, \qquad y = \frac{-2h(3\mu^2 - 1)}{(1+\mu^2)^2};$$

ce point est le milieu de PP'.

Les points P et P' sont donc symétriques par rapport à la perpendiculaire ON.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE,

Par M. A. Droz-Farny.

On sait que les trois symétriques relativement aux côtés d'un triangle d'une droite quelconque (D)' menée par l'orthocentre de ce triangle concourent en un même point P de la circonférence circonscrite au triangle. La droite de Simson de ce point P' relativement au triangle est parallèle à (D)'.

Cela posé, la perpendiculaire sur OA en son point milieu coupe (D) au point α; $A\alpha$ sera la droite (Δ). Supposons que $A\alpha$ rencontre la circonférence pour la deuxième fois en P et soit A' le point diamétralement opposé de A. PA' coupe BC en α' et soit tiré $O\alpha'$.

On a

$$\text{angle } \alpha AO = AO\alpha,$$
$$\text{angle } OA'\alpha' = A'O\alpha',$$

donc

$$\alpha AO + OA'\alpha' = AO\alpha + A'O\alpha' = 90^\circ,$$

donc

$$\text{angle } \alpha O \alpha' = 90^\circ.$$

La droite $O\alpha' = (D)'$ étant perpendiculaire sur (D) est donc fixe et PA' est la symétrique de (D)' par rapport au côté BC. On a donc le théorème plus complet :

Les trois droites (Δ), (Δ)', (Δ)'', *ainsi que les trois symétriques relativement aux côtés de la droite* (D)' *concourent en un même point* P *de la circonférence circonscrite au triangle. Ce point* P *est tel que sa droite de Simson, relativement au triangle, est parallèle à* (D)' *ou perpendiculaire à* (D).

N. B. — M. J. Destoux a résolu la question analytiquement et géométriquement.

MM. J. Destoux, E. Grossetête, E. Barisien, A. Droz-Farny, Audibert, Cl. Servais, W.-J. Greenstreet, ont aussi résolu la question 1453.

Question 353.

Soit ABCD *un quadrilatère coupé par une transversale en* α *sur le côté* AB *et en* β *sur le côté opposé* CD ; *soient* α' *le conjugué harmonique de* α *par rapport aux points* A, B *et* β' *le conjugué harmonique de* β *par rapport aux points* C, D ; *menons la droite* $\alpha'\beta'$, *faisons une construction analogue sur les côtés opposés* AC, BD *et sur les diagonales* AD, BC ; *les trois droites passent par le même point.*

(De Laffitte.)

SOLUTION

Par M. Moret-Blanc.

Faisons une perspective de la figure sur un plan parallèle à celui déterminé par le point de vue et la transversale, qui sera ainsi transportée à l'infini. Au quadrilatère ABCD correspondra un quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$, et aux trois droites du théorème les droites qui joignent les milieux des côtés opposés et les milieux des diagonales du quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$; or on sait que celles-ci concourent en un même point, centre de gravité de quatre masses égales placées aux quatre sommets du quadrilatère; donc les droites $\alpha'\beta'$, etc., dont elles sont la perspective, concourent en un même point.

Question 372.

Un triangle ayant pour sommets les deux foyers d'une conique et le troisième sommet sur la circonférence de la conique, trouver les lieux géométriques des trois points suivants : le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité, le point de rencontre des trois hauteurs, et déterminer le degré de l'enveloppe de la droite qui renferme ces trois points.

SOLUTION

Par M. H. Brocard.

Supposons que la conique soit une ellipse rapportée à son centre et à ses axes.

1° Le lieu du centre du cercle circonscrit est évidemment l'axe des y,

$$x = 0.$$

2° Le centre de gravité est au tiers de la médiane formée par chaque rayon de l'ellipse. Le lieu de ce point a donc pour équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = \frac{a^2b^2}{9}.$$

3° Soient (α, β) les coordonnées d'un point de l'ellipse. L'une des hauteurs a pour équation

$$x = \alpha;$$

l'autre a pour équation

$$y = \frac{c - \alpha}{\beta}(x + c),$$

avec la condition

$$a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 = a^2b^2.$$

L'élimination de α et de β donne

$$a^2(c^2 - x^2)^2 + b^2x^2y^2 = a^2b^2y^2.$$

4° L'enveloppe de la droite qui joint ces trois points admet l'origine pour centre, les deux axes Ox et Oy pour axes de symétrie; elle a deux points de rebroussement sur Oy, et, sur Ox, deux sommets et deux points doubles. La courbe en question est donc au moins du sixième degré.

Question 14.

Quel est le minimum du rapport du rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre au rayon de la sphère inscrite?

SOLUTION

Par M. Moret-Blanc.

Lemme I. — *Le tétraèdre maximum inscrit dans une sphère est le tétraèdre régulier.*

Car l'une quelconque de ses faces, prise comme base, doit être le triangle maximum inscrit dans un cercle et, par conséquent, un triangle équilatéral.

Corollaire. — Le rapport du volume de la sphère circonscrite à un tétraèdre au volume du tétraèdre est minimum quand le tétraèdre est régulier.

LEMME II. — *De tous les tétraèdres de base équivalente et de même hauteur, celui dont la surface est minimum est le tétraèdre dont le pied de la hauteur est le centre du cercle inscrit dans la base.*

Soient a, b, c les trois côtés de la base, B sa surface, h la hauteur du tétraèdre; α, β, γ les distances du pied de la hauteur aux côtés a, b, c et S la surface latérale du tétraèdre.

On a

$$(1)\qquad a\alpha + b\beta + c\gamma = 2B,$$
$$(2)\qquad a\sqrt{h^2+\alpha^2} + b\sqrt{h^2+\beta^2} + c\sqrt{h^2+\gamma^2} = 2S.$$

S n'a évidemment pas de maximum; pour que cette surface soit minimum, il faut que la dérivée par rapport à chacune des variables indépendantes α et β, dont γ est fonction en vertu de l'équation (1), soit nulle.

Il vient, en remarquant que $\gamma'_\alpha = -\frac{a}{c}$, $\gamma'_\beta = -\frac{b}{c}$,

$$\frac{\alpha}{\sqrt{h^2+\alpha^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{h^2+\beta^2}} = \frac{\gamma}{\sqrt{h^2+\gamma^2}},$$

ce qui exige que l'on ait $\alpha = \beta = \gamma$.

Corollaire. — De tous les tétraèdres de même volume celui dont la surface est minimum est tel que chaque hauteur tombe au centre du cercle inscrit dans la face opposée, d'où résulte l'égalité des angles dièdres et, par suite, celle des angles trièdres : c'est donc le tétraèdre régulier.

V étant le volume d'un tétraèdre, S sa surface, r le rayon de la sphère inscrite, on a $3V = rS$; donc, le volume restant constant, le rayon de la sphère inscrite sera maximum quand la surface sera minimum, et par conséquent :

Le rapport du volume d'un tétraèdre à celui de la sphère inscrite est minimum quand le tétraèdre est régulier.

En rapprochant ce théorème du corollaire du lemme I, on en conclut que :

Le minimum du rapport du volume de la sphère circon-

scrite à un tétraèdre au volume de la sphère inscrite, ou le rapport de leurs rayons, est minimum quand le tétraèdre est régulier. Ce dernier rapport est alors égal à 3.

Question 22.

Les polynomes $V_1, V_2, \ldots, V_m$ *de Sturm s'expriment en fonction des racines* $a, b, c, \ldots, h$ *de* $V = 0$ *d'après la règle suivante :*

La dérivée V_1 *est la somme des produits* $m-1$ *à* $m-1$ *des facteurs* $(x-a), (x-b), \ldots$

$$V_1 = \Sigma(x-b)(x-c)\ldots(x-h).$$

Pour obtenir V_2, *on multipliera chacun des produits* $m-2$ *à* $m-2$ *des facteurs simples par le carré de la différence des racines qui n'entrent pas dans le produit considéré; la somme de ces derniers produits multipliée elle-même par un facteur positif indépendant de* x *donnera* V_2, *c'est-à-dire que*

$$V_2 = \alpha\Sigma(a-b)^2(x-c)(x-d)\ldots(x-h), \qquad \alpha > 0.$$

On a de même

$$V_3 = \beta\Sigma(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2(x-d)\ldots(x-h) \qquad \beta > 0,$$

$$V_4 = \gamma\Sigma(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2 \times (b-d)^2(c-d)^2(x-e)\ldots(x-h) \qquad \gamma > 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots,$$

$$V_m = \lambda\Sigma(a-b)^2(a-c)^2\ldots(a-h)^2\ldots(g-h)^2 \qquad \lambda > 0.$$

(SYLVESTER.)

SOLUTION

Par M. MORET-BLANC.

V et V_1 sont des fonctions symétriques des racines et des facteurs simples qui leur correspondent, qui s'annulent pour la valeur d'une racine donnée à x, chaque fois que cette racine est égale à une autre; il doit en être de même de toutes les fonctions suivantes, en vertu de la relation qui lie trois fonctions consécutives.

Or V_2 est un polynome de degré $m-2$, où les racines et les facteurs simples $(x-a), \ldots$ doivent entrer symétriquement et qui doit s'annuler lorsque deux quelconques des racines de l'équation sont égales et que l'on donne à x la valeur de l'une de ces racines; il doit donc être la somme des produits $m-2$ à $m-2$ des facteurs simples multipliés chacun par une fonction symétrique des deux racines dont les facteurs simples correspondants n'y entrent pas et qui s'annule lorsque ces racines sont égales : c'est donc le carré de leur différence (la simple différence ne serait pas symétrique). La somme de ces produits peut d'ailleurs être multipliée par un facteur constant et indépendant des racines. On voit même, en faisant la division, que ce facteur est égal à 1, si, pour éviter les coefficients fractionnaires, on a multiplié V par m^2.

V_3, de degré $m-3$, renferme tous les produits $m-3$ à $m-3$ des facteurs simples multipliés chacun par une fonction symétrique des racines dont les facteurs simples n'y entrent pas et qui doit être nulle lorsque deux quelconques de ces racines sont égales : c'est donc le produit des carrés de leurs différences deux à deux, la somme de ces produits étant multipliée par un facteur constant β, indépendant des racines.

On trouve de même la forme des autres fonctions.

Enfin, V_m est un nombre indépendant de x, fonction symétrique des racines, qui doit être nul lorsque deux quelconques des racines sont égales : c'est donc à un facteur indépendant près le produit des carrés des différences de l'équation $V=0$.

Les facteurs constants α, β, ... ne dépendent pas de la nature des racines: or, lorsque toutes les racines sont réelles, la suite des fonctions doit être complète, et les coefficients de leurs premiers termes ne doivent présenter que des permanences; ils sont donc alors tous positifs, ce qui exige que les facteurs α, β, ..., λ soient tous plus grands que zéro.

Question 51.

Soit un carré divisé par des lignes horizontales et verticales en n^2 petits carrés ayant chacun deux unités pour côté. Prenons deux côtés adjacents du grand carré pour axes coordonnés. Les coordonnées du centre d'un petit carré sont exprimées par des nombres entiers impairs et les coordonnées des sommets par des nombres entiers pairs. Désignons par (h, v) le centre d'un petit carré ayant h pour abscisse horizontale et v pour ordonnée verticale. Faisant passer une droite par (h, v) et (h', v'), quels sont les carrés *que cette droite traversera, et quels sont les centres et les sommets des carrés situés sur cette droite ? Étant données les équations de deux droites passant chacune par deux centres, quelles relations doivent exister entre les coordonnées des quatre centres : 1° pour que les deux droites soient parallèles; 2° pour qu'elles se coupent à angle droit; 3° pour que le point d'intersection soit le sommet d'un cinquième carré ?*

SOLUTION

par M. Moret-Blanc.

L'équation de la droite passant par (h, v) et (h', v') est

$$(1) \qquad (v'-v)(x-h) = (h'-h)(y-v).$$

$v'-v$ et $h'-h$ sont divisibles par 2; ils peuvent avoir d'autres facteurs communs : soient V et H les quotients de ces nombres divisés par leur plus grand commun diviseur; l'équation se réduit à

$$(1) \qquad \mathrm{V}(x-h) = \mathrm{H}(y-v).$$

Pour trouver les carrés traversés par la droite, on cherchera les points où elle coupe les horizontales : en donnant à y les valeurs $0, 2, 4, \ldots, 2n$, on déterminera les valeurs correspondantes de x. Si pour $y = 2b$, x est compris entre $2a$ et $2a+2$, la droite traverse les carrés dont les centres sont

$$(2a+1, 2b-1) \quad \text{et} \quad (2a+1, 2b+1).$$

Pour avoir les centres et les sommets situés sur la droite, on cherchera les solutions entières de l'équation (1). Elle est vérifiée par $x = h$, $y = v$; les autres solutions sont, comme on sait,

$$x = h + \mathrm{H}t, \qquad y = v + \mathrm{V}t.$$

On donnera à t les valeurs entières positives et négatives pour lesquelles x et y sont positifs et moindres que $2n+1$. Les valeurs impaires des x et y donneront les centres et les couples de valeurs paires, les sommets.

1° Soit

$$(2) \qquad (v'_1 - v_1)(x - h_1) = (h'_1 - h_1)(y - v_1)$$

l'équation d'une autre droite passant par les centres (h_1, v_1) et (h'_1, v'_1). La condition pour que les deux droites soient parallèles est

$$\frac{v'-v}{h'-h}=\frac{v'_1-v_1}{h'_1-h_1}$$

ou

$$(v'-v)(h'_1-h_1)=(h'-h)(v'_1-v_1).$$

Si le centre (h_1, v_1) est seul donné, on déterminera (h'_1, v'_1) en cherchant, comme pour l'équation (1), les solutions entières impaires de cette équation

$$h'_1=h_1+\mathrm{H}t, \qquad v'_1=v_1+\mathrm{V}t;$$

il suffira d'une solution en nombres entiers impairs.

2° La condition pour que les droites (1) et (2) soient rectangulaires est

$$(v'-v)(v'_1-v_1)+(h'-h)(h'_1-h_1)=0,$$

ou

$$\mathrm{V}(v'_1-v_1)+\mathrm{H}(h'_1-h_1)=0.$$

Si (h_1, v_1) est seul donné,

$$h'_1=h_1+\mathrm{V}t, \qquad v'_1=v_1-\mathrm{H} \ .$$

3° Des équations (1) et (2), on tire

$$x=\frac{(h'_1-h_1)(hv'-vh')-(h'-h)(h_1v'_1-v_1h'_1)}{(v'-v)(h'_1-h_1)-(h'-h)(v'_1-v_1)},$$

$$y=\frac{(v'_1-v)(hv'-vh')-(v'-v)(h_1v'_1-v_1h'_1)}{(v'-v)(h'_1-h_1)-(h'-h)(v'_1-v_1)}.$$

Pour que le point d'intersection des deux droites soit le sommet d'un cinquième carré, il faut que chacune de ces expressions soit un nombre entier pair.

Pour que ce soit le centre d'un cinquième carré, chacune devra être un nombre entier impair.

Question 54.

Trouver l'équation d'une surface algébrique sur laquelle on ne puisse tracer qu'une seule et unique circonférence.

SOLUTION

par M. MORET-BLANC.

On trouvera des surfaces susceptibles de remplir cette condition dans les deux équations générales suivantes :

$$a^n(x^2+y^2)+z^n x^2 = a^n b^2,$$
$$a^n(x^2+y^2)+z^n xy = a^n b^2.$$

En faisant $z=0$, on a le cercle

$$x^2+y^2=b^2.$$

Les cas les plus simples sont ceux où $n=1$; on a deux surfaces du troisième ordre

$$(1)\quad a(x^2+y^2)+zx^2=ab^2, \qquad a(x^2+y^2)+zxy=ab^2.$$

Pour démontrer qu'elles ne peuvent être coupées suivant un cercle que par le plan des xy, on y substituera pour z une expression de la forme $mx+ny+z$; le résultat de la substitution donnera l'équation de la projection horizontale [1] faite dans la surface par le plan

$$z=mx+ny+r.$$

On aura pour la première équation

$$(2)\qquad ay^2+nx^2y+mx^3+(r+a)x^2-ab^2=0.$$

Pour que cette équation donne celle d'une courbe du second degré, il faut qu'elle représente le système d'une droite et d'une conique, ou qu'elle se réduise au second degré par l'évanouissement des coefficients des termes du troisième degré.

Pour reconnaître le premier cas, représentons par $y=px+q$ l'équation de la droite. Divisant le premier membre par $y-px-q$, on a pour quotient

$$ay+nx^2+apx+aq,$$

et pour reste

$$(m+np)x^3+[a(1+p^2)+nq+r]x^2+2apq\,x+a(q^2-b^2).$$

---

[1] Je suppose le plan des xy horizontal.

Cette expression devant s'évanouir quel que soit x, on a

$$m+np=0,\quad a(1+p^2)+nq+r=0,\quad pq=0,\quad q^2-b^2=0,$$

d'où

$$q=\pm b,\quad p=0,\quad m=0,\quad r=-a\mp nb.$$

On voit que le plan $z=ny-a\mp nb$ coupera la surface suivant une droite dont les équations sont

$$z=ny-a\mp b,\qquad y=\pm b,$$

et une courbe du second ordre dont les équations sont celles du plan, et

$$nx^2+a(y\pm b)=0.$$

Cette équation est celle d'une parabole qui ne peut être la projection d'un cercle.

Pour que l'équation (2) représente une courbe du second degré, il faut qu'on ait

$$n=0,\qquad m=0;$$

l'équation de la projection horizontale se réduit à

$$ay^2+(r+a)x^2=ab^2,$$

et, comme le plan sécant $z=r$ est parallèle au plan de projection, il faut, pour que la courbe soit un cercle, que l'on ait

$$r=0.$$

Le plan des xy est donc le seul qui coupe la surface suivant un cercle.

On verrait qu'il en est de même pour la seconde équation.

Question 59.

Entre tous les prismes de même base et de même hauteur, c'est le prisme droit qui a la plus petite aire.

SOLUTION

Par M. Moret-Blanc.

Car c'est celui dont les parallélogrammes qui forment la surface latérale ont leur hauteur minimum, en conservant la même base.

Questions 473 et 482.

1re SOLUTION

Par M. H. Brocard.

473. *Quatre génératrices d'un hyperboloïde étant données, construire le tétraèdre qui ait ces quatre droites pour hauteurs.*

Un tétraèdre peut se projeter verticalement suivant un trapèze. Il suffit pour cela de prendre pour plan vertical de projection un plan parallèle à une arête C′D′ (1) du tétraèdre et d'amener l'arête opposée A′B′, par une rotation autour de C′D′, à se projeter suivant une parallèle à C′D′. Si maintenant l'on prend pour plan horizontal de projection un plan parallèle aux deux droites CD, AB, la projection horizontale du tétraèdre sur un quadrilatère dont la diagonale CD sera parallèle à la ligne de terre.

Or, dans cette situation, les hauteurs du tétraèdre se projettent horizontalement suivant les perpendiculaires menées par les sommets A, B, C, D du quadrilatère sur les diagonales, et, verticalement, suivant deux perpendiculaires à la ligne de terre menées par A′ et B′, et suivant deux autres droites issues des points C′ et D′.

On est donc amené à considérer la figure inverse pour trouver la solution de la question proposée. C'est ce que nous allons développer davantage.

Supposons que l'on ait choisi pour plan horizontal de projection le plan perpendiculaire à chacun des plans parallèles à deux couples de droites opposées. Cela est toujours possible; et, de la sorte, les quatre droites données A, B, C, D se projettent suivant les côtés $a(mn)$, $b(np)$, $c(pq)$, $d(qm)$ d'un parallélogramme $mnpq$. Prenons ensuite pour plan vertical de projection un plan perpendiculaire à l'une des directions des côtés du parallélogramme. Deux des droites se projetteront suivant deux parallèles $m'n'$, $q'p'$, prolongements de ces côtés, les deux autres suivant des lignes c', d', qui se rencontreront généralement en un point i'. Le tétraèdre cherché se projettera verticalement suivant un trapèze $a'b'c'd'$, et horizontalement

---

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

suivant un quadrilatère *abcd*. Or, si l'on déplace $c'd'$ parallèlement à elle-même, la projection *cd* pivote autour d'un point fixe, facile par conséquent à déterminer à l'aide d'une position quelconque de la droite *cd*, $c'd'$. La projection horizontale i de ce point est sur la perpendiculaire $i'i$ à la ligne de terre. Cette propriété résulte de ce que la figure représente la projection d'un paraboloïde hyperbolique sur un plan directeur. Cette projection forme, comme l'on sait, un système rayonnant. On mènera donc par le point i une droite *cid* limitée entre les deux parallèles c, d; elle donnera en projection verticale une droite $c'd'$ parallèle à la ligne de terre. Ce sera la longueur de l'arête CD du tétraèdre cherché.

L'arête opposée AB se projettera verticalement suivant la distance des droites parallèles a, b et horizontalement, en vraie grandeur, suivant le segment perpendiculaire à la direction c', d' intercepté entre les droites a et b.

Pour en trouver la position, il suffira de déterminer le point l où la projection horizontale de AB rencontrera *cd*. Or, pour cela, on prendra le plan vertical passant par CD pour plan vertical de projection, et l'on mènera par les points C, D un plan perpendiculaire à la droite opposée dd', cc'. L'intersection des traces verticales de ces plans est la projection l' du point L. Par conséquent, par le point l' on mènera une horizontale, et par le point l, maintenant déterminé, une perpendiculaire à la direction c, d. On aura ainsi les projections a, a', b, b' des deux autres sommets du tétraèdre.

Cette construction simple conduit à diverses remarques intéressantes.

1° Le centre O du parallélogramme *mnpq* est la projection horizontale du centre de l'hyperboloïde passant par les quatre hauteurs du tétraèdre ou les quatre droites données.

2° La projection horizontale G du centre de gravité du tétraèdre s'obtiendra en prenant le milieu G de la droite qui joint les milieux des diagonales *ab*, *cd*.

Le centre S de la sphère circonscrite au tétraèdre se projettera horizontalement à l'intersection des perpendiculaires menées à chacune des diagonales en leur milieu.

3° On pourra donc établir, sur ces données, le théorème suivant :

482. *Le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre, le* *centre de l'hyperboloïde passant par les quatre hauteurs, le centre de gravité du tétraèdre sont trois points en ligne droite.* (JOACHIMSTHAL.)

Cette proposition fait l'objet de la *Question* 482 (*Voir* 1re série, t. XVIII, p. 266) et peut s'établir, comme l'on voit, à l'aide des propriétés des quadrilatères, projections du tétraèdre sur un plan parallèle à deux arêtes opposées. Ainsi l'on peut montrer que :

Dans un quadrilatère, le milieu G *de la droite qui joint les milieux des diagonales, le point* S *de rencontre des perpendiculaires à ces diagonales en leurs milieux, et le centre* O *du parallélogramme obtenu en menant par les sommets des perpendiculaires à ces diagonales, sont en ligne droite.*

Il suffit de calculer les distances des points O, G, S, à la diagonale CD prise pour axe des x. En effet, si l'on désigne par a_1, b_1, a_2, b_2 les coordonnées de A et B (D étant l'origine), et la longueur DC par a, on a

$$(y)\mathrm{S} = \frac{b_2 - b_1}{2} - \frac{a_2 - a_1}{2(b_2 + b_1)}(a - a_1 - a_2),$$

$$(y)\mathrm{G} = \frac{b_2 - b_1}{4},$$

$$(y)\mathrm{O} = \frac{(a_2 - a_1)(a - a_1 - a_2)}{2(b_2 + b_1)},$$

et l'on voit que

$$(y)\mathrm{O} + (y)\mathrm{S} = 2(y)\mathrm{G}.$$

D'ailleurs, par construction,

$$(x)\mathrm{O} + (x)\mathrm{S} = 2(x)\mathrm{G}.$$

Ainsi les trois points O, G, S sont en ligne droite et OG = GS. On établirait les relations analogues pour les distances des points O′, G′, S′ au plan horizontal.

4° Revenons à la question proposée.

Avec les quatre droites données A, B, C, D, on peut former six couples de deux droites qui déterminent les directions des plans tels que le tétraèdre se projette, suivant un parallélogramme, sur le plan perpendiculaire au plan ainsi défini. Mais un seul de ces plans suffit, et la construction, qui a déjà donné deux arêtes opposées en vraie grandeur, donnera de même les quatre autres.

5° Si, sans changer le plan horizontal, on fait tourner le plan vertical de 90°, la projection verticale du tétraèdre devient un triangle. Cette disposition n'apporte pas de modification essentielle aux conclusions qui précèdent.

2ᵉ SOLUTION

Par M. Moret-Blanc.

473. On sait (*Question* 472) que les quatre hauteurs d'un tétraèdre, quand elles ne se coupent pas, sont quatre génératrices du même système d'un hyperboloïde à une nappe. Les perpendiculaires aux plans des faces, élevées par le point de concours des hauteurs du triangle, rencontrant trois de ces génératrices et étant parallèles à la quatrième, sont quatre génératrices du second système.

La plus courte distance de deux hauteurs d'un tétraèdre est parallèle aux plans des deux faces auxquelles elles sont respectivement perpendiculaires et, par suite, parallèle à l'intersection de ces deux plans, qui est l'arête rencontrant les deux autres hauteurs.

Cela posé, pour construire le tétraèdre dont quatre génératrices d'un hyperboloïde sont les hauteurs, on mène la plus courte distance de deux de ces génératrices, et la parallèle à cette plus courte distance s'appuyant sur les deux autres génératrices et limitée par elles; puis la plus courte distance de celles-ci, et sa parallèle s'appuyant sur les deux premières et limitée par elles. Ce sont des problèmes élémentaires de Géométrie descriptive. On obtient ainsi les quatre sommets du tétraèdre.

482. Soient ABC une des faces du trétraèdre ABCD, O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, G le point de concours des médianes, H celui des hauteurs du triangle, P le pied de la hauteur du tétraèdre abaissée du sommet D sur ABC. On sait que les points O, G, H sont en ligne droite et que $OG = \frac{1}{3}OH$ ou $HG = 2OG$. Tirons les droites PH et PG. Les perpendiculaires au plan ABC, menées par H et P sont deux génératrices parallèles de l'hyperboloïde. En effet, l'une rencontre les trois

hauteurs issues des sommets A, B, C, qui se projettent suivant les trois hauteurs du triangle ABC, car les plans projetants sont respectivement perpendiculaires aux côtés BC, CA, AB, et l'autre est la quatrième hauteur. La parallèle à ces deux droites, située dans leur plan à égale distance de chacune d'elles, est une génératrice du cône asymptote; elle contient le centre de l'hyperboloïde qui se projette au point O_1, milieu de HP. Le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre se projette en O, et le centre de gravité du tétraèdre au point G_1, au quart de GP. Il faut démontrer que les trois points O, G_1, O_1 sont en ligne droite.

Soit Q le milieu de GP; O_1Q est parallèle à HG et égale à sa moitié; elle est donc égale et parallèle à OG; la figure OQO_1G est un parallélogramme; les diagonales OO_1 et GQ se coupent en G_1, milieu de GQ et de OO_1. Les trois points de l'énoncé se projetant en ligne droite sur une face quelconque du tétraèdre sont en ligne droite dans l'espace. On voit de plus que le centre de gravité du tétraèdre est au milieu de la droite qui joint le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre au centre de l'hyperboloïde.

Question 132.

Par cinq points donnés dans l'espace, faire passer un cylindre droit à base circulaire.

SOLUTION

Par M. H. Brocard.

Par trois des points donnés, A, B, C, faisons passer une ellipse quelconque (S). Les cônes ayant pour base cette ellipse et pour sommets les deux autres points donnés D, E se coupent généralement suivant une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à deux directions (P), (P′) qu'il est possible de déterminer d'après les données du problème. Il est évident que l'on obtiendra un cylindre du second degré passant par les cinq points donnés, en prenant pour directrice la conique (S) et pour directions des génératrices des parallèles aux droites (P), (P′).

Cela posé, considérons une section de ce cylindre faite par un plan perpendiculaire aux génératrices et faisons passer par le grand axe de la section elliptique un plan quelconque (M). Il existe deux positions du plan (M) symétriques par rapport au précédent, et qui donnent les sections circulaires du cylindre. Les données du problème permettent encore de trouver, pour chaque ellipse (S) et chaque direction (P), l'orientation du plan (M). On cherchera donc pour quelle forme de l'ellipse (S) le plan (M) est perpendiculaire à l'une des directions (P) ou (P').

Il y a généralement, pour chaque hyperbole, deux solutions, et, comme il existe dix triangles ABC, ... servant de point de départ, on voit qu'il y a, en général, vingt cylindres qui satisfont aux conditions du problème.

Question 86.

Inscrire dans un triangle donné une ellipse dont la surface soit égale à celle d'un cercle donné.

En discutant cette question, on déterminera comme cas particulier l'ellipse inscrite dont la surface est maximum.

SOLUTION

Par M. Moret-Blanc.

Soient ABC le triangle et r le rayon du cercle donné. Prenons pour axes de coordonnées les côtés CA et CB ; posons $CB = a$, $CA = b$, angle $ACB = \omega$, et désignons par α, β les coordonnées du centre de l'ellipse; son équation sera

$$A(x-\alpha)^2 + 2B(x-\alpha)(y-\beta) + C(x-\alpha)^2 - 1 = 0$$

ou

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 2(A\alpha + B\beta)x - 2(B\alpha + C\beta)y + A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 - 1 = 0.$$

En exprimant que les côtés CB et CA sont tangents à l'ellipse, on a les conditions

$$(B^2 - AC)\beta^2 + A + 0, \qquad (B^2 - AC)\alpha^2 + C = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{A}{\beta^2} = \frac{C}{\alpha^2} = AC - B^2 = \frac{\sin^2\omega}{r^4},$$

car l'aire de l'ellipse est $\dfrac{\pi \sin\omega}{\sqrt{AC - B^2}} = \pi r^2$.

Les distances des points de contact au sommet C sont respectivement

$$\frac{A\alpha + B\beta}{A} \quad \text{et} \quad \frac{B\alpha + C\beta}{C}.$$

On a

$$A = \frac{\beta^2 \sin^2\omega}{r^4}, \qquad C = \frac{\alpha^2 \sin^2\omega}{r^4},$$

$$B = \pm \sin^2\omega \frac{\sqrt{\alpha^2\beta^2 - \dfrac{r^4}{\sin^2\omega}}}{r^4}.$$

Il reste à exprimer que l'ellipse est tangente au côté AB

$$bx + ay - ab = 0.$$

On tire de là

$$y = \frac{ab - bx}{a}.$$

Portant cette valeur dans l'équation de l'ellipse et exprimant que l'équation en x a ses racines égales, il vient, réductions faites,

$$(AC - B^2)(b\alpha + a\beta - ab)^2 = Aa^2 - 2Bab + Cb^2,$$

et, en remplaçant A, B, C par leurs valeurs, et supprimant le facteur commun $\dfrac{\sin^2\omega}{r^4}$,

$$(b\alpha + a\beta - ab)^2 - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 = \pm 2ab\sqrt{\alpha^2\beta^2 - \frac{r^4}{\sin^2\omega}}.$$

Réduisant, divisant par $2ab$ et élevant au carré, il vient, après quelques réductions,

$$\left(b\alpha + a\beta - \frac{ab}{2}\right)\left(2\alpha\beta - b\alpha - a\beta + \frac{ab}{2}\right) = \frac{r^4}{\sin^2\omega}.$$

On n'a qu'une relation entre α et β; le problème admet donc une infinité de solutions. Donnant à α une valeur arbitraire comprise entre o et a, on trouvera pour β deux valeurs correspondantes; α et β étant connus, on connaîtra A, B, C, et l'on déterminera les points de contact sur CA et CB; puis on joindra ces points par des droites, aux sommets opposés; la droite menée par le sommet C et le point d'intersection de ces deux droites, passe, comme on sait, par le point de contact avec AB. Connaissant le centre, trois tangentes et leurs points de contact, on pourra construire l'ellipse.

Cherchons l'ellipse d'aire maximum.

Égalant à zéro les dérivées du premier membre de l'équation précédente par rapport à α et à β, on a

$$(2b\alpha + a\beta - ab)(2\beta - b) = 0,$$
$$(b\alpha + 2a\beta - ab)(2\alpha - a) = 0.$$

Les solutions $2\beta - b = 0$ et $2\alpha - a = 0$ donnent $r = 0$ et correspondent à un minimum : l'ellipse est alors une ligne droite.

Les équations

$$2b\alpha + a\beta - ab = 0$$
$$b\alpha + 2a\beta - ab = 0$$

donnent

$$\alpha = \frac{a}{3}, \qquad \beta = \frac{b}{3}.$$

On a ensuite

$$\frac{r^4}{\sin^2\omega} = \frac{ab}{6}\,\frac{ab}{18} = \frac{a^2b^2}{108}, \qquad \frac{r^2}{\sin\omega} = \frac{ab}{6\sqrt{3}}.$$

$$\text{L'aire du cercle} = \frac{\pi ab \sin\omega}{6\sqrt{3}} = \text{aire du triangle} \times \frac{1}{3\sqrt{3}},$$

$$A = \frac{b^2}{9} \times \frac{108}{a^2b^2} = \frac{12}{a^2}, \qquad C = \frac{12}{b^2}, \qquad B = \frac{6}{ab}.$$

Points de contact : pour $y = 0$,

$$x = \frac{A\alpha + B\beta}{A} = \frac{a}{2};$$

pour $x = 0$,

$$y = \frac{B\alpha + C\beta}{C} = \frac{b}{2},$$

pour le côté AB,

$$x = \frac{a}{2}, \qquad y = \frac{b}{2}.$$

Les points de contact sont les milieux des côtés du triangle.

Question 157.

Lorsque trois forces P, Q, R, *non situées deux à deux dans le même plan, se réduisent à une seule force, la somme de deux tétraèdres construits sur* P, Q, R *prises deux à deux est équivalente au troisième.* (CATALAN.)

SOLUTION

Par M. MORET-BLANC.

LEMME. — *Soient une droite limitée* AB *et une force* PQ *qui ne la rencontre pas, le moment de* PQ *par rapport à l'axe* AB *est égal à six fois le volume du tétraèdre construit sur* AB *et* PQ, *ou* ABPQ, *divisé par* AB.

Soient CD la plus courte distance des droites AB, PQ et P'Q' la projection de PQ sur une perpendiculaire au plan ADB.

AB.P'Q'.CD représente six fois le volume du tétraèdre ABPQ, P'Q'.CD est le moment de PQ par rapport à AB, ce qui démontre le lemme.

Nota. — On convient de regarder le moment de PQ par rapport à AB comme positif ou négatif suivant que, pour un observateur placé sur AB, les pieds en A et la tête en B, et regardant PQ, la force tend à faire tourner le corps de gauche à droite ou de droite à gauche, c'est-à-dire dans le sens des aiguilles d'une montre ou en sens contraire.

Si l'on regarde PQ comme un axe fixe et AP comme une force, il est facile de voir que le signe du moment reste le même.

Nous regarderons un tétraèdre comme ayant le signe du moment qu'il représente à un facteur près.

Cela posé, si les trois forces P, Q, R non situées deux à deux dans le même plan se font équilibre ou se réduisent à une seule force, on sait que la somme algébrique de leurs moments par rapport à un axe quelconque est égale à zéro.

Prenant pour axe successivement chacune des trois forces, on a

$$(P, Q)+(P, R)=0,$$
$$(P, Q)+(Q, R)=0,$$
$$(P, R)+(Q, R)=0.$$

Ajoutant et divisant par 2

$$(P, Q)+(P, R)+(Q, R)=0,$$

(P, Q) désigne le volume du tétraèdre construit sur P et Q, avec sa valeur algébrique.

La somme algébrique des trois tétraèdres construits sur les forces prises deux à deux est égale à zéro; par conséquent, en valeur absolue, la somme de deux de ces tétraèdres est équivalente au troisième.

Question 174.

Une équation algébrique ayant toutes ses racines réelles, trouver le nombre précis de racines comprises entre deux limites données par le moyen du théorème de Descartes.

(JACOBI.)

SOLUTION

Par M. MORET-BLANC.

Soient a et b les deux limites, $a < b$; si l'on pose

$$y = \frac{x-a}{b-x}, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{by+a}{y+1},$$

la transformée en y aura toutes ses racines réelles, et autant de racines positives que la proposée a de racines comprises entre a et b : ce nombre est égal à celui des variations de la transformée en y.

Question 245.

Soit

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n;$$

supposons que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ puissent prendre respectivement $m_1, m_2, \ldots, m_n$ valeurs différentes, alors z aura au plus $m_1m_2\ldots m_n$ valeurs différentes, mais il peut en avoir moins. Dans quel cas?

SOLUTION

Par M. MORET-BLANC.

En combinant chacune des m_1 valeurs de x_1 avec chacune des m_2 valeurs de x_2, la somme des deux premiers termes prendra, au plus, $m_1 m_2$ valeurs, qui, combinées avec les m_3 valeurs de x_3, donneront pour la somme des trois premiers termes, au plus, $m_1 m_2 m_3$ valeurs différentes, et ainsi de suite. Le nombre des valeurs de z sera donc, au plus, $m_1 m_2 m_3 \ldots m_n$; mais il peut être moindre. Ceci arrivera lorsque la somme d'un certain nombre de termes conserve la même valeur pour plusieurs systèmes de valeurs de m.

Supposons, par exemple, que l'on ait $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, et que parmi les m_1 valeurs de x_1 soient 3 et 7, et parmi les valeurs de x_2, 5 et 2; la somme des deux premiers termes, $3x_1 + 4x_2$, prendra la même valeur de $2y$, pour $x = 3$, $y = 5$ et pour $x = 7$, $y = 2$.

Par ce seul fait, le nombre des valeurs de z serait diminué de $m_3 m_4 \ldots m_n$ unités.

Question 475.

Construire une conique connaissant trois tangentes et une directrice.

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Ce qui suit ne renferme pas la solution de la question proposée, mais diverses remarques qui s'y rattachent.

Ce problème, pris dans son ensemble, admet généralement quatre solutions.

En effet, considérons le triangle ABC (1) formé par les trois tangentes données. Figurons aussi la directrice D. Traçons les quatre circonférences inscrite et ex-inscrites au triangle ABC. Soient O, O_1, O_2, O_3 leurs centres respectifs. Par chacun des sommets A, B, C, menons une droite parallèle (Aa, Bb, Cc) et une autre perpendiculaire (Aa', Bb', Cc') à la directrice,

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

jusqu'à sa rencontre avec le côté opposé, prolongé s'il est nécessaire. Nous obtenons ainsi les points a, b, c, a', b', c'.

Cela posé, le problème reviendra évidemment à chercher l'intersection de la droite D avec le lieu des pieds des directrices des coniques inscrites ou ex-inscrites au triangle ABC, et dont l'axe focal est perpendiculaire à la droite D. Or, sans déterminer cette courbe, on peut se rendre compte de son tracé. Elle admet seize branches infinies, asymptotes aux huit droites parallèles et perpendiculaires à la droite D, menées par les points O, O_1, O_2, O_3. De plus, cette courbe passe par les neuf points A, B, C, a, b, c, a', b', c'. Ce lieu répond aussi aux coniques dont l'axe focal est parallèle à la droite D. Mais, parmi les premières, quatre seulement répondent à l'énoncé.

Nota. — Le point O est le point de rencontre des hauteurs du triangle $O_1O_2O_3$. Les pieds de ces hauteurs sont les sommets A, B, C du triangle donné. Il en résulte que les quatre points O, O_1, O_2, O_3 se trouvent sur une hyperbole équilatère, qui renferme aussi les milieux des segments Aa, Bb, Cc, Aa', Bb', Cc'. Ainsi, cette hyperbole passe par dix points déterminés du plan, ayant une corrélation bien définie. Les directions des asymptotes sont d'ailleurs la directrice et la perpendiculaire.

Nous avons pensé que les diverses indications qui précèdent faciliteront à nos lecteurs la solution définitive, analytique ou graphique, de cette question. Mais elle ne semble pas devoir conduire à un résultat simple.

Question 536.

Quel est le minimum de matière pour construire un vase cylindrique droit dont on donne : 1° l'épaisseur uniforme du fond; 2° l'épaisseur uniforme de la partie latérale; 3° la capacité; 4° l'aire de la paroi intérieure; 5° l'aire de la paroi extérieure; 6° enfin, une section faite parallèlement au fond et semblable à une figure plane donnée.

(BORDONI.)

SOLUTION

Par M. BROCARD.

Soient respectivement e, e', V, A et A' les cinq premières données. La section parallèle au fond peut être prise équivalente à un certain cercle, et l'on peut enfin supposer le vase de forme cylindrique circulaire. En désignant alors par x le rayon intérieur et par y la hauteur intérieure, la quantité u à rendre minima est la suivante :

$$u = \pi e x^2 + \pi y e'(2x - e') \tag{1}$$

sous les conditions successives

$$\pi y (x - e')^2 = V, \tag{2}$$

$$2\pi (x - e') y = A, \tag{3}$$

$$2\pi (y + e) x = A'. \tag{4}$$

Dans tout ce qui précède, on suppose la densité prise pour unité.

Si l'on élimine y entre l'équation (1) et chacune des trois autres, on a trois nouvelles expressions de u en fonction de x. En égalant $\frac{du}{dx}$ à zéro, on a trois équations d'où l'on tire les valeurs de x cherchées. Celles de y s'obtiendront, de même, en éliminant x et faisant $\frac{du}{dy}$ égal à zéro.

Dans tous les cas, les équations obtenues sont au moins du troisième degré, de sorte que leur discussion ne conduit à rien de simple.

Question 541.

Circonscrire à une ellipse le triangle équilatéral dont le côté soit : 1° un maximum; 2° un minimum.

SOLUTION

par M. H. Brocard.

Voici le procédé qui nous a paru le plus simple pour traiter ce problème :

1° Inscrire l'ellipse dans un angle de 60° dont on prend les bissectrices pour axes de coordonnées (Ox étant la bissectrice intérieure).

2° Mener les tangentes parallèles à l'axe des y. L'équation de ces droites étant de la forme $x = \delta$, il est évident que la valeur de δ est proportionnelle au côté ou à la surface du triangle équilatéral circonscrit, et qu'il n'y aura qu'à chercher les maxima et minima de δ.

Pour éviter de trop longs calculs, nous profiterons de certaines relations d'identités qui, dans le cas présent, conduisent à des expressions d'une grande simplicité.

L'équation de l'ellipse étant

$$(1)\qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

la courbe sera tangente aux droites

$$y = +\frac{x}{\sqrt{3}}, \qquad y = -\frac{x}{\sqrt{3}},$$

si l'on a les deux relations

$$(2)\qquad DE - 2BF = 0,$$

$$(3)\qquad D^2 - 4AF + 3(E^2 - 4CF) = 0.$$

D'autre part, aux points (x, y) de la courbe où la tangente est parallèle à Oy, on a

$$(4)\qquad 2Ay + Bx + D = 0.$$

Éliminant y entre les équations (1) et (4), il vient

$$(5)\qquad (B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF = 0,$$

équation qui donne pour x les valeurs de δ.

Il reste à exprimer que l'ellipse est de grandeur constante. Pour cela, il faut identifier l'équation (1) avec la suivante

$$b^2[(x-\alpha)\cos\varphi + (y-\beta)\sin\varphi]^2$$
$$+a^2[(y-\beta)\cos\varphi - (x-\alpha)\sin\varphi]^2 - a^2b^2 = 0,$$

qui, développée, devient

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &(b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi)y^2 - 2c^2xy\sin\varphi\cos\varphi \\ &+(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi)y^2 \\ &-2(b^2\beta\sin^2\varphi + a^2\beta\cos^2\varphi - c^2\alpha\sin\varphi\cos\varphi)y \\ &-2(b^2\alpha\cos^2\varphi + a^2\alpha\sin^2\varphi - c^2\beta\sin\varphi\cos\varphi)x \\ &+b^2(\alpha^2\cos^2\varphi + \beta^2\sin^2\varphi) \\ &+a^2(\beta^2\cos^2\varphi + \alpha^2\sin^2\varphi) - 2\alpha\beta c^2\sin\varphi\cos\varphi - a^2b^2 = 0, \end{aligned}\right.$$

et peut s'écrire encore

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &A'y^2 + B'xy + C'x^2 + y(-2A'\beta - B'\alpha) \\ &\quad + x(-2C'\alpha - B'\beta) + A'\beta^2 + B'\alpha\beta + C'\alpha^2 - a^2b^2 = 0, \end{aligned}\right.$$

où l'on a mis α et β en évidence.

Dans ces hypothèses, les binomes $B^2 - 4AC$, $BD - 2AE$, $D^2 - 4AF$, $E^2 - 4CF$ deviennent respectivement $-4a^2b^2$, $4a^2b^2\alpha$, $4a^2b^2(A' - \alpha^2)$ et $4a^2b^2(C' - \beta^2)$.

Les équations de condition (2) et (3) deviennent, par conséquent,

$$\alpha\beta = c^2 \sin\varphi \cos\varphi,$$
$$\alpha^2 + 3\beta^2 = 3(a^2 + b^2) - 2(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi).$$

L'élimination de φ conduit à l'équation

$$4\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 + 3\beta^2 - a^2 - 3b^2)(3a^2 + b^2 - \alpha^2 - 3\beta^2),$$

qui représente le lieu du centre de l'ellipse mobile.

La courbe se compose de quatre boucles fermées, symétriques par rapport aux deux axes de coordonnées, et situées dans l'angle de 60° et les angles opposés et supplémentaires.

Elle coupe l'axe des y aux points

$$\beta^2 = \frac{a^2 + 3b^2}{3}, \qquad \beta^2 = \frac{3a^2 + b^2}{3},$$

et l'axe des x aux points

$$\alpha^2 = a^2 + 3b^2, \qquad \alpha^2 = 3a^2 + b^2.$$

Cette question incidente trouve sa solution naturelle dans le courant du calcul et nous servira dans la suite.

L'équation (5) devient, à son tour,

$$(8) \qquad (x - \alpha)^2 - A' = 0,$$

d'où l'on conclut

$$x = \delta = \alpha \pm \sqrt{b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi}.$$

Il est clair que l'on retrouvera cette même valeur de δ en exprimant que la droite $x = \delta$ est tangente à la conique (7). On retombe ainsi sur l'équation (8). C'est ce que l'on peut aisément vérifier.

L'expression de δ renferme deux termes, fonctions de φ. Mais, sans exprimer α en fonction de φ, on peut remarquer que, pour $\varphi = 0$ et $\varphi = 90°$, α prend les valeurs maxima et minima $\sqrt{a^2 + 3b^2}$, $\sqrt{3a^2 + b^2}$, et que, pour ces mêmes valeurs de φ, la quantité placée sous le radical est maxima ou minima. On peut ainsi conclure que les quatre expressions suivantes

$$\delta_1 = \sqrt{a^2 + 3b^2} + a, \qquad \delta_2 = \sqrt{a^2 + 3b^2} - a,$$
$$\delta_3 = \sqrt{3a^2 + b^2} + b, \qquad \delta_4 = \sqrt{3a^2 + b^2} - b$$

représentent des valeurs maxima ou minima de δ.

δ_2 et δ_4 correspondent au triangle équilatéral circonscrit qui laisse la courbe à son extérieur; δ_2 est un minimum, δ_4 un maximum.

δ_1 et δ_3 correspondent au triangle équilatéral circonscrit qui laisse la courbe à son intérieur; l'une des valeurs de δ est un minimum et l'autre un maximum. Pour les distinguer, il faut chercher le signe de la quantité

$$\sqrt{a^2 + 3b^2} + a - \sqrt{3a^2 + b^2} - b,$$

et, pour faciliter le calcul, on prendra $b = 1$ et l'on fera $a = mb$, m étant généralement > 1. L'expression considérée devient alors

$$\sqrt{3 + m^2} + m - \sqrt{1 + 3m^2} - 1.$$

Sous cette forme, il est facile de s'assurer que cette quantité est positive, et qu'elle a son minimum, zéro, pour $m = 1$.

Ainsi δ_1 est un maximum et δ_3 un minimum.

Il existe donc une série de quatre triangles équilatéraux maxima et minima. Dans tous ces triangles, l'une des hauteurs est dirigée suivant le grand axe, ou suivant le petit axe de la courbe.

Les autres maxima et minima sont donnés par une équation assez compliquée, obtenue en remplaçant dans l'expression de x, α par sa valeur en fonction de φ, puis égalant à zéro la dérivée prise par rapport à φ. Ces valeurs correspondent à l'ellipse tangente aux deux côtés de l'angle de 120°.

Le calcul n'offrant pas d'autre intérêt, nous pensons qu'il n'y a pas lieu de le poursuivre davantage. Il convient toutefois d'attirer l'attention sur une question incidente.

Considérons l'expression

$$\sqrt{a^2 + 3b^2} + a - \sqrt{3a^2 + b^2} - b,$$

et remplaçons a par 1, et b par $\sqrt{1 - k^2}$, k étant l'excentricité. Nous aurons ainsi

$$\sqrt{4 - 3k^2} + 1 - \sqrt{4 - k^2} - \sqrt{1 - k^2},$$

fonction qui, d'après ce que nous avons vu, est positive et très voisine de zéro. Si l'on donne à k une valeur quelconque $\frac{1}{n}$, n désignant un nombre quelconque positif, la fonction deviendra

$$\sqrt{4n^2-3}+n-\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{n^2-1},$$

à un facteur près, et différera toujours peu de zéro. Les valeurs extrêmes correspondent à $k=0$, ce qui indique que tous les triangles maxima sont égaux; alors on a le minimum, qui est zéro; enfin, pour $k=1$, ellipse infiniment aplatie, ou, en d'autres termes, segment de droite égal à la hauteur du triangle ayant 1 pour côté. On trouve ainsi, pour le maximum, la valeur 0,1160254... Il n'y a identité que pour la valeur particulière de $k=0$, mais l'accord existe jusqu'aux millièmes pour les premières valeurs entières de n. Exemples :

$$\begin{array}{ll}
n=1\ldots\ldots & 1+1=2+0,\\
n=2\ldots\ldots & \sqrt{13}+2=\sqrt{15}+\sqrt{3}\ +\varepsilon,\\
n=3\ldots\ldots & \sqrt{33}+3=\sqrt{35}+\sqrt{8}\ +\varepsilon',\\
n=4\ldots\ldots & \sqrt{61}+4=\sqrt{63}+\sqrt{15}+\varepsilon'',\\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

et ainsi de suite; ε, ε', ... désignent des nombres inférieurs à 0,001.

Cette propriété pourrait servir dans le calcul des approximations.

Question 936.

En multipliant $(x^2-1)^n$ *par la série*

$$\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\ldots,$$

la partie entière du produit sera le polynome

$$F(x)=x^{2n-1}-\left(n-\frac{1}{3}\right)x^{2n-3}+\left[\frac{n(n-2)}{1.2}-\frac{n}{3}+\frac{1}{5}\right]x^{2n-5}-\ldots$$

à l'égard duquel on propose de démontrer :

1° *Que l'équation* $F(x)=0$ *a toutes ses racines imaginaires sauf* $x=0$ *quand* n *est impair ;*

2° *Qu'en supposant* n *pair, elle n'admet, outre le ra-*

cine nulle, que deux racines réelles égales et de signes contraires, dont la valeur absolue, supérieure à l'unité, est moindre que $\sqrt{2}$ et converge vers cette limite quand n augmente. (HERMITE.)

SOLUTION

Par M. O. CALLANDREAU [1].

Nous nous appuierons sur le lemme suivant :

LEMME. — *Trouver la somme de la suite* (*n entier*)

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &1-\frac{1}{3}\frac{n}{1}+\frac{1}{5}\frac{n(n-1)}{1.2}\\ &-\frac{1}{7}\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}.\end{aligned}\right.$$

Il suffit d'intégrer $(1-x^2)^n\,dx$ entre les limites zéro et un.

On peut prendre une nouvelle variable $x=\cos\varphi$: il faudra alors intégrer $-\sin^{2n+1}\varphi\,d\varphi$.

On trouve (*voir* DUHAMEL, *Calcul infinitésimal*, t. II, p. 42) pour la somme

$$(2)\qquad \frac{1}{2n+1}\,\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}.$$

J'appelle F_{n+1}, F_n les polynomes obtenus avec $(x^2-1)^{n+1}$, $(x^2-1)^n$.

Il n'est pas difficile de voir que le polynome F_{n+1} se composera du polynome F_n multiplié par x^2-1 et d'un terme Cx où C est le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement complet de $(x^2-1)^n\,\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$.

Je cherche ce coefficient C et je le trouve égal, sans difficulté, à

$$(3)\qquad (-1)^n+(-1)^{n-1}\frac{1}{3}\frac{n}{1}+(-1)^{n-2}\frac{1}{5}\frac{n(n-1)}{1.2}+\ldots+\frac{1}{2n+1}$$

ou, d'après le lemme, à

$$(-1)^n\frac{1}{2n+1}\,\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}.$$

---

[1] Cette solution nous a été envoyée vers 1871.

Donc

$$(4)\quad (x^2-1)\,F_n+(-1)^n \frac{1}{2n+1}\,\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)} = F_{n+1}.$$

J'ai supprimé le facteur x commun à tous les termes et je continue à appeler F_n, F_{n+1} les polynomes débarrassés du facteur x.

Considérant la suite des équations (4) pour les différentes valeurs de n : n, $n-1$, $n-2$, ..., 2, 1; faisant pour abréger $x^2-1=y$ et

$$b_n=(-1)^n \frac{1}{2n+1}\,\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)},$$

ajoutant toutes ces équations après les avoir multipliées respectivement par $1, y, y^2, \ldots, y^{n-1}$,

$$F_{n+1}=y^n+b_1 y^{n-1}+b_2 y^{n-2}+\ldots+b_n=0.$$

Cette équation ne peut avoir de racines négatives : le changement de y en $-y$ donnerait le même signe à tous les termes Elle peut s'écrire

$$y^{n-1}(y+b_1)+y^{n-3}(y b_2+b_3)+\ldots+b_n=0.$$

Or les valeurs absolues de b_1, b_2, ..., b_n forment une suite décroissante et $b_1=-\frac{2}{3}$. Donc 1 est une limite supérieure des racines positives.

D'autre part, la dérivée, par rapport à y, de

$$\frac{F_{n+1}}{y^n}=b_n y^{-n}+b_{n-1} y^{-n+1}+\ldots+b_1 y^{-1}+1,$$

a un signe constant pour les valeurs de y positives et inférieures à 1; on s'en assure en écrivant

$$\begin{aligned}&-n b_n y^{-n-1}-(n-1)\,b_{n-1} y^{-n}-\ldots\\&\quad=-y^{-n-1}[n b_n+(n-1)b_{n-1}y]-\ldots,\end{aligned}$$

et remarquant que les quantités entre crochets ont le signe de b_n, b_{n-2}, ..., à cause de

$$(-1)^n[n b_n+(n-1)\,b_{n-1}y]>(-1)^n[n b_n+(n-1)\,b_{n-1}],$$

et des inégalités analogues, dans lesquelles les seconds membres sont positifs.

Il suit de là que $\frac{F_{n+1}}{y^n}$ ne peut passer qu'une fois par zéro; cela arrive si n est impair, mais pas si n est pair.

Pour trouver la limite vers laquelle tend la racine dans le cas de n impair, on observe que, d'après le lemme, on peut écrire

$$F_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \, \frac{y^{n+1} - \sin^{2(n+1)}\varphi}{y + \sin^2\varphi} \, d\varphi,$$

$$F_{n+1} = y^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y \sin\varphi}{y + \sin^2\varphi} \, d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n+3}\varphi}{y + \sin^2\varphi} \, d\varphi,$$

puis

$$F_{n+1} < y^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \, d\varphi - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+3}\varphi \, d\varphi;$$

d'où

$$y^n > \frac{1}{2} \, \frac{2}{3} \, \frac{4}{5} \cdots \frac{2n+2}{2n+3}.$$

De cette inégalité résulte que y ne peut différer de l'unité d'une quantité finie, quand n augmente indéfiniment.

Questions 992 et 993.

992. *Soit* C_3 *une courbe du troisième degré et de la troisième classe; on s'approche indéfiniment d'un point de rebroussement en construisant sur la courbe une telle série de points que chacun d'eux soit le point d'intersection de la courbe avec la tangente au point précédent.*

(ÉMILE WEYR.)

993. *Soit* C_3 *une courbe du troisième ordre et de la troisième classe; on construit sur cette courbe une telle série de points que chacun d'eux soit le point de contact de la tangente qu'on peut mener à la courbe par le point précédent. Prouver que ces points se rapprochent de plus en plus d'un point d'inflexion.* (ÉMILE WEYR.)

SOLUTIONS

Par M. MORET-BLANC (1).

Une courbe du troisième ordre est, en général, de la sixième classe; mais l'existence d'un point double diminue la classe de

(1) Je corrige les énoncés primitifs où le point d'inflexion et le point de rebroussement avaient été mis l'un pour l'autre.

deux unités et celle d'un point de rebroussement la diminue de trois unités. Une courbe du troisième ordre et de la troisième classe est donc une courbe du troisième ordre ayant un point de rebroussement.

Remarquons de plus que l'ordre et la classe d'une courbe ne sont point altérés par la projection perspective de la courbe sur un plan.

Cela posé, on peut représenter toutes les courbes du troisième ordre par l'équation

$$\alpha(\alpha - a\gamma)(\alpha - b\gamma) - k\beta^2\gamma = 0, \tag{1}$$

où $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ sont les équations de trois droites et a, b, k trois paramètres : elle renferme, en effet, neuf paramètres arbitraires, comme l'équation générale des courbes du troisième ordre.

La droite $\gamma = 0$ est la tangente au point d'inflexion

$$(\alpha = 0, \gamma = 0).$$

Si l'on fait la perspective sur un plan de manière à rejeter à l'infini la tangente d'inflexion $\gamma = 0$, il suffit de faire $\gamma = 1$ dans l'équation (1), et l'équation de la courbe perspective sera

$$\alpha(\alpha - a)(\alpha - b) - k\beta^2 = 0,$$

ou, en prenant $\beta = 0$ et $\alpha = 0$ pour axes des x et des y,

$$ky^2 = x(x-a)(x-b),$$

équation d'une famille de courbes qui peuvent reproduire par la perspective toutes les courbes du troisième ordre.

Pour que la courbe ait un point de rebroussement, il faut qu'on ait $a = 0$, $b = 0$, et l'équation se réduit à

$$ky^2 = x^3.$$

La forme de cette courbe, qui a un point de rebroussement à l'origine, un point d'inflexion à l'infini, et qui tourne constamment sa convexité vers l'axe des x met en évidence les propriétés énoncées.

Dans la construction du n° 992, le point d'intersection se rapproche indéfiniment du point de rebroussement; il en est donc de même dans la courbe dont elle est la perspective.

Dans la construction du n° 993, le point de contact de la tangente s'éloigne indéfiniment, en se rapprochant du point d'inflexion situé à l'infini; donc dans la courbe dont elle est la perspective le point de contact s'approche indéfiniment d'un point d'inflexion situé à distance finie ou infinie.

La vérification analytique de cette double propriété, au moyen de l'équation $ky^2 = x^3$, ne présente d'ailleurs aucune difficulté.

Question 305.

Soient donnés : 1° sept points sur une droite A ; *2° sept plans dans l'espace. Mener une transversale qui rencontre les sept plans en sept points qui soient homographiques aux sept points de la droite* A. (CHASLES.)

SOLUTION

Par M. J. FRANEL.

Soient $P_1, P_2, \ldots, P_7$ les sept points donnés, que nous supposerons distincts, $A = 0$, $B = 0$, $\ldots$, $G = 0$ les équations, en coordonnées homogènes, des sept plans donnés. Nous supposerons que quatre de ces plans ne passent pas par un même point et nous appellerons, pour abréger, plan A le plan représenté par l'équation $A = 0$.

Posons

$$\frac{P_3P_1}{P_3P_2} : \frac{P_4P_1}{P_4P_2} = (P_1P_2P_3P_4) = \lambda,$$

$$(P_1P_2P_3P_5) = \lambda', \qquad (P_1P_2P_3P_6) = \lambda'', \qquad (P_1P_2P_3P_7) = \lambda''',$$

et désignons par $Q_1, Q_2, \ldots, Q_7$ les points d'intersection d'une transversale quelconque l avec les plans respectifs $A, B, \ldots, G$.

Considérons, tout d'abord, l'ensemble des droites l, telles que $(Q_1Q_2Q_3Q_4) = \lambda$. Les coordonnées X, Y, Z, T d'un point variable de la transversale l peuvent se mettre sous la forme

$$X = x_0 + \rho x, \qquad Y = y_0 + \rho y, \qquad Z = z_0 + \rho z, \qquad T = t_0 + \rho t,$$

x_0, y_0, z_0, t_0 et x, y, z, t étant les coordonnées de deux points déterminés Q_0 et Q de cette droite. La valeur ρ_1 du paramètre ρ correspondant au point Q_1 a pour expression

$$\rho_1 = -\frac{A_0}{A},$$

où A_0 désigne ce que devient A quand on y remplace x, y, z, t respectivement par x_0, y_0, z_0, t_0. On a semblablement pour les valeurs ρ_2, ρ_3, ρ_4 de ρ qui correspondent aux points Q_2, Q_3, Q_4,

$$\rho_2 = -\frac{B_0}{B}, \qquad \rho_3 = -\frac{C_0}{C}, \qquad \rho_4 = -\frac{D_0}{D}.$$

La condition

$$(Q_1 Q_2 Q_3 Q_4) = \lambda = \frac{\rho_1 - \rho_3}{\rho_2 - \rho_3} : \frac{\rho_1 - \rho_4}{\rho_2 - \rho_4}$$

prend alors la forme

$$(1) \quad (C_0 A - A_0 C)(D_0 B - B_0 D) = \lambda (C_0 B - B_0 C)(D_0 A - A_0 D);$$

c'est là une équation du deuxième degré par rapport aux six coordonnées

$$x_0 y - y_0 x, \quad x_0 z - z_0 x, \quad \ldots, \quad z_0 t - t_0 z$$

de la transversale l. Elle représente un complexe connu sous le nom de *complexe tétraédral* ou *complexe de Reye,* du nom du géomètre qui, le premier, en fit une étude approfondie (1).

Le lieu des droites du complexe passant par un point donné $Q_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ est un cône du deuxième degré passant par les sommets du tétraèdre que forment les quatre plans A, B, C, D, et dont l'équation est évidemment l'équation (1) lorsqu'on y regarde x_0, y_0, z_0, t_0 comme des quantités données, x, y, z, t comme des variables. Ce cône se décompose en deux plans lorsque le point Q_0 est situé sur l'une des faces du tétraèdre A, B, C, D; par exemple, si Q_0 est dans le plan A, on a $A_0 = 0$ et l'équation (1) se décompose dans les deux suivantes :

$$A = 0, \qquad C_0(D_0 B - B_0 D) = \lambda (C_0 B - B_0 C) D_0,$$

dont la dernière peut se mettre sous la forme

$$(1 - \lambda)\frac{B}{B_0} + \lambda \frac{C}{C_0} - \frac{D}{D_0} = 0.$$

D'après ce qui précède, il est clair que la question posée revient à déterminer, dans le plan A, un point

$$Q_1(x_1, y_1, z_1, t_1),$$

---

(1) *Voir* sa *Geometrie der Lage*, II; consulter aussi STURM, *Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie*, I (Teubner), et le Mémoire de M. FOURET qui fait suite à la traduction française de la *Géométrie du mouvement* du Dr SCHÖNFLIES (Gauthier-Villars et fils).

tel que les quatre plans R_1, R_2, R_3, R_4, représentés par les équations

$$(1)\qquad (1-\lambda)\frac{B}{B_1}+\lambda\frac{C}{C_1}-\frac{D}{D_1}=0,$$

$$(2)\qquad (1-\lambda')\frac{B}{B_1}+\lambda'\frac{C}{C_1}-\frac{E}{E_1}=0,$$

$$(3)\qquad (1-\lambda'')\frac{B}{B_1}+\lambda''\frac{C}{C_1}-\frac{F}{F_1}=0,$$

$$(4)\qquad (1-\lambda''')\frac{B}{B_1}+\lambda'''\frac{C}{C_1}-\frac{G}{G_1}=0,$$

et qui passent déjà par le point Q_1, se coupent suivant la même droite. Tout d'abord cherchons, dans le plan A, le lieu des points Q_1 tels que les trois plans R_1, R_2, R_3 passent par la même droite. Il existera dans ce cas trois multiplicateurs constants m, m', m'', n'étant pas tous nuls, tels que l'on ait identiquement

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} & m\left[(1-\lambda)\frac{B}{B_1}+\lambda\frac{C}{C_1}-\frac{D}{D_1}\right] \\ & +m'\left[(1-\lambda')\frac{B}{B_1}+\lambda'\frac{C}{C_1}-\frac{E}{E_1}\right] \\ & +m''\left[(1=\lambda'')\frac{B}{B_1}+\lambda''\frac{C}{C_1}-\frac{F}{F_1}\right]=0. \end{aligned}\right.$$

Or, par hypothèse, quatre des plans donnés ne passent pas par un même point; on pourra donc déterminer, et cela d'une seule manière, à un facteur près σ, cinq constantes b, c, d, e, f, telles que l'on ait identiquement

$$(6)\qquad bB+cC+dD+eE+fF=0.$$

La comparaison de cette identité avec la précédente donne les relations

$$\begin{aligned} m(1-\lambda)+m'(1-\lambda')+m''(1-\lambda'') &= \sigma b B_1, \\ m\lambda+m'\lambda'+m''\lambda'' &= \sigma c C_1, \\ -m &= \sigma d D_1, \\ -m' &= \sigma e E_1, \\ -m'' &= \sigma f F_1, \end{aligned}$$

dont la première est une conséquence des suivantes, en vertu de l'identité (6).

L'élimination de m, m', m'' entre ces dernières donne finalement l'équation

$$(7) \qquad c\,C_1 + \lambda d\,D_1 + \lambda' e\,E_1 + \lambda'' f\,F_1 = 0,$$

qui représente, avec $A_1 = 0$, le lieu des points Q_1, tels que les trois plans R_1, R_2, R_3 se coupent suivant une même droite. Ce lieu est donc une certaine droite h; par chaque point de cette droite passe une transversale l, telle que ses points de rencontre Q_1, Q_2, ..., Q_6, avec les six plans donnés A, B, ..., F, soient homographiques aux six points donnés P_1, P_2, ..., P_6. Cette transversale est représentée par deux quelconques des équations (1), (2) et (3). On s'assure aisément, par un calcul tout semblable au précédent, qu'il existe une de ces transversales et une seule h' située dans le plan A. Le lieu de ces transversales, quand le point Q_1 se déplace sur la droite h, est un hyperboloïde tangent aux six plans donnés A, B, ..., F. En effet, ces transversales rencontrent chacun des plans A, B, ..., F suivant une droite (telle que h); en outre, chacun de ces plans renferme une transversale et une seule (telle que h'). On peut donc énoncer le théorème suivant :

Étant donnés six points sur une droite et six plans dans l'espace, le lieu des transversales qui rencontrent les plans en six points homographiques aux points donnés est un hyperboloïde tangent aux plans donnés.

Il est à peine besoin d'ajouter que ces transversales sont des génératrices de même système de cet hyperboloïde.

Soient maintenant b', c', d', e', g' des constantes, telles que l'on ait identiquement

$$b'B + c'C + d'D + e'E + g'G = 0.$$

Pour que les trois plans R_1, R_2 et R_4 se coupent suivant la même droite, on devra choisir le point Q_1 sur l'intersection des deux plans représentés par les équations

$$A = 0, \qquad c'C + \lambda d'D + \lambda' e'E + \lambda''' g'G = 0.$$

On en conclut qu'il existe, en général, une transversale et une seule satisfaisant à l'énoncé du problème. Cette transversale est représentée par deux quelconques des équations (1), (2), (3) et (4), x_1, y_1, z_1, t_1 désignant les coordonnées du point commun aux trois plans

$$A = 0,$$
$$cC + \lambda d\, D + \lambda' e\, E + \lambda'' f\, F = 0,$$
$$c'C + \lambda d' D + \lambda' e' E + \lambda''' g' G = 0.$$

Question 539.

Trouver une courbe qui représente les trois folioles du Trifolium pratense. *Chaque foliole est partagée symétriquement par une droite qui aboutit vers l'intérieur à un point de rebroussement et à l'extérieur à un point dinflexion. Les trois droites, formant entre elles des angles de* 120°, *se réunissent au même point du pédoncule.*

SOLUTION
Par M. Brocard.

Concevons une courbe fermée convexe (M), symétrique par rapport à l'axe des x, ayant un point de rebroussement sur cet axe et le coupant à angle droit en un autre point. Si l'on prend celui-ci pour pôle, et que, sans changer le rayon vecteur, on triple les angles correspondants, on aura une courbe composée de trois folioles égales, ayant un point de rebroussement sur leur axe de symétrie.

Toute courbe (M) satisfaisant aux conditions données, pourra servir de point de départ.

On peut choisir, par exemple, l'épicycloïde

$$\rho = a(1 - \cos\omega).$$

En transportant l'origine au point $\rho = 2a$, $\omega = \pi$, les formules de transformation seront

$$\frac{r}{\sin\omega} = \frac{\rho}{\sin\theta} = \frac{2a}{\sin(\omega - \theta)}.$$

Éliminant ρ et ω, on a

$$a^2(r^2 - 4ar\cos\theta + 4a^2) = (r^2 - 3ar\cos\theta + 2a^2)^2.$$

Il ne reste plus qu'à changer θ en 3φ, sans changer r; la courbe

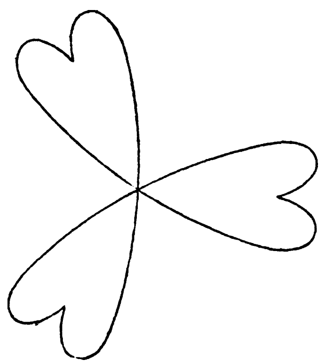
$$a^2(r^2 - 4ar\cos 3\varphi + 4a^2) = (r^2 - 3ar\cos 3\varphi + ra^2)^2$$

répond donc à la question.

En coordonnées rectilignes, elle a pour équation

$$a^2\left(x^2+y^2-4ax\frac{x^2-3y^2}{x^2+y^2}+4a^2\right)$$
$$=\left(x^2+y^2-3ax\frac{x^2-3y^2}{x^2+y^2}+2a^2\right)^2,$$

courbe du huitième degré, de la septième classe, composée de trois folioles égales, ayant chacune un point de rebrousse-



ment sur l'axe de symétrie, à la distance $r = 2a$ de l'origine. Les axes de symétrie font entre eux des angles de 120°, l'un d'eux n'est autre que OX.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1685. Il existe une infinité de triangles T qui sont à la fois circonscrits à une ellipse E et inscrits à un cercle concentrique C, le rayon de C étant égal à la demi-somme des axes de E.

La somme des carrés des côtés de tous les triangles T est constante. (E.-N. Barisien.)

TABLE DES MATIÈRES DES EXERCICES.

Questions proposées.

Questions résolues.

20558 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.