Exercices. Questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. S1-S64 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__S1_0>

EXERCICES.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1649. On donne une ellipse; on prend le triangle abc formé par les deux tangentes ca, cb à cette courbe et par la corde de contact ab. Sur les côtés de ce triangle comme diamètres, on décrit des sphères; elles se coupent en deux points, réels ou imaginaires :

1° Quel est le lieu (m) de ces points lorsqu'on déplace ab parallèlement à la même direction;

2° Quel est le lieu des lignes (m) lorsqu'on fait varier la direction de ab (¹). (MANNHEIM.)

1650. Soient S une surface telle que les lignes de courbure d'un système soient circulaires, (γ) l'un de ces cercles et G le sommet du cône circonscrit à S le long de (γ). Démontrer que la trajectoire du point G est normale au plan déterminé par ce point et par la caractéristique du plan du cercle (γ).

(CARONNET.)

1651. Deux permutations des n premiers nombres sont dites *inverses* l'une de l'autre lorsqu'elles présentent les mêmes éléments en ordre exactement inverse; elles sont dites *symétriques* l'une de l'autre lorsque la somme des éléments qui y occupent la même place est constamment égale à $n+1$. Démontrer que la probabilité, pour qu'une permutation prise au hasard parmi les permutations des n premiers nombres soit telle que son inverse et sa symétrique coïncident, est donnée par la formule

$$p = \frac{1}{1.3.5\ldots i},$$

i étant le plus grand entier impair non supérieur à n.

(DÉSIRÉ ANDRÉ.)

(¹) Voir LAISANT, *Recueil de problèmes de Géométrie analytique à deux dimensions*, p. 184, n° 721, un énoncé plus concis de cette même question.

1652. Trouver tous les systèmes de quatre nombres positifs a, b, c, d tels que les dix nombres

$$\begin{gathered} a+b-1, \quad a+c-1, \quad a+d-1, \\ b+c-1, \quad b+d-1, \quad c+d-1, \\ 2-b-c-d, \quad 2-c-d-a, \\ 2-d-a-b, \quad 2-a-b-c \end{gathered}$$

soient les inverses de nombres entiers. (LEVAVASSEUR.)

1653. C étant le cercle osculateur en un point M d'une parabole, démontrer géométriquement que le foyer divise dans le rapport de 1 à 3 la droite MD, D étant le symétrique par rapport à la normale en M du point où le cercle C rencontre le diamètre de la parabole relatif au point M. (E. ROUCHÉ.)

1654. On considère un triangle équilatéral ABC et une droite (D) passant par le centre O du triangle. Par le point A on mène une droite (Δ) symétrique par rapport à la direction (D) de la droite perpendiculaire en A à AO; de même en B, on mène la droite (Δ)$'$ symétrique par rapport à la même direction (D) de la perpendiculaire en B à BO; on agit de même en C pour construire la droite (Δ)$''$.

Montrer que ces trois droites (Δ), (Δ)$'$, (Δ)$''$ se rencontrent en un même point situé sur le cercle circonscrit au triangle ABC. (E.-N. BARISIEN.)

QUESTIONS RÉSOLUES.

Question 1385.

On donne sur un plan une ellipse de centre O *et un point fixe* C. *De ce point, on mène une transversale qui rencontre l'ellipse au point* P. *Le diamètre conjugué de* OP *coupe la transversale au point* M.

Pour quelles directions de la transversale le segment PM *est-il maximum ou minimum?* (MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. Lez.

La transversale $y-p=\mu(x-q)$ menée par le point $C(p, q)$ rencontre l'ellipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ en deux points P, P' ayant pour coordonnées

$$x=\frac{a^2\mu(p\mu-q)\pm ab\sqrt{K}}{b^2+a^2\mu^2},$$

$$y=\frac{b^2(q-p\mu)\pm ab\mu\sqrt{K}}{b^2+a^2\mu^2},$$

K, du reste, étant égal à $b^2+a^2\mu^2-(q-p\mu)^2$.

Par suite, le diamètre OM conjugué de OP a pour équation

$$\frac{y}{x}=-\frac{b\left[a\mu(p\mu-q)+b\sqrt{K}\right]}{a\left[b(q-p\mu)+a\mu\sqrt{K}\right]};$$

il rencontre la transversale en un point M représenté par

$$x=\frac{a(p\mu-q)\left[b(q-p\mu)+a\mu\sqrt{K}\right]}{(b^2+a^2\mu^2)\sqrt{K}},$$

$$y=\frac{b(q-p\mu)\left[-a\mu(q-p\mu)+b\sqrt{K}\right]}{(b^2+a^2\mu^2)\sqrt{K}}.$$

La différence des abscisses des points P et M étant $\dfrac{ab}{\sqrt{K}}$ et celle des ordonnées $\dfrac{ab\mu}{\sqrt{K}}$, la longueur du segment PM sera

$$L=ab\sqrt{\frac{1+\mu^2}{b^2+a^2\mu^2-(q-p\mu)^2}}.$$

Pour que L devienne maximum ou minimum, il faut que la dérivée de la quantité sous le radical, c'est-à-dire que μ satisfasse à l'équation

$$\mu^2-(a^2-b^2+q^2-p^2)\frac{\mu}{pq}-1=0, \tag{1}$$

dont les racines sont inverses et de signes contraires.

A la valeur positive de μ correspond le minimum de L. Les deux transversales passant par le point C et ayant pour coefficients angulaires les racines de l'équation (1) sont les bissectrices des tangentes menées à l'ellipse par le même point C.

En effet, l'équation des parallèles menées par l'origine à ces tangentes est

$$(a^2-p^2)y^2+2pqxy+(b^2-q^2)x^2=0;$$

or les bissectrices des angles de celles-ci ont pour coefficients angulaires les racines de l'équation (1).

Quand le point C est sur l'ellipse, l'une des bissectrices devient la normale en ce point, et l'autre, la tangente; le segment intercepté $L=\dfrac{a^2b^2}{\sqrt{a^4q^2+b^4p^2}}$ est un minimum. Lorsque le point C est à l'intérieur de l'ellipse, les tangentes sont imaginaires, mais leurs bissectrices sont réelles.

N. B. — M. Cartier a aussi résolu la question.

Question 1624.

Soit une série $F(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$ *dans laquelle les coefficients a sont positifs; on suppose qu'on ait* $\lim\limits_{n=\infty} a_n n^p = K$, K *étant une quantité constante différente de* 0 *et p un nombre positif moindre que l'unité. Démontrer que, lorsque x tend vers* 1, *le produit* $(1-x)^{1-p}F(x)$ *a pour limite* $K\Gamma(1-p)$. (Appell.)

SOLUTION

Par M. Soudée.

La série n'est convergente que si x est plus petit que 1; nous supposerons donc que x tende vers 1 par valeurs moindres.

On peut poser, par hypothèse, $a_n=\dfrac{K}{n^p}+\dfrac{\varepsilon_n}{n^p}$, en ayant pour limite 0 quand n augmente indéfiniment; et la série peut se décomposer ainsi

$$F(x)=a_0+K\left(\frac{x}{1^p}+\frac{x^2}{2^p}+\ldots+\frac{x^n}{n^p}+\ldots\right)$$
$$+\left(\varepsilon_1\frac{x}{1^p}+\varepsilon_2\frac{x^2}{2^p}+\ldots+\varepsilon_n\frac{x^n}{n^p}+\ldots\right).$$

Comparons la série

$$\varphi(x) = \frac{x}{1^p} - \frac{x^2}{2^p} + \ldots$$

avec l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty \frac{x^n}{n^p}\, dn;$$

et remarquons d'abord que celle-ci s'exprime par la fonction Γ; car

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty x^n n^{-p}\, dn = \int_0^\infty n^{(1-p)-1} e^{-n\log\frac{1}{x}}\, dn = \frac{\Gamma(1-p)}{\left(\log\frac{1}{x}\right)^{1-p}}.$$

$\dfrac{x^n}{n^p}$ est une fonction de n décroissante; car sa dérivée est

$$\frac{x^n}{n^{p+1}}(n\log x - p),$$

et $\log x$ est négatif puisque x est moindre que 1. Si donc on désigne par m un entier quelconque, on aura la double inégalité

$$\frac{x^{m+1}}{(m+1)^p} < \int_m^{m+1} \frac{x^n}{n^p}\, dn < \frac{x^m}{m^p}.$$

Si l'on donne à m toutes les valeurs entières à partir de 1 et qu'on ajoute, comme la série $\varphi(x)$ est convergente, on obtient

$$\varphi(x) - x < \int_1^\infty \frac{x^n}{n^p}\, dn < \varphi(x)$$

ou

$$\varphi(x) - x < \mathrm{I} - \int_0^1 \frac{x^n}{n^p}\, dn < \varphi(x).$$

Le produit $(1-x)^{1-p}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{n^p}\, dn$ a pour limite 0 quand x tend vers 1: il en est de même de $x(1-x)^{1-p}$.

Le produit $\mathrm{I}(1-x)^{1-p}$ ou $\Gamma(1-p)\left(\dfrac{1-x}{\log\frac{1}{x}}\right)^{1-p}$ a pour limite $\Gamma(1-p)$. Donc

$$\lim_{x=1}\left[(1-x)^{1-p}\varphi(x)\right] = \Gamma(1-p).$$

Dans l'expression de $F(x)(1-x)^{1-p}$, la première partie $a_0(1-x)^{1-p}$ a pour limite o; je dis qu'il en est de même de la troisième. Soit ε un nombre donné; on peut déterminer un entier m tel que si n est supérieur à m, ε_n est moindre que ε. Décomposons la série en deux parties : la première, composée des m premiers termes, reste finie quand x tend vers 1; son produit par $(1-x)^{1-p}$ a pour limite o; la seconde est moindre que $\varepsilon\left[\dfrac{x^{m+1}}{(m+1)^p}+\ldots\right]$ en valeur absolue; elle est moindre que $\varepsilon\varphi(x)$ à plus forte raison; et son produit par $(1-x)^{1-p}$ a une limite inférieure à $\varepsilon\Gamma(1-p)$.

Donc, dans le produit $(1-x)^{1-p}F(x)$, la première et la troisième partie s'annulent; il reste

$$\lim_{x=1}[(1-x)^{1-p}F(x)]=K\Gamma(1-p).$$

Question 399.

On mène par le point o des plans parallèles aux faces d'un tétraèdre abcd; ces plans déterminent dans chaque angle trièdre des parallélépipèdes dont on désigne les volumes par P_a, P_b, P_c, P_d. *On a*

$$\left(\frac{oa}{P_a}\right)^2+\left(\frac{ob}{P_b}\right)^2-\left(\frac{oc}{P_c}\right)^2=\left(\frac{od}{P_d}\right)^2.$$

(MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. E. GENTY.

Prenons le point o pour origine et soient α, β, γ et δ les vecteurs des points a, b, c et d, α, β et γ formant un trièdre trirectangle.

Les arêtes du parallélépipède ayant pour volume P_a sont les parallèles ob_1, oc_1 et od_1 menées par le point o aux droites ab, ac et ad respectivement et limitées aux points b_1, c_1 et d_1, où elles rencontrent les plans acd, abd et abc respectivement.

On a donc

$$ob_1=K(\alpha-\beta),$$

et nous déterminerons K en exprimant que le point b est dans le plan *acd*, qui a pour équation

$$S\rho V(\gamma\alpha + \alpha\delta + \delta\gamma) = S\gamma\alpha\delta = \frac{\overline{oa}.\overline{oc}.S\beta\delta}{\overline{ob}}.$$

Remplaçons dans cette équation ρ par l'expression de *ob*, et nous aurons

$$KD = \frac{\overline{oa}.\overline{oc}.S\beta\delta}{\overline{ob}},$$

en désignant par D le sextuple du volume du tétraèdre *abcd*.

On a donc

$$ob_1 = \frac{\overline{oa}.\overline{oc}.S\beta\delta}{D.\overline{ob}}(\alpha - \beta).$$

On a de même

$$oc_1 = \frac{\overline{oa}.\overline{oc}.S\gamma\delta}{D.\overline{oc}}(\alpha - \gamma).$$

On a enfin

$$od_1 = K(\alpha - \delta),$$

et le plan *abc* ayant pour équation

$$S\rho V(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = S\alpha\beta\gamma = \overline{oa}.\overline{ob}.\overline{oc},$$

on déterminera K par la condition

$$KS(\alpha - \delta)V(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = \overline{oa}.\overline{ob}.\overline{oc}$$

ou

$$KD = \overline{oa}.\overline{ob}.\overline{oc}.$$

On a donc

$$od_1 = \frac{\overline{oa}.\overline{ob}.\overline{oc}}{D}(\alpha - \delta),$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} P_a &= S\,ob_1.oc_1.od_1 \\ &= \frac{\overline{oa}^3.\overline{ob}.\overline{oc}}{D^3} S\beta\delta.S\gamma\delta.S(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta), \end{aligned}$$

ou enfin

$$P_a = \frac{\overline{oa}^3.\overline{ob}.\overline{oc}}{D^2} S\beta\delta.S\gamma\delta.$$

On aura de même

$$P_b = \frac{\overline{ob}^3.\overline{oc}.\overline{oa}}{D^2} S\gamma\delta.S\alpha\delta;$$

$$P_c = \frac{\overline{oc}^3.\overline{oa}.\overline{ob}}{D^2} S\alpha\delta.S\beta\delta.$$

On a donc

$$\left(\frac{\overline{oa}}{P_a}\right)^2 + \left(\frac{\overline{ob}}{P_b}\right)^2 + \left(\frac{\overline{oc}}{P_c}\right)^2$$

$$= \frac{D^4}{\overline{oa}^2.\overline{ob}^2.\overline{oc}^2}\left(\frac{1}{\overline{oa}^2.S^2\beta\delta.S^2\gamma\delta} + \frac{1}{\overline{ob}^2.S^2\gamma\delta.S^2\alpha\delta} + \frac{1}{\overline{oc}^2.S^2\alpha\delta.S^2\beta\delta}\right)$$

$$= \frac{D^4\,\overline{od}^2}{\overline{oa}^2.\overline{ob}^2.\overline{oc}^2.S^2\alpha\delta.S^2\beta\delta.S^2\gamma\delta}.$$

Calculons maintenant P_d.

L'une des arêtes du parallélépipède correspondant est la parallèle à da menée par le point o et limitée au point a_2 où elle perce le plan abc.

On aura donc

$$oa_2 = K(\alpha - \delta),$$

et le plan dbc ayant pour équation

$$S\rho V(\beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta) = S\beta\gamma\delta = \frac{\overline{ob}.\overline{oc}.S\alpha\delta}{\overline{oa}},$$

on aura

$$KD = \frac{\overline{ob}.\overline{oc}.S\alpha\delta}{\overline{oa}}$$

et, par suite,

$$oa_2 = \frac{\overline{ob}.\overline{oc}.S\alpha\delta}{\overline{oa}}(\alpha - \delta).$$

On a de même

$$ob_2 = \frac{\overline{oc}.\overline{oa}.S\beta\delta}{\overline{ob}}(\beta - \delta),$$

$$oc_2 = \frac{\overline{oa}.\overline{ob}.S\gamma\delta}{\overline{oc}}(\gamma - \delta);$$

d'où

$$P_d = S\,oa_2.ob_2.oc_2 = \frac{\overline{oa}.\overline{ob}.\overline{oc}}{D^2} S\alpha\delta.S\beta\delta.S\gamma\delta,$$

et enfin

$$\left(\frac{\overline{od}}{P_d}\right)^2 = \frac{D^4\,\overline{od}^2}{\overline{oa}^2.\overline{ob}^2.\overline{oc}^2.S^2\alpha\delta.S^2\beta\delta.S^2\gamma\delta}$$

$$= \left(\frac{\overline{oa}}{P_a}\right)^2 + \left(\frac{\overline{ob}}{P_b}\right)^2 + \left(\frac{\overline{oc}}{P_c}\right)^2.$$

Question 482.

Le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre, le centre de l'hyperboloïde, passant par les quatre hauteurs, le centre de gravité du tétraètre, sont trois points en ligne droite. (JOACHIMSTHAL.)

SOLUTION

Par M. E. GENTY.

Nous avons montré que si (ρ_1, ω_1), (ρ_2, ω_2) et (ρ_3, ω_3) sont les coordonnées de trois droites, le centre C_h de l'hyperboloïde déterminé par ces trois droites a pour vecteur

$$\gamma_h = \frac{(S\rho_3\omega_2 - S\rho_2\omega_3)\rho_1 + (S\rho_1\omega_3 - S\rho_3\omega_1)\rho_2 + (S\rho_2\omega_1 - S\rho_1\omega_2)\rho_2}{2S\rho_1\rho_2\rho_3}$$

Soit, par exemple, un tétraèdre OABC; O est l'origine; A, B et C ont pour vecteurs α, β et γ respectivement.

Trois des hauteurs auront pour coordonnées

$$\rho_1 = V\beta\gamma, \qquad \omega_1 = V\alpha\, V\beta\gamma;$$
$$\rho_2 = V\gamma\alpha, \qquad \omega_2 = V\beta\, V\gamma\alpha;$$
$$\rho_3 = V\alpha\beta, \qquad \omega_3 = V\gamma\, V\alpha\beta;$$

et l'on trouve immédiatement

$$\gamma_h = \frac{V\beta\gamma\, S\alpha(\beta+\gamma) + V\gamma\alpha\, S\beta(\gamma+\alpha) + V\alpha\beta\, S\gamma(\alpha+\beta)}{2S\alpha\beta\gamma}.$$

Or, si γ_g est le vecteur du centre de gravité C_g de l'hyperboloïde et γ_s le vecteur du centre C_s de la sphère circonscrite, on a

$$\gamma_g = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{4}$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{l}[T^2\alpha + S\alpha(\beta+\gamma)]\,\overrightarrow{V\beta\gamma} \\ \quad + [T^2\beta + S\beta(\gamma+\alpha)]\,V\gamma\alpha + [T^2\gamma + S\gamma(\alpha-\beta)]\,V\alpha\beta\end{array}\right\}}{4S\alpha\beta\gamma}$$

et

$$\gamma_s = \frac{T^2\alpha V\beta\gamma + T^2\beta V\gamma\alpha + T^2\gamma V\alpha\beta}{2S\alpha\beta\gamma};$$

donc on a

$$\gamma_g = \frac{\gamma_h + \gamma_s}{2},$$

ce qui montre que C_g est le point milieu de la droite $C_h C_s$.

Question 793.

Déterminer dans un plan deux systèmes de neuf points conjugués

$$\begin{array}{ccccc} a_1, & a_2, & \ldots, & a_8, & a_9, \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_8, & b_9. \end{array}$$

jouissant de la propriété qu'étant pris au hasard deux couples de points correspondants a_i et b_i, a_j et b_j, il existe toujours un autre couple de points correspondants a_k et b_k et un seul tel, que les deux triangles $a_i a_j a_k$ et $b_i b_j b_k$ soient semblables. (LAGUERRE.)

SOLUTION.

Par M. JUEL.

On rapporte tous les points $a_1, a_2, \ldots, a_9, b_1, b_2, \ldots, b_9$ à un système cartésien ordinaire, et soient les coordonnées de tous les points

$$(a'_1 a''_1), \quad \ldots, \quad (a'_9 a''_9), \quad (b'_1 b''_1), \quad \ldots, \quad (b'_9 b''_9).$$

Si l'on forme au moyen de ces coordonnées les combinaisons usuelles

$$a'_1 + ia''_1, \quad \ldots, \quad a'_9 + ia''_9, \quad b'_1 + ib''_1, \quad \ldots, \quad b'_9 + ib''_9,$$

si on les représente par les nombres

$$\alpha_1, \quad \ldots, \quad \alpha_9, \quad \ldots, \quad \beta_9,$$

la condition nécessaire et suffisante pour que les triangles $a_i a_j a_k$ et $b_i b_j b_k$ soient semblables sera

$$(1) \qquad \frac{\alpha_i - \alpha_j}{\beta_i - \beta_j} = \frac{\alpha_k - \alpha_j}{\beta_k - \beta_j}.$$

Si nous construisons ensuite, dans un nouveau système cartésien, les points imaginaires dont les coordonnées sont $(\alpha_1 \beta_1)$, ..., $(\alpha_9 \beta_9)$, on est conduit, comme conséquence de la relation (1) et de ses analogues, à trouver un groupe de neuf points tels que chaque droite qui contient deux points du groupe en contiendra encore un troisième, et un seul.

Mais, d'après la théorie des courbes du troisième ordre, ce groupe doit nécessairement être celui des neuf points d'inflexion d'une cubique. Donc, etc.

Néanmoins, une solution purement géométrique étant à désirer, bien que difficile, je me permettrai de poser le problème dans le *Tidsskrift*, avec renvoi aux *Nouvelles Annales*, cela va sans dire.

Question 946.

Soient (A) *et* (A′) *deux surfaces dont l'une est la transformée de l'autre par rapport à un pôle* O, *c'est-à-dire telles que les points correspondants se trouvent sur une même droite passant par le point fixe* O. *On demande de démontrer :*

1° *Que dans ce mode de transformation les surfaces liées par la relation*

$$f(r, r') = 0,$$

où f est une fonction quelconque des distances $OM = r$, $OM' = r'$, *jouissent seules de la propriété que leurs normales aux points correspondants se rencontrent en un même point de l'espace : comme une des applications, on peut considérer les surfaces conchoïdes* $r - r' = \pm$ const.;

2° *Que parmi les transformations définies par la relation générale* $f(r, r'') = 0$, *il n'y a que l'homothétie et l'inversion qui jouissent de la propriété de faire correspondre les lignes de courbure des surfaces transformées.*

(E. Habich.)

SOLUTION

Par M. E. Genty.

Soient ρ et ρ' les vecteurs de deux points correspondants des surfaces (A) et (A′). On aura

$$\rho' = K\rho.$$

K étant une fonction scalaire de ρ, en sorte qu'on pourra poser

$$dK = S\lambda\, d\rho.$$

Si d'ailleurs ν et ν' sont les orienteurs des normales respectives des deux surfaces, la condition de rencontre de ces deux normales sera

$$(1) \qquad S\rho\nu\nu' = 0.$$

Or on a

$$d\rho' = \rho\, S\lambda\, d\rho + K\, d\rho;$$

d'où, en projetant avec λ,

$$S\lambda\, d\rho' = (S\lambda\rho + K) S\lambda\, d\rho;$$

on a donc

$$(S\lambda\rho + K)\, d\rho' - \rho\, S\lambda\, d\rho' = K(S\lambda\rho + K)\, d\rho.$$

Si nous projetons maintenant avec ν, il vient, en tenant compte de la relation évidente

$$S\nu\, d\rho = 0,$$

$$(S\lambda\rho + K)\, S\nu\, d\rho' - S\nu\rho\, S\lambda\, d\rho' = 0.$$

On a donc

$$\nu' \parallel (S\lambda\rho + K)\nu - \lambda S\nu\rho,$$

et la condition (1) devient

$$S\rho\lambda\nu = 0.$$

Il en résulte qu'on peut poser

$$\lambda = a\rho + b\nu,$$

d'où

$$dK = S\lambda\, d\rho = a S\rho\, d\rho = a\, d(T^2\rho),$$

ce qui démontre la première partie de la proposition.

Supposons maintenant que $d\rho$ soit le vecteur d'une direction principale de la surface (A).

On aura

$$d\rho = R\, d\nu;$$

d'où

$$d\rho' = R(\rho\, S\lambda\, d\nu + K\, d\nu),$$

et pour que les lignes de courbure se correspondent sur les deux surfaces, on devra avoir aussi

$$d\rho' \parallel d\nu';$$

d'où

$$(2) \qquad S\rho\, d\nu\, d\nu' = 0.$$

Or on a

$$\nu' = \frac{(S\lambda\rho + K)\nu - \lambda S\nu\rho}{n},$$

n étant le module du vecteur qui figure au numérateur, mais K étant une fonction de $T^2\rho$, on a

$$dK = 2K' S\rho\, d\rho,$$

K' étant la dérivée de K prise par rapport à $T^2\rho$; d'où

$$\lambda = 2K'\rho$$

et, par suite,

$$\nu' = \frac{(2K'T^2\rho + K)\nu - 2K'\rho S\nu\rho}{n} = \frac{A\nu + B\rho}{n};$$

donc

$$d\nu' = \frac{n(dA\nu + A\,d\nu + dB\,\rho + B\,d\rho) - dn(A\nu + B\rho)}{n^2}$$

et la condition (2) devient

$$(n\,dA - A\,dn)\,S\nu\rho\, d\nu = 0,$$

ou

$$n\,dA - A\,dn = 0,$$

ou enfin

$$n = CA = C(2K'T^2\rho + K),$$

C étant une constante, ce qui montre que n doit être une fonction de $T^2\rho$.

Or on a

$$\begin{aligned} n^2 &= 4K'^2T^4\rho + 4KK'T^2\rho + K^2 \\ &\quad + 4K'^2S^2\nu\rho\, T^2\rho - 4K'S^2\nu\rho(2K'T^2\rho + K) \\ &= 4K'(K'T^2\rho + K)(T^2\rho - S^2\nu\rho) + K^2, \end{aligned}$$

et cette expression de n^2 ne peut être une fonction de $T^2\rho$ que si l'on a

$$K' = 0 \qquad \text{ou} \qquad K'T^2\rho + K = 0.$$

La première hypothèse donne l'homothétie et la seconde l'inversion.

On vérifie d'ailleurs très simplement que l'inversion conserve bien les lignes de courbure.

On a, en effet, dans ce cas,

$$K = \frac{1}{T^2\rho}, \qquad K' = -\frac{1}{T^4\rho}, \qquad \lambda = -\frac{2\rho}{T\rho^4};$$

d'où

$$d\rho' = R\,\frac{d\nu\, T^2\rho - 2\rho\, S\rho\, d\nu}{T^4\rho},$$

$$\nu' = \frac{2\rho\, S\nu\rho - \nu T^2\rho}{T^2\rho},$$

$$d\nu = \frac{T^2\rho(2\rho S\rho\, d\nu + 2\, d\rho\, S\nu\rho - 2\nu S\rho\, d\rho - d\nu\, T^2\rho) - 2S\rho\, d\rho(2\rho S\nu\rho - \nu T^2\rho)}{T^4\rho},$$

ou, en remplaçant $d\rho$ par $R\,d\nu$,

$$d\nu' = \frac{(2RS\nu\rho - T^2\rho)(T^2\rho\, d\nu - 2S\rho\, d\nu\, \rho)}{T^4\rho},$$

ou enfin

$$d\nu' = \frac{2RS\nu\rho - T^2\rho}{R}\, d\rho',$$

ce qui montre bien que les lignes de courbure se correspondent sur les surfaces (A) et (A′).

On voit en même temps que, si R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux de la surface (A), R'_1 et R'_2 ceux de la surface (A′), on a

$$R'_1 = \frac{R_1}{2R_1 S\nu\rho - T^2\rho}, \qquad R'_2 = \frac{R_2}{2R_2 S\nu\rho - T^2\rho};$$

on déduit de là

$$\frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2} = T^2\rho\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = 4S\nu\rho,$$

ou, en divisant par $T\rho$,

$$r\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + r'\left(\frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2}\right) = 4\cos\lambda,$$

r et r' désignant les longueurs $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$ respectivement, et λ l'angle du rayon vecteur avec la normale à l'une ou l'autre des surfaces (A) et (A′).

Question 1478.

Par un point O *de l'espace, on abaisse des perpendiculaires sur trois plans diamétraux conjugués d'une quadrique et on mène le plan passant par les pieds de ces trois perpendiculaires. Ce plan et les plans analogues obtenus en faisant varier le système des trois plans diamétraux conjugués passent par un même point* M. *Trouver le lieu du point* M *lorsque, le point* O *restant fixe, la quadrique tourne autour d'une droite.* (PELLET.)

SOLUTION

Par M. E. GENTY.

Soient

$$S\rho\varphi\rho = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde ; α, β et γ les vecteurs de trois demi-diamètres conjugués de cette surface et ω le vecteur du point O. Les pieds A_1, B_1 et C_1 des perpendiculaires abaissées de ce point sur les trois plans diamétraux conjugués de l'ellipsoïde auront pour vecteurs

$$\frac{VV\beta\gamma\, V\omega\, V\beta\gamma}{T^2 V\beta\gamma}, \quad \frac{VV\gamma\alpha\, V\omega\, V\gamma\alpha}{T^2 V\gamma\alpha}, \quad \frac{VV\alpha\beta\, V\omega\, V\alpha\beta}{T^2 V\alpha\beta};$$

or, α, β, γ étant trois demi-diamètres conjugués de l'ellipsoïde, on a

$$S\beta\varphi\alpha = 0, \qquad S\gamma\varphi\alpha = 0;$$

d'où

$$V\beta\gamma = K\varphi\alpha,$$

K étant un facteur scalaire; on aura donc pour les vecteurs des points A_1, B_1 et C_1 les nouvelles expressions

$$\frac{V\varphi\alpha\, V\omega\varphi\alpha}{S\alpha\varphi^2\alpha}, \quad \frac{V\varphi\beta\, V\omega\varphi\beta}{S\beta\varphi^2\beta}, \quad \frac{V\varphi\gamma\, V\omega\varphi\gamma}{S\gamma\varphi^2\gamma}.$$

Mais, si l'on pose

$$\varphi^{\frac{1}{2}}\alpha = \alpha_1, \qquad \varphi^{\frac{1}{2}}\beta = \beta_1, \qquad \varphi^{\frac{1}{2}}\gamma = \gamma_1,$$

α_1, β_1 et γ_1 seront trois orienteurs rectangulaires et les expressions vectorielles ci-dessus prendront la forme

$$\frac{V\varphi^{\frac{1}{2}}\alpha_1 V\omega\varphi^{\frac{1}{2}}\alpha_1}{S\alpha_1\varphi\alpha_1}, \quad \frac{V\varphi^{\frac{1}{2}}\beta_1 V\omega\varphi^{\frac{1}{2}}\beta_1}{S\beta_1\varphi\beta_1}, \quad \frac{V\varphi^{\frac{1}{2}}\gamma_1 V\omega\varphi^{\frac{1}{2}}\gamma_1}{S\gamma_1\varphi\gamma_1},$$

ou

$$\omega - \frac{S\omega\varphi^{\frac{1}{2}}\alpha_1}{S\alpha_1\varphi\alpha_1}\varphi^{\frac{1}{2}}\alpha_1, \quad \omega - \frac{S\omega\varphi^{\frac{1}{2}}\beta_1}{S\beta_1\varphi\beta_1}\varphi^{\frac{1}{2}}\beta_1, \quad \omega - \frac{S\omega\varphi^{\frac{1}{2}}\gamma_1}{S\gamma_1\varphi\gamma_1}\varphi^{\frac{1}{2}}\gamma_1,$$

et, si l'on porte l'origine au point O, l'équation du plan $A_1B_1C_1$ sera

$$S\rho\left(\frac{S\alpha_1\varphi\alpha_1 V\varphi^{\frac{1}{2}}\beta_1\varphi^{\frac{1}{2}}\gamma_1}{S\omega\varphi^{\frac{1}{2}}\alpha_1} + \frac{S\beta_1\varphi\beta_1 V\varphi^{\frac{1}{2}}\gamma_1\varphi^{\frac{1}{2}}\alpha_1}{S\omega\varphi^{\frac{1}{2}}\beta_1} + \frac{S\gamma_1\varphi\gamma_1 V\varphi^{\frac{1}{2}}\alpha_1\varphi^{\frac{1}{2}}\beta_1}{S\omega\varphi^{\frac{1}{2}}\gamma_1}\right) + S\varphi^{\frac{1}{2}}\alpha_1\varphi^{\frac{1}{2}}\beta_1\varphi^{\frac{1}{2}}\gamma_1 = 0,$$

ou encore

$$(1)\quad S\rho\left(\frac{S\alpha_1\varphi\alpha_1}{S\omega\varphi^{\frac{1}{2}}\alpha_1}\varphi^{-\frac{1}{2}}\alpha_1 + \frac{S\beta_1\varphi\beta_1}{S\omega\varphi^{\frac{1}{2}}\beta_1}\varphi^{-\frac{1}{2}}\beta_1 + \frac{S\gamma_1\varphi\gamma_1}{S\omega\varphi^{\frac{1}{2}}\gamma_1}\varphi^{-\frac{1}{2}}\gamma_1\right) + 1 = 0.$$

Or on a

$$S\alpha_1\varphi\alpha_1 + S\beta_1\varphi\beta_1 + S\gamma_1\varphi\gamma_1 = m_2,$$

m_2 étant un invariant de la fonction φ.

Donc le plan (1) passe par le point fixe P ayant pour vecteur

$$-\varphi\frac{\omega}{m_2}.$$

Si l'on revient à l'origine primitive, le vecteur de ce point sera

$$\frac{(m_2 - \varphi)\omega}{m_2}.$$

Au lieu de supposer que l'ellipsoïde tourne autour d'une droite, nous pouvons supposer que la quadrique est fixe et que le point O tourne autour de la droite.

On peut alors poser

$$\omega = \lambda + R(\mu\cos\theta + \nu\sin\theta),$$

λ étant le vecteur du centre M du cercle décrit par le point O, R le rayon de ce cercle, λ et μ deux orienteurs rectangulaires situés dans son plan.

On a alors, en appelant ρ le vecteur du point P,

$$\rho - \frac{(m_2 - \varphi)\lambda}{m_2} = \frac{R}{m_2}[(m_2 - \varphi)\,\mu\cos\theta + (m_2 - \varphi)\nu\sin\theta],$$

équation vectorielle d'une ellipse ayant pour centre le point correspondant du point M; on voit d'ailleurs que les points correspondants aux extrémités de deux rayons rectangulaires quelconques du cercle décrit par le point O sont les extrémités de deux diamètres conjugués de l'ellipse.

Question 1484.

On donne sur une droite deux systèmes de trois points a, a', a'' et b, b', b'' qui font partie de deux divisions homographiques. Sur ab comme diamètre on décrit un cycle C dont le sens est déterminé par la condition qu'au-dessus de la droite le point décrivant aille de a en b; les segments $a'b'$ et $a''b''$ déterminent de même deux autres cycles C' et C''. Si l'on trace un cycle tangent à C, C' et C'', démontrer que les points où il coupe la droite sont les deux points doubles des deux divisions homographiques.

(LAGUERRE.)

SOLUTION

Par M. JUEL.

On peut énoncer plus brièvement la question comme il suit. Soient $(a, b, c, \ldots)$, $(a_1, b_1, c_1, \ldots)$ deux groupes de points faisant partie de deux divisions homographiques. Les cycles *de même sens* construits sur aa_1, bb_1, cc_1 comme diamètres seront tous touchés par un même cycle.

Soit e un point double des deux divisions homographiques et appliquons une transformation par inversion, avec e pour pôle. L'autre point double f se transformera en f', $a_1 b$ en $a'_1 b'_1 \ldots$

On aura donc

$$f'a' : f'a'_1 = f'b' : f'b'_1 = \ldots = \text{const.}$$

et tous les cycles décrits sur $a'a'_1$, $b'b'_1$, ... comme diamètres seront touchés par deux droites passant par f'. Le théorème est donc démontré; car, dans la transformation par inversion, les cycles se transforment en cycles.

Question 1534.

Le lieu des foyers des coniques doublement tangentes à deux cercles donnés se compose de cinq cercles.

(Entretin.)

SOLUTION

Par M. E.-N. Barisien.

Pour bien analyser cette question, il est nécessaire de la diviser en deux cas généraux.

I. *Cas des cercles extérieurs l'un à l'autre ou se rencontrant en des points réels.*

II. *Cas des cercles dont l'un est intérieur à l'autre.*

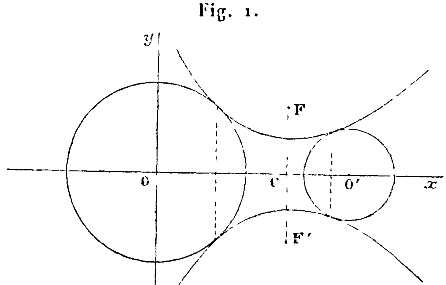
I. Dans ce premier cas, l'un des axes de la conique coïncide avec la ligne des centres, l'autre axe est perpendiculaire à la ligne des centres.

Il peut donc se présenter deux cas :

1° Les foyers sont sur la ligne des centres.

La ligne des centres fait donc partie du lieu des foyers.

Fig. 1.



2° L'axe focal est perpendiculaire à la ligne des centres.

Prenons des axes rectangulaires, l'origine étant au centre de l'un des cercles et l'axe des x étant la ligne des centres.

Soient R le rayon du cercle ayant son centre à l'origine, r le rayon de l'autre cercle et a la distance des centres.

L'équation d'une conique bitangente au cercle (R), et ayant pour un de ses axes l'axe des x, est

$$(1)\qquad \lambda(x^2+y^2-R^2)+(x-p)^2=0.$$

De même, l'équation d'une conique bitangente au cercle (r), et ayant pour un de ses axes l'axe des x, est

$$(2)\qquad \mu[(x-a)^2+y^2-r^2]+(x-q)^2=0.$$

Ces deux équations doivent être identiques, ce qui conduit aux relations

$$\lambda=\mu,$$
$$p-q=a\lambda,$$
$$p^2-q^2=\lambda(R^2+a^2-r^2).$$

En divisant membre à membre les deux dernières relations, on obtient

$$p+q=\frac{R^2+a^2-r^2}{a}.$$

Par conséquent

$$(3)\qquad p=\frac{a\lambda}{2}+\frac{R^2+a^2-r^2}{2a}.$$

L'équation générale des coniques (1) ne contient plus que le paramètre λ, puisque (3) donne p en fonction de λ.

L'abscisse du centre a pour expression $\frac{p}{1+\lambda}$. Si donc on change dans (1) x en $x+\frac{p}{1+\lambda}$, on arrive à l'équation

$$x^2(1+\lambda)+\lambda y^2=\lambda\left(R^2-\frac{p^2}{1+\lambda}\right).$$

Si A et B désignent les demi-axes de la conique, on a donc

$$A^2=\frac{\lambda}{1+\lambda}\left(R^2-\frac{p^2}{1+\lambda}\right),$$
$$B^2=R^2-\frac{p^2}{1+\lambda}.$$

Par suite,

$$C^2=B^2-A^2=\frac{1}{1+\lambda}\left(R^2-\frac{p^2}{1+\lambda}\right).$$

Si donc X et Y sont les coordonnées d'un foyer, on a

$$(4)\qquad X = \frac{p}{1+\lambda},$$

$$(5)\qquad Y^2 = \frac{R^2}{1+\lambda} - \frac{p^2}{(1+\lambda)^2}.$$

On aura le lieu des foyers en éliminant p et λ entre (3), (4) et (5).

On en déduit

$$X^2 + Y^2 = \frac{R^2}{1+\lambda},$$

$$X - \frac{a}{2} = \frac{R^2 - r^2}{2a(1+\lambda)}.$$

En divisant ces deux équations membre à membre, on trouve l'équation d'un cercle

$$X^2 + Y^2 - \left(X - \frac{a}{2}\right)\frac{2aR^2}{R^2 - r^2} = 0,$$

dont le rayon est $\dfrac{aRr}{R^2 - r^2}$.

II. *Cas où l'un des cercles est intérieur à l'autre.* — Prenons des axes rectangulaires, au centre O du plus petit cercle, de rayon r, l'axe des x étant dirigé vers le centre C de l'autre cercle de rayon R. Soit $OC = a$.

Considérons une conique bitangente à chacun des deux cercles et dont l'un des axes soit incliné de l'angle α sur l'axe des x. Les cordes de contact dans chacun des cercles sont parallèles à chacun des axes de la conique. De sorte que cette conique a indifféremment l'une des équations

$$\lambda(x^2 + y^2 - r^2) + (x\cos\alpha + y\sin\alpha - p)^2 = 0,$$

$$\mu[(x-a)^2 + y^2 - R^2] + (x\sin\alpha - y\cos\alpha - q)^2 = 0.$$

L'identification de ces deux équations conduit aux relations

$$(1)\qquad \lambda + \mu + 1 = 0,$$

$$(2)\qquad p\cos\alpha + q\sin\alpha + a\mu = 0,$$

$$(3)\qquad p\sin\alpha = q\cos\alpha,$$

$$(4)\qquad p^2 + q^2 - \lambda r^2 + \mu(a^2 - R^2) = 0.$$

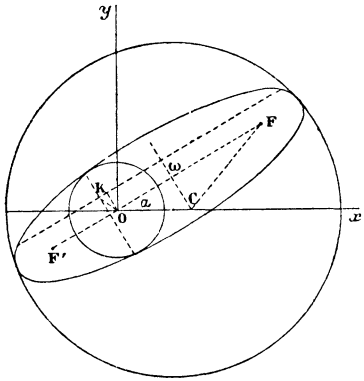
De (2) et (3), on tire

$$p^2 + q^2 = a^2\mu^2,$$
$$p = -a\mu\cos\alpha,$$
$$q = -a\mu\sin\alpha;$$

(4) devient donc

$$a^2\mu^2 - \lambda r^2 + \mu(a^2 - R^2) = 0. \tag{5}$$

Fig. 2.



En résolvant (1) et (5), on trouve une équation du second degré en λ,

$$a^2(\lambda+1)^2 - (\lambda+1)(a^2 + r^2 - R^2) + r^2 = 0;$$

d'où

$$\lambda + 1 = \frac{a^2 + r^2 - R^2 \pm \sqrt{(a^2 + r^2 - R^2)^2 - 4a^2r^2}}{2a^2}. \tag{6}$$

On a ainsi deux valeurs de λ, λ' et λ''.

Par conséquent, la première équation dans laquelle λ est la constante (6) et où

$$p = a(\lambda+1)\cos a \tag{7}$$

est l'équation générale des coniques bitangentes aux deux cercles.

On peut remarquer incidemment que

$$p^2 + q^2 = a^2(\lambda+1)^2.$$

Donc, si K est le point de rencontre des deux cordes communes, on a

$$OK = (\lambda + 1) a,$$

ce qui montre que le *lieu du point de rencontre des deux cordes communes se compose de deux cercles de centre* O *et de rayons* $a(\lambda' + 1)$ *et* $a(\lambda'' + 1)$.

Les coordonnées du centre ω de la conique sont

$$x = a \cos^2 \alpha,$$
$$y = a \sin \alpha \cos \alpha,$$

de sorte que *le lieu des centres des coniques est le cercle décrit sur* OC *comme diamètre.*

Transportons les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes en ω. Il faut changer

$$x \quad \text{en} \quad x + a \cos^2 \alpha,$$
$$y \quad \text{en} \quad y + a \sin \alpha \cos \alpha.$$

L'équation de la conique devient alors

$$\lambda(x^2 + y^2) + (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2$$
$$+ \lambda(a^2 \cos^2 \alpha - r^2) + (a \cos \alpha - p)^2 = 0.$$

Prenons encore pour nouveaux axes de coordonnées les axes de la conique : il faut changer

$$x \quad \text{en} \quad x \cos \alpha - y \sin \alpha,$$
$$y \quad \text{en} \quad x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

On arrive alors à l'équation

$$(\lambda + 1) x^2 + \lambda y^2 = \lambda [r^2 (\lambda + 1) a^2 \cos^2 \alpha].$$

Donc, si A et B sont les demi-axes de la conique

$$A^2 = \frac{\lambda}{\lambda + 1} [r^2 - (\lambda + 1) a^2 \cos^2 \alpha],$$
$$B^2 = r^2 - (\lambda + 1) a^2 \cos^2 \alpha.$$

1° *Si l'axe focal passe par* O,

$$C^2 = A^2 - B^2 = a^2 \cos^2 \alpha - \frac{r^2}{\lambda + 1}.$$

Soit F l'un des foyers, alors

$$\overline{CF}^2 = \overline{\omega C}^2 + \overline{\omega F}^2.$$

Mais

$$\omega C = a \sin \alpha,$$

$$\overline{\omega F}^2 = a^2 \cos^2 \alpha - \frac{r^2}{\lambda + 1}.$$

Donc

$$\overline{CF}^2 = a^2 - \frac{r^2}{\lambda + 1}.$$

La longueur CF est donc constante. Le lieu des foyers de l'axe passant par O se compose donc de deux cercles de centre C et de rayons $\sqrt{a^2 - \frac{r^2}{\lambda' + 1}}$ et $\sqrt{a^2 - \frac{r^2}{\lambda'' + 1}}$.

2° *Si l'axe focal passe par* C, *on a*

$$C^2 = B^2 - A^2 = \frac{r^2}{\lambda + 1} - a^2 \cos^2 \alpha.$$

Dans ce cas,

$$\overline{OF}^2 = \overline{O\omega}^2 + \overline{\omega F}^2 = a^2 \cos^2 \alpha + C^2 = \frac{r^2}{\lambda + 1}.$$

Le lieu des foyers de l'axe passant par C comprend donc deux cercles de centre O et de rayons $\frac{r}{\sqrt{\lambda' + 1}}$ et $\frac{r}{\sqrt{\lambda'' + 1}}$.

En résumé, le lieu total se compose donc :

1° De la ligne des centres;

2° Du cercle (C_1) dont le centre est situé sur la ligne des centres des deux cercles donnés à la distance du centre du cercle (R) égale à $\frac{aR^2}{R^2 - r^2}$, et dont le rayon a pour expression $\frac{aRr}{R^2 - r^2}$;

3° De deux cercles (C_2) et (C_3) ayant leur centre commun au centre du cercle (R) et dont les rayons sont respectivement

$$\sqrt{a^2 - \frac{r^2}{\lambda' + 1}}, \quad \sqrt{a^2 - \frac{r^2}{\lambda'' + 1}};$$

4° De deux cercles (C_4) et (C_5) ayant leur centre commun au centre du cercle (r) et dont les rayons sont respectivement

$$\frac{r}{\sqrt{\lambda'+1}}, \quad \frac{r}{\sqrt{\lambda''+1}}.$$

Mais il convient de remarquer que ces cercles ne sont pas toujours réels.

Ces cercles peuvent être imaginaires, soit comme lieu des foyers de coniques imaginaires, soit comme lieu des foyers imaginaires de coniques réelles.

Sans entrer dans une discusssion algébrique qui serait assez longue, il est facile de se rendre compte géométriquement que, quelle que soit la situation des cercles donnés, le cercle (C_1) est toujours réel.

On peut encore remarquer que *l'excentricité de toutes les coniques est constante.*

En effet, si E désigne l'excentricité, nous avons

$$E^2 = \frac{C^2}{A^2} = \frac{A^2 - B^2}{A^2} = -\frac{1}{\lambda}.$$

Cas particulier où $r = 0$. — Le cercle (C_1) se réduit alors à

$$(X - a)^2 + Y^2 = 0.$$

En effet, le centre du cercle (R) est alors l'un des foyers de toutes les coniques ayant ce centre pour autre foyer et bitangentes au cercle (r).

On a alors

$$\lambda' + 1 = \frac{a^2 - R^2}{a^2}, \qquad \lambda'' + 1 = 0.$$

Le cercle (C_2) a pour rayon

$$\sqrt{a^2 - \frac{r^2}{\lambda'+1}} = a.$$

Le rayon de (C_3) est

$$\sqrt{a^2 - \frac{r^2}{\lambda''+1}} = \frac{0}{0}.$$

On peut lever l'indétermination en écrivant

$$\frac{r^2}{\lambda''+1} = \frac{2a^2r^2}{(a^2+r^2-R^2)-\sqrt{(a^2+r^2-R^2)^2-4a^2r^2}}$$
$$= \frac{(a^2+r^2-R^2)+\sqrt{(a^2+r^2-R^2)^2-4a^2r^2}}{2};$$

par suite

$$\lim\left(\frac{r^2}{\lambda''+1}\right) = (a^2-R^2).$$

Le rayon de (C_3) est donc R.

Le rayon de (C_4) est nul.

Le rayon de (C_5) a pour valeur $\sqrt{a^2-R^2}$.

Ce dernier cercle n'est réel que si $a > R$.

Il en résulte que le lieu du second foyer d'une conique ayant un foyer donné et bitangente à un cercle donné est un cercle, ce qui est évident géométriquement.

Le seul cercle correspondant à des coniques réelles est, dans tous les cas, le cercle (C_2).

Question 1541.

Trouver le lieu des points tels que les quatre normales menées de ces points à une ellipse donnée forment un faisceau harmonique. (L. Mirman.)

SOLUTION

Par M. E.-N. Barisien.

On sait que l'équation aux coefficients angulaires des quatre normales à l'ellipse issues d'un point (α, β) est

$$(1)\quad \begin{cases} b^2\alpha^2 m^4 - 2b^2\alpha\beta m^3 \\ \quad + (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4)m^2 - 2a^2\alpha\beta m + a^2\beta^2 = 0. \end{cases}$$

On peut écrire cette équation

$$m^4 - A m^3 + B m^2 - C m + D = 0,$$

en posant

$$A = \frac{2\beta}{\alpha},$$

$$B = \frac{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4}{b^2\alpha^2},$$

et

$$C = \frac{2\beta a^2}{b^2 \alpha},$$

$$D = \frac{a^2 \beta^2}{b^2 \alpha^2}.$$

On a donc, m_1, m_2, m_3 et m_4 étant les quatre racines de (1),

$$(m_1 + m_2) + (m_3 + m_4) = A,$$

$$(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) + m_1 m_2 + m_3 m_4 = B,$$

$$m_1 m_2 (m_3 + m_4) + m_3 m_4 + (m_1 + m_2) = C,$$

$$(m_1 m_2)(m_3 m_4) = D.$$

Pour que les quatre normales m_1, m_2, m_3, m_4 forment un faisceau harmonique, il faut que

$$(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) = 2 m_1 m_2 + 2 m_3 m_4.$$

Il faut éliminer m_1, m_2, m_3 et m_4 entre ces cinq relations pour avoir la relation qui lie entre eux les coefficients A, B, C et D.

Posons, pour abréger,

$$m_1 + m_2 = P, \qquad m_1 m_2 = R,$$

$$m_3 + m_4 = Q, \qquad m_3 m_4 = S.$$

Alors les cinq relations deviennent

$$P + Q = A, \tag{2}$$

$$PQ + S + R = B, \tag{3}$$

$$RQ + PS = C, \tag{4}$$

$$RS = D, \tag{5}$$

$$PQ = 2(R + S). \tag{6}$$

De (3) et (6) on déduit

$$PQ = \frac{2B}{3}, \tag{7}$$

$$R + S = \frac{B}{3}. \tag{8}$$

On a aussi

$$(P + Q)(R + S) = \frac{AB}{3} = (RQ + PS) + (PR - QS).$$

Par conséquent

$$(9) \qquad PR + QS = \frac{AB}{3} - C.$$

Multiplions membre à membre (4) et (9), il vient

$$PQ(R^2 + S^2) + RS(P^2 + Q^2) = C\left(\frac{AB}{3} - C\right),$$

et, par conséquent, en y remplaçant PQ, RS, (P + Q), (R + S) par leurs valeurs en fonction de A, B, C, D et réduisant, il vient

$$(10) \qquad \frac{2B^3}{27} = \frac{8BD}{3} + \frac{ABC}{3} - A^2D - C^2.$$

En portant dans cette relation les valeurs de A, B, C, D en fonction de α et β, on arrive à l'équation

$$(11) \qquad (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4)^3 + 54c^4a^2b^2\alpha^2\beta^2 = 0.$$

C'est une courbe ayant même point de rebroussement que la développée de l'ellipse et située à l'intérieur de cette développée dont l'équation est

$$(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)^3 + 27c^4a^2b^2x^2y^2 = 0.$$

Dans le cas de la parabole, on aurait trouvé que le lieu a pour équation

$$y^2 = \frac{4(x-p)^3}{27p}$$

alors que la développée a pour équation

$$y^2 = \frac{8(x-p)^3}{27p}.$$

Question 1547.

Soient AA′, BB′ *deux diamètres conjugués d'une ellipse;* MM′ *un diamètre quelconque : les pôles des quatre droites* MA, MA′, M′B, M′B′ *sont situés sur une hyperbole qui passe par le centre de l'ellipse, et est tangente, en ce point, au diamètre* MM′; *le centre de cette courbe est situé sur l'ellipse, et ses asymptotes sont parallèles aux droites* AA′, BB′, *respectivement.* (GENTY.)

SOLUTION.

Par M. X***.

Soient a et b les demi-longueurs des deux diamètres conjugués, pris pour axes de coordonnées; l'équation de l'ellipse sera

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0.$$

Soient d'autre part $a\cos\varphi$ et $b\sin\varphi$ les coordonnées du point M. On trouve très facilement pour les coordonnées des pôles des quatre droites :

Pour le pôle MA :

$$x=a,\qquad y=\frac{b(1-\cos\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Pour le pôle MA' :

$$x=-a,\qquad y=\frac{b(1+\cos\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Pour le pôle de M'B :

$$x=-\frac{a(1+\sin\varphi)}{\cos\varphi},\qquad y=b.$$

Pour le pôle de M'B' :

$$x=-\frac{a(1-\sin\varphi)}{\cos\varphi},\qquad y=-b.$$

Formons maintenant l'équation d'une hyperbole satisfaisant aux conditions spécifiées dans l'énoncé. Rapportée à ses asymptotes, pour axes des x' et des y', son équation sera de la forme

$$x'y'-m^2=0;$$

donc, comme les nouveaux axes sont parallèles aux premiers, et que l'hyperbole doit passer par le centre de l'ellipse, si $x=a\cos\theta$ et $y=b\sin\theta$ sont les coordonnées du point de l'ellipse qui est le centre de l'hyperbole, cette dernière, par rapport aux axes primitifs, aura pour équation

$$xy-bx\sin\theta-ay\cos\theta=0;$$

et il ne reste plus qu'à exprimer que la tangente à l'origine, qui est

$$bx\sin\theta+ay\cos\theta=0,$$

se confond avec le diamètre MM', ce qui donne

$$\tang\theta = -\tang\varphi.$$

Or, si nous prenons $\theta = \pi - \varphi$, l'équation de l'hyperbole devient

$$xy - bx\sin\varphi + ay\cos\varphi = 0,$$

et l'on vérifie aisément que les pôles des quatre droites MA, MA', M'B. M'B' se trouvent sur cette courbe. C. Q. F. D.

Question 1586.

Démontrer que les droites joignant le sommet d'un cône aux centres des sphères osculatrices d'une trajectoire oblique des génératrices sont rencontrées et partagées dans un rapport constant par les rectifiantes de la trajectoire. (CESARO.)

SOLUTION

Par M. E. GENTY.

Soit ρ le vecteur d'un point de la courbe exprimé en fonction de l'arc, le sommet du cône étant pris pour origine.

On aura les relations

$$(1)\qquad \begin{cases} S^2\rho\rho' = \cos^2\theta\, T^2\rho, \\ T^2\rho' = 1, \qquad S\rho'\rho'' = 0, \end{cases}$$

θ étant un angle constant.

En prenant la dérivée de l'équation (1), il vient

$$S\rho\rho'(1 + S\rho\rho'') = S\rho\rho'\cos^2\theta;$$

d'où

$$S\rho\rho'' = -\sin^2\theta$$

et

$$(2)\qquad S\rho\rho''' = 0.$$

Ceci posé, la droite rectifiante est l'intersection du plan

$$(3)\qquad S(\varpi - \rho)\rho'' = 0,$$

avec sa position infiniment voisine. Or, si l'on prend la dérivée de l'équation (3), il vient

$$S(\varpi - \rho)\rho''' = 0.$$

La rectifiante a donc pour équation

$$\varpi = \rho + \mathrm{K}\mathrm{V}\rho''\rho'''.$$

Le centre de la sphère osculatrice a lui-même pour vecteur

$$\gamma = \rho + \frac{\mathrm{V}\rho'''\rho'}{\mathrm{S}\rho'\rho''\rho'''}.$$

Pour que ce vecteur rencontre la rectifiante, il faut qu'on puisse déterminer pour K et l des valeurs telles qu'on ait

$$l\left(\rho + \frac{\mathrm{V}\rho'''\rho'}{\mathrm{S}\rho'\rho''\rho'''}\right) = \rho + \mathrm{K}\mathrm{V}\rho''\rho'''.$$

En projetant avec ρ''', on retrouve la relation (2), ce qui montre que la rencontre a lieu.

Si l'on projette avec ρ'', il vient

$$l(1 + \mathrm{S}\rho\rho'') = \mathrm{S}\rho\rho'';$$

d'où

$$l = -\operatorname{tang}^2\theta.$$

Donc le point de rencontre a pour vecteur

$$\rho = -\gamma\operatorname{tang}^2\theta,$$

et la proposition est démontrée.

Question 1626.

Soit une série

$$\mathrm{F}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

dans laquelle les coefficients a sont positifs. On suppose qu'on ait

$$\lim_{n=\infty} a_n n^p = \mathrm{K},$$

K *étant une constante différente de zéro et p un nombre positif moindre que l'unité. Démontrer que, lorsque x tend vers* 1, *le produit*

$$(1-x)^{1-p} f(x)$$

a pour limite

$$\mathrm{K}\,\Gamma(1-p).$$

(Appell.)

SOLUTION

Par M. E. Cesaro.

Considérons deux séries divergentes, à termes positifs,

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots, \quad b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$$

et supposons que les séries

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \quad b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots,$$

soient convergentes pour $|x| < 1$. Soient $f(x)$ et $g(x)$ leurs sommes. Si

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n} = k,$$

on peut, après avoir fixé le nombre positif ε, arbitrairement petit, trouver un nombre ν, tel que, pour $n > \nu$, on ait toujours

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - k \right| < \varepsilon;$$

et, par suite,

$$\left| \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} - k \right| < \varepsilon,$$

quel que soit x. Il en résulte que, pour n infini, le rapport de $f^{(n)}(x)$ à $g^{(n)}(x)$ tend à devenir constant. Ce rapport tend donc aussi vers une limite, lorsque, n croissant à l'infini, x tend vers l'unité. Or, $f(x)$ et $g(x)$ devenant infinies pour $x = 1$, ainsi que leurs dérivées de tous les ordres, on a, en appliquant la règle de l'Hospital,

$$\lim_{x=1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x=1} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = k.$$

De cette proposition connue on déduit aisément le théorème énoncé par M. Appell. Supposons que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} n^p a_n = k.$$

A cause de la divergence de la série dont le terme général est a_n, cela ne peut arriver que pour $p \leqq 1$.

Si l'on pose

$$g(x) = \frac{x}{1^p} + \frac{x^2}{2^p} + \frac{x^3}{3^p} + \frac{x^4}{4^p} + \ldots,$$

on a

$$\lim_{x=1}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n=\infty} n^p a_n = k.$$

Soit, pour un instant, $f(x)=(1-x)^{p-1}$, de sorte que

$$a_n = \frac{(1-p)(2-p)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots n}.$$

On obtient

$$\lim_{x=1}\frac{g(x)}{(1-x)^{p-1}} = \lim_{n=\infty}\frac{n!\,n^{-p}}{(1-p)(2-p)\ldots(n-p)} = \Gamma(1-p).$$

Donc

$$\lim_{x=1}(1-x)^{1-p}f(x) = \lim_{x=1}\frac{f(x)}{g(x)}\lim_{x=1}\frac{g(x)}{(1-x)^{p-1}} = k\Gamma(1-p).$$

A ce dernier résultat on parvient aussi, d'une manière directe, en considérant la fonction

$$(1-x)^{1-p}f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots.$$

D'après les propriétés des coefficients binômiaux, la somme des $n+1$ premiers coefficients, dans le développement de $(1-x)^{1-p}$, est

$$\alpha_n = \frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p-n-1)}{1.2.3\ldots n},$$

et l'on a

$$\lim_{n=\infty} n^{1-p}\alpha_n = \lim_{n=\infty}\frac{p(1+p)(2+p)\ldots(n-1+p)}{n!\,n^{p-1}} = \frac{1}{\Gamma(p)};$$

puis, en vertu d'un théorème connu [1],

$$\begin{aligned}&\lim_{n=\infty}(a_0\alpha_n + a_1\alpha_{n-1} + \ldots + a_n\alpha_0)\\ &\quad = \Gamma(p)\Gamma(1-p)\lim_{n=\infty} n^p a_n \lim_{n=\infty} n^{1-p}\alpha_n = k\,\Gamma(1-p).\end{aligned}$$

Donc, si l'on observe que

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = a_0\alpha_n = a_0\alpha_n + a_1\alpha_{n-1} + \ldots + a_n\alpha_0,$$

on peut écrire

$$\lim_{x=1}(1-x)^{1-p}f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots = k\,\Gamma(1-p).$$

---

[1] *Bulletin de Darboux*, 1890, p. 117.

Question 1637.

Une droite quelconque rencontre un limaçon de Pascal, dont le point de rebroussement est O, *en quatre points* A, B, C, D.

1° *Quelle que soit la droite, on a la relation*

$$\mathrm{OA} + \mathrm{OB} + \mathrm{OC} + \mathrm{OD} = \text{const.}$$

2° *Si cette droite est de plus tangente à un cercle fixe* C *ayant son centre en* O, *on a aussi*

$$\mathrm{OA}.\mathrm{OB}.\mathrm{OC}.\mathrm{OD} = \text{const.}$$

3° *Cette tangente au cercle* C *rencontre le cercle base de la conchoïde-limaçon en deux points* P *et* Q.

On a la relation

$$\mathrm{OA}.\mathrm{OB}.\mathrm{OC}.\mathrm{OD} = \overline{\mathrm{OP}}^2.\overline{\mathrm{OQ}}^2.$$

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. J. Lemaire.

Prenons pour origine le point double du limaçon et pour axe polaire son axe de symétrie, et soient

$$\rho = a + b\cos\omega$$

l'équation du limaçon, et

$$\text{(D)} \qquad \rho = \frac{p}{\cos(\omega - \alpha)}$$

celle d'une droite quelconque.

De ces équations on tire

$$\cos\omega = \frac{\rho - a}{b},$$

$$\sin\omega = \frac{-\rho^2\cos\alpha + a\rho\cos\alpha + bp}{b\rho\sin\alpha}.$$

Écrivant que la somme des carrés de ces expressions égale 1, nous avons, après calculs,

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\rho^4 - 2a\rho^3 + (a^2 - 2bp\cos\alpha - b^2\sin^2\alpha)\rho^2 \\ &\qquad\qquad + 2abp\cos\alpha\,\rho + b^2p^2 = 0; \end{aligned} \right.$$

si ρ', ρ'', ρ''', ρ^{iv} sont les racines de cette équation, nous avons

$$\rho' + \rho'' + \rho''' + \rho^{\text{iv}} = 2a = \text{const.} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

De plus

$$\rho'\rho''\rho'''\rho^{\text{iv}} = b^2p^2,$$

si la droite (D) est tangente à un cercle fixe de centre O, p est constant; d'où la seconde partie du théorème.

Le cercle base de la conchoïde-limaçon étant

$$\rho = b\cos\omega,$$

nous aurons l'équation aux rayons vecteurs des points communs à ce cercle et à la droite D en faisant $a = 0$ dans (1); on a ainsi

$$\rho^4 - b(2p\cos\alpha + b\sin^2\alpha)\rho^2 + b^2p^2 = 0.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \overline{OP}^2.\overline{OQ}^2 &= b^2p^2 \\ &= OA.OB.OC.OD. \end{aligned} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — On sait qu'un limaçon de Pascal est la transformée par rayons vecteurs réciproques d'une conique ayant son axe pour axe focal et son point double pour foyer; on aurait pu déduire facilement les propriétés du limaçon que nous venons d'établir des propriétés des coniques.

Question 1638.

On considère un cercle fixe C *et un faisceau de cardioïdes ayant toutes même axe de symétrie et même point de rebroussement* O. *La somme des inverses des rayons vecteurs joignant le point* O *au point d'intersection du cercle avec une des cardioïdes est constante.*

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. J. Lemaire.

Prenons pour origine le point de rebroussement, et pour axe polaire l'axe de symétrie, communs aux cardioïdes du faisceau; soit

$$\rho = a(1 + \cos\omega)$$

l'équation de l'une de ces courbes. Soit

$$\rho^2 - (m\cos\omega + n\sin\omega)\rho + p = 0$$

l'équation du cercle C. Éliminant ω entre ces équations, nous obtenons

$$\begin{aligned}[(a-m)^2 + n^2]\rho^4 + 2[(a-m)am - an^2]\rho^3 \\ + [a^2m^2 + 2pa(a-m)]\rho^2 + 2a^2mp\rho + p^2a^2 = 0.\end{aligned}$$

Les racines de cette équation sont les rayons vecteurs des points communs à la cardioïde et au cercle situés à distance finie (les autres points communs sont les points cycliques du plan, points doubles de la cardioïde).

La somme des inverses des racines de l'équation (1) est

$$-\frac{2a^2mp}{p^2a^2} \quad \text{ou} \quad -\frac{2m}{p}.$$

Elle est indépendante de a, d'où le théorème.

Remarque. — Une cardioïde étant la transformée par inversion d'une parabole dont le foyer est le point de rebroussement de la cardioïde, la proposition ci-dessus peut se déduire de la suivante, dont la démonstration directe n'offre d'ailleurs pas de difficulté.

Soient un cercle fixe et un faisceau de paraboles ayant même foyer et même axe; si A, B, C, D sont les points communs à ces courbes, et F le foyer de la parabole, on a, quelle que soit la parabole,

$$FA + FB + FC + FD = \text{const.}$$

Question 1639.

On considère une cardioïde et un point fixe P *dans son plan. Un cercle quelconque ayant son centre en* P *ren-*

contre la cardioïde en huit points. La somme des longueurs des rayons vecteurs joignant ces huit points au point de rebroussement de la cardioïde est constante.

(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. J. LEMAIRE.

La cardioïde admet les points cycliques du plan pour points doubles; elle a avec un cercle quelconque deux points communs en chacun de ces points. La somme des distances de ces quatre points à l'origine est nulle, à cause de la définition des points cycliques.

Les rayons vecteurs des quatre points communs, situés à distance finie, sont les racines de l'équation (1) (*voir* solution de la question 1638). Leur somme est

$$-\frac{2[(a-m)am - an^2]}{(a-m)^2+n^2},$$

expression indépendante de p.

Si le rayon du cercle varie, son centre restant fixe, m et n conservent une valeur constante. Il en est par suite de même de l'expression ci-dessus; d'où le théorème.

Remarque. — De cette propriété, on déduit la suivante :

Si un cercle passant par deux points fixes, et de rayon variable, rencontre en A, B, C, D une parabole de foyer F, on a, quel que soit le rayon,

$$\frac{1}{\mathrm{FA}} + \frac{1}{\mathrm{FB}} + \frac{1}{\mathrm{FC}} + \frac{1}{\mathrm{FD}} = \text{const.}$$

Question 1640.

Lieu géométrique des foyers des coniques qui touchent deux droites fixes chacune en un point fixe.

Cas particuliers. — 1° *Les deux points de contact sont à égale distance du point d'intersection des deux droites données.*

2° *Les deux droites données sont parallèles.* (JAMET.)

SOLUTION

Par M. J. Lemaire.

Soient

Ox, Oy les deux droites fixes;
A le point fixe donné sur Ox;
B le point fixe donné sur Oy.

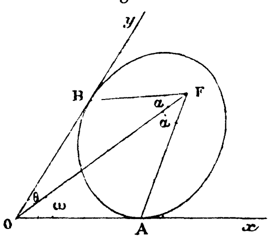
Soit F un foyer d'une conique tangente en A à Ox, en B à Oy :

On sait que FO est bissectrice de $\widehat{BFA}$ ou de son supplément; cette propriété permet de trouver facilement l'équation du lieu demandé en coordonnées polaires, OA étant l'axe, O l'origine.

Supposons que FO soit bissectrice de $\widehat{AFB}$, et désignons OA par a, OB par b, $\widehat{yOx}$ par θ, et les angles $\widehat{AFO}$ et $\widehat{BFO}$ par α: nous avons (*fig.* 1)

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{\rho}{\sin(\omega+\alpha)},$$
$$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{\rho}{\sin(\alpha+\theta-\omega)}.$$

Fig. 1.



Ces relations sont vraies dans tous les cas de figure; elles s'écrivent

$$(\rho - a\cos\omega)\sin\alpha = a\sin\omega\cos\alpha,$$
$$[\rho - b\cos(\theta-\omega)]\sin\alpha = b\sin(\theta-\omega)\cos\alpha;$$

d'où, en éliminant α,

$$(\rho - a\cos\omega)\, b\sin(\theta-\omega) = [\rho - b\cos(\theta-\omega)]\, a\sin\omega.$$

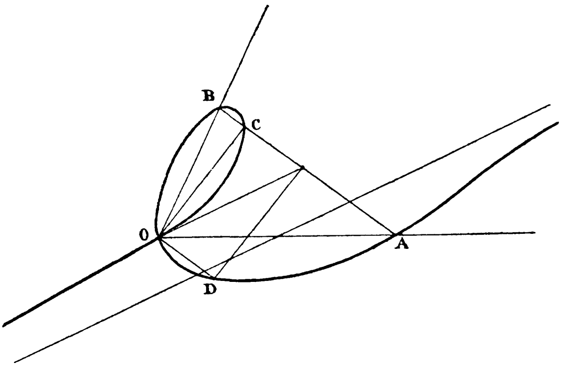
et, par suite,

$$\rho = \frac{ab\sin(\theta - 2\omega)}{b\sin(\theta - \omega) - a\sin\omega}:$$

telle est l'équation du lieu.

Ce lieu est une cubique circulaire facile à construire : elle admet O pour point double, et ses tangentes en ce point sont les bissectrices de $\widehat{yOx}$ et de son supplément; elle passe également par A et B, par la projection C de O sur AB, et sur la perpendiculaire à AB en son milieu (*fig.* 2).

Fig. 2.



Son asymptote est parallèle à la médiane du triangle OAB issue de O.

Cette courbe se présente dans plusieurs questions : elle est en particulier le lieu des points de contact des tangentes, et des pieds des normales issues de O aux coniques ayant pour foyers les points A et B.

Cas où OA = OB. — L'équation de la courbe prend alors la forme

$$\rho = \frac{a\sin(\theta - 2\omega)}{\sin(\theta - \omega) - \sin\omega}$$

ou

$$\rho = \frac{a\cos\left(\frac{\theta}{2} - \omega\right)}{\cos\frac{\theta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2} - \omega\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2} - \omega\right)}.$$

Le lieu se décompose en une droite

$$\sin\left(\frac{\theta}{2} - \omega\right) = 0,$$

bissectrice de $\widehat{yOx}$, et en un cercle

$$\rho = \frac{a\cos\left(\frac{\theta}{2} - \omega\right)}{\cos\frac{\theta}{2}},$$

qui est le cercle circonscrit au triangle OAB.

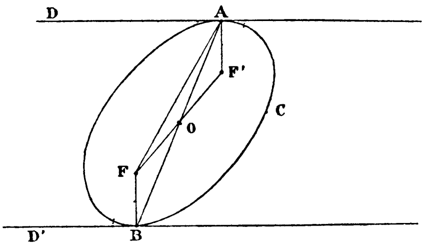
Ce résultat pouvait se prévoir : dans le cas en effet où OA = OB, il est clair que la bissectrice de $\widehat{AOB}$ fait partie du lieu, qui se décompose par suite en une droite et une conique; cette conique est un cercle, puisque la cubique passe par les points cycliques; ce cercle doit d'ailleurs passer par O, A et B.

Cas où les droites sont parallèles. — Soit C une conique tangente à D en A, à D' en B, D' et D étant deux droites parallèles, F et F' les foyers (*fig.* 3). On a

$$\widehat{FAD} = \widehat{FBD'},$$

AF et BF sont les rayons homologues de deux faisceaux homographiques.

Fig. 3.



Le lieu des foyers est dans ce cas une conique passant par A et B. Elle a évidemment pour centre le milieu O de AB.

Les directions pour lesquelles deux rayons homologues sont parallèles sont la direction des droites D et D' et la direction perpendiculaire. Par conséquent le lieu est une hyperbole équilatère de centre O, passant par A et B, et ayant pour asymptotes la droite équidistante de D et D′ et la perpendiculaire à cette droite menée par O.

Question 1642.

Soit une conique inscrite à un triangle ABC *en* A′, B′, C′; *a, b, c les milieux de* BC, CA, AB; *α, β, γ les polaires de a, b, c par rapport à la conique. Démontrer que les trois points* (α, B′C′), (β, C′A′), (γ, A′B′) *sont en ligne droite. Généralisation.* (LEMAIRE.)

SOLUTION

Par M. R. SONDAT.

Appelons I, H, K les points (α, B′C′), (β, C′A′), (γ, A′B′). Comme *a* et A ont pour polaires α et B′C′, I est le pôle de A*a*. De même H et K sont les pôles de B*b* et C*c*.

Pour que les points I, H, K soient en ligne droite il suffit que les droites polaires A*a*, B*b*, C*c* soient concourantes, contion qui est ici remplie.

Question 1646.

Étant donnés trois triangles ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, *homologiques par rapport à un axe, si l'on joint chacun des points du tableau*

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

à son associé mineur, on aura neuf droites concourantes [*l'associé de* A *est le point* (B_1C_2, B_2C_1), (P. SONDAT.)

SOLUTION

Par M. P. SONDAT.

Représentons par

$$(1)\qquad \begin{array}{c} \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \nu_1 \end{array}\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}\ (\text{axe } \lambda_1\mu_1\nu_1)$$

le système des trois triangles homologiques selon l'axe $\lambda\mu\nu$, chacun des centres λ_1, μ_1, ν_1 étant celui des deux triangles non écrits sur l'horizontale où il se trouve, et ces trois centres étant d'ailleurs en ligne droite. Désignons les points *associés* par les lettres grecques correspondantes.

On a les nouveaux systèmes

$$\begin{array}{c|ccc|}K & A_1 & B_1 & C_1 \\ H_1 & A_2 & B_2 & C_2 \\ \lambda_1 & \alpha & \beta & \gamma\end{array}, \quad \begin{array}{c|ccc|}K_1 & A & B & C \\ I & A_2 & B_2 & C_2 \\ \mu_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\end{array}, \quad \begin{array}{c|ccc|}H & A & B & C \\ I_1 & A_1 & B_1 & C_1 \\ \nu_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{array} \text{ (axe } \lambda\mu\nu\text{)},$$

et, par suite

$$\begin{array}{c|ccc|}\lambda'_1 & \alpha & \beta & \gamma \\ \mu'_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \nu'_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{array}\ \lambda\mu\nu.$$

Or le système (1) donne naissance au système inverse

$$\begin{array}{c|ccc|}\lambda & A & A_1 & A_2 \\ \mu & B & B_1 & B_2 \\ \nu & C & C_1 & C_2\end{array}\ \lambda_1\mu_1\nu_1$$

et, par conséquent, aux suivants

$$\begin{array}{c|ccc|}. & B & B_1 & B_2 \\ . & C & C_1 & C_2 \\ \lambda & \alpha & \alpha_1 & \alpha_2\end{array}, \quad \begin{array}{c|ccc|}. & A & A_1 & A_2 \\ . & C & C_1 & C_2 \\ \mu & \beta & \beta_1 & \beta_2\end{array}, \quad \begin{array}{c|ccc|}. & A & A_1 & A_2 \\ . & B & B_1 & B_2 \\ \nu & \gamma & \gamma_1 & \gamma_2\end{array} \text{ (axe } \lambda_1\mu_1\nu_1\text{)},$$

en éliminant les centres inutiles.

Il résulte de là que les droites $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$ passent par le point de rencontre λ_1 des droites A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, ou λ'_1 se confond avec λ_1. De même, μ'_1 se confond avec μ_1 et ν'_1 avec ν_1; en d'autres termes, le système (1) entraîne le suivant

$$(2) \qquad \begin{array}{c|ccc|}\lambda_1 & \alpha & \beta & \gamma \\ \mu_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \nu_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{array}\ \lambda\mu\nu,$$

et on a les triangles homologiques

$$\omega \begin{vmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}, \quad \omega_1 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}, \quad \omega_2 \begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \text{ (axe } \lambda\mu\nu\text{)}.$$

Il reste à prouver que les trois centres ω, ω_1, ω_2 coïncident. En effet, le système

$$(3)\qquad \begin{array}{c|ccc|l} H_1 & A & B & C & \\ \omega & A_1 & B_1 & C_1 & (\text{axe } \lambda\mu\nu), \\ \nu_1 & \alpha & \beta & \gamma & \end{array}$$

traité comme le système (1), entraîne le suivant

$$\begin{array}{c|ccc|l} H_1 & A_2 & B_2 & C_2 & \\ \omega_2 & P & Q & R & \lambda\mu\nu, \\ \nu_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{array}$$

P, Q, R étant les associés de A_1, B_1, C_1 dans (3). Donc ω_2 coïncide avec ω. On prouverait de même que ω_1 se confond avec ω.

Remarque. — En combinant trois à trois les colonnes du tableau

$$\left\{\begin{array}{cccccc} B & B_1 & B_2 & \beta & \beta_1 & \beta_2 \\ C & C_1 & C_2 & \gamma & \gamma_1 & \gamma_2 \end{array}\right.$$

on obtient vingt systèmes de deux triangles homologiques (centre λ) et dont les axes sont les droites

$$(4)\quad \lambda_1\mu_1\nu_1, \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 & H_1 & K \\ \mu_1 & I & K_1 \\ \nu_1 & I_1 & H \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 & I & I_1 \\ \mu_1 & H & H_1 \\ \nu_1 & K & K_1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{cccc} \lambda_1 & H & K_1 & \omega \\ \mu_1 & I_1 & K & \omega \\ \nu_1 & I & H_1 & \omega \end{array}\right.$$

c'est-à-dire que $\lambda_1 H K_1$, $\mu_1 I_1 K$, $\nu_1 I H_1$ sont trois nouvelles droites passant par ω.

Il résulte des droites (4) que dans l'hexagone

$$I \quad I_1 \quad H \quad H_1 \quad K \quad K_1$$

les côtés opposés se coupent aux points λ_1, μ_1, ν_1 en ligne droite, et les diagonales *principales* HK_1, I_1K, IH_1 sont concourantes en ω. Cet hexagone est donc à la fois de Pascal et de Brianchon.

Question 1653.

C *étant le cercle osculateur en un point* M *d'une parabole, démontrer géométriquement que le foyer divise dans le rapport de* 1 *à* 3 *la droite* MD, D *étant le symétrique par rapport à la normale en* M *du point où le cercle* C *rencontre le diamètre de la parabole relatif au point* M.

(E. ROUCHÉ.)

SOLUTION

Par M. P. MICHEL.

Soit O le centre du cercle osculateur; je le projette en A sur la droite MD; on sait que le foyer F est le milieu de la longueur MA. (Question 1561, solution par H. Brocard, *Nouvelles Annales,* septembre 1892.)

Or

$$MD = 2MA;$$

par suite

$$MF = \tfrac{1}{3}FD.$$

C'est ce que l'on demandait de démontrer.

Question 1649.

On donne une ellipse; on prend le triangle ACB *formé par les deux tangentes* CA, CB *à cette courbe et par la corde de contact* AB. *Sur les côtés de ce triangle comme diamètres, on décrit des sphères; elles se coupent en deux points, réels ou imaginaires :*

1° *Quel est le lieu* (M) *de ces points lorsqu'on déplace* AB *parallèlement à la même direction;*

2° *Quel est le lieu des lignes* (M) *lorsqu'on fait varier la direction de* AB.

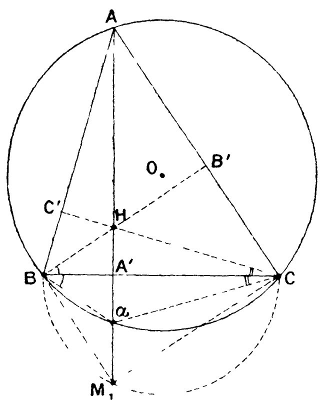
(MANNHEIM.)

SOLUTION.

Par M. X***.

Le lieu des points d'où sont vus sous un angle droit les trois côtés du triangle formé par deux points quelconques d'une ellipse donnée et par le pôle de la corde qui les joint est un cas particulier de la surface de l'onde lumineuse.

En général les deux points M, M', d'où les trois côtés d'un triangle ABC sont vus chacun sous un angle droit, s'obtiendront de la manière suivante : considérant la sphère circonscrite au triangle ABC et ayant son centre O dans le plan de ce triangle, on la coupera par une perpendiculaire au plan du même triangle menée par le point de concours H de ses hauteurs : on aura ainsi deux points N et N'; ces points ne sont pas encore ceux qui sont demandés; mais, pour les obtenir, il suffira de réduire dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ les distances HN et HN'. Ou bien encore



on considérera l'ellipsoïde de révolution aplati, ayant pour équateur le cercle circonscrit au triangle ABC et pour petit axe $\frac{R}{\sqrt{2}}$, et on le coupera par la perpendiculaire au plan du triangle passant par le point de concours H de ses hauteurs.

En effet, soit décrit un demi-cercle sur le côté BC du triangle, et soit la hauteur $\overline{AHA'\alpha}$ prolongée jusqu'en M_1 où elle coupe ce demi-cercle, le triangle BM_1C est rectangle en M_1, et si on le fait tourner autour de son hypoténuse jusqu'à ce que le sommet M_1 vienne en M sur la perpendiculaire élevée en H, je dis que le point M est l'un des points cherchés. Pour le montrer, il suffit de considérer l'expression du carré de la distance $\overline{HM}$,

$$\overline{HM}^2 = \overline{A'M_1}^2 - \overline{HA'}^2.$$

Or, en premier lieu,

$$\overline{A'M_1}^2 = \overline{BA'}.\overline{A'C},$$

et l'on a

$$\overline{BA'} = c \cos B = 2R \cos B \sin C,$$
$$\overline{A'C} = b \cos C = 2R \sin B \cos C;$$

par suite,

$$\overline{A'M_1}^2 = 4R^2 \sin B \cos B \sin C \cos C.$$

On a, d'autre part, $\overline{HA'} = \overline{A'\alpha}$, et

$$\overline{AA'}.\overline{A'\alpha} = \overline{BA'}.\overline{A'C};$$

d'ailleurs la hauteur $\overline{AA'}$ est égale à $2R \sin B \sin C$: il vient donc

$$\overline{A'H} = \overline{A'\alpha} = 2R \cos B \cos C$$

et, conséquemment,

$$\begin{aligned}\overline{HM}^2 &= 4R^2 \cos B \cos C (\sin B \sin C - \cos B \cos C)\\ &= 4R^2 \cos A \cos B \cos C.\end{aligned}$$

La symétrie de cette expression établit l'exactitude de la proposition avancée et le point M, d'où, par construction, le côté $\overline{BC}$ du triangle est vu sous un angle droit, est bien tel que les deux autres côtés en sont vus également sous des angles droits.

La *puissance* du point H par rapport à la sphère considérée est mesurée par $\overline{HN}^2 = \overline{AH}.\overline{H\alpha}$, ou encore $2.\overline{A'\alpha}\,(\overline{AA'} - \overline{A'\alpha})$, c'est-à-dire, en vertu des expressions déjà employées,

$$8R^2 \cos A \cos B \cos C.$$

Il en résulte que l'on a bien

$$\overline{HN} = \overline{HM}.\sqrt{2}.$$

Ces préliminaires étant établis, voici une solution analytique de la question posée.

Soient α, β les coordonnées d'un point A, sa polaire BC a pour équation

$$b^2\alpha x + a^2\beta y - a^2b^2 = 0,$$

celle de l'ellipse étant

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

de sorte qu'il viendra, pour le couple de tangentes $\overline{AB}$, $\overline{AC}$,

$$\begin{aligned}(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2)(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)\\ - (b^2\alpha x + a^2\beta y^2) - a^2b^2 = 0,\end{aligned}$$

et, pour les droites parallèles issues de l'origine,

$$(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2)(b^2x^2 + a^2y^2) - (b^2\alpha x + a^2\beta y)^2 = 0,$$

ou encore, en ordonnant et supprimant a^2b^2, facteur commun,

$$(b^2 - \beta^2)x^2 + 2\alpha\beta xy + (a^2 - \alpha^2)y^2 = 0.$$

Considérant maintenant un point H, de coordonnées ξ, η, j'aurai l'équation du couple de droites $\overline{HB}$, $\overline{HC}$, en transportant d'abord l'origine en H, ce qui donne pour les équations de l'ellipse et de la droite $\overline{BC}$,

$$b^2x^2 + a^2y^2 + 2b^2\xi x + 2a^2\eta y + b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2b^2 = 0$$

et

$$b^2\alpha x + a^2\beta y + b^2\alpha\xi + a^2\beta\eta - a^2b^2 = 0;$$

puis en éliminant, entre ces équations, préalablement rendues homogènes par le changement de x et y en $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, la variable d'homogénéité z, il viendra ainsi

$$\begin{aligned}(b^2x^2 + a^2y^2)(b^2\alpha\xi + a^2\beta\eta - a^2b^2)^2\\ - 2(b\alpha\xi + a^2\beta\eta - a^2b^2)(b^2\xi x + a^2\eta y)(b^2\alpha x + a^2\beta y)\\ + (b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2b^2)(b^2\alpha x + a^2\beta y)^2 = 0,\end{aligned}$$

et, après développement,

$$\begin{aligned}&[(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)\eta^2-2a^2b^2\beta\eta+b^4(a^2-\alpha^2)]x^2\\&\quad-2[(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)\xi\eta-a^2b^2(\beta\xi+\alpha\eta-\alpha\beta)]xy\\&\quad+[(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)\xi^2-2a^2b^2\alpha\xi+a^4(b^2-\beta^2)]y^2=0.\end{aligned}$$

Il faudrait, pour rapporter les droites $\overline{HB}$, $\overline{HC}$ aux axes de l'ellipse, changer dans cette équation x et y en $x-\xi$ et $y-\eta$; mais, comme il suffit de considérer des droites parallèles menées par O, on peut conserver l'équation telle quelle.

Pour qualifier maintenant le point H comme point de concours des hauteurs du triangle ABC, j'écris que des droites $\overline{HB}$, $\overline{HC}$ l'une est perpendiculaire à l'une des droites $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, et l'autre à l'autre. Cette condition de perpendicularité double entre droites de deux couples supposés respectivement représentés par les équations

$$\begin{aligned}ax^2+2hxy+by^2&=0,\\a'x^2+2h'xy+b'y^2&=0\end{aligned}$$

s'exprime en général par l'égalité de rapports

$$\frac{a'}{b}=\frac{-h'}{h}=\frac{b'}{a}.$$

On aura donc ici, introduisant un facteur de proportionnalité ρ,

$$\left\{\begin{aligned}&(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)\xi^2-2a^2b^2\alpha\xi+a^4(b^2-\beta^2)=\rho(b^2-\beta^2),\\&(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)\xi\eta-a^2b^2(\beta\xi+\alpha\eta-\alpha\beta)=\rho\alpha\beta,\\&(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)\eta^2-2a^2b^2\beta\eta+b^4(a^2-\alpha^2)=\rho(a^2-\alpha^2),\end{aligned}\right.$$

équations d'où ξ, η et l'inconnue auxiliaire ρ peuvent être dégagées.

Ce groupe d'équations présente toutefois une ambiguïté que la question ne comporte pas : il est clair, en effet, par la façon même dont ces équations ont été obtenues, que leurs solutions ξ, η conviennent aussi bien au point de concours des normales à l'ellipse en B et C qu'au point de concours des hauteurs du triangle ABC. Mais, pour séparer la solution étrangère, il n'y a qu'à faire entrer en ligne de compte l'équation de la hauteur $\overline{AH}$

$$a^2\beta(\xi-\alpha)=b^2\alpha(\eta-\beta),$$

laquelle n'est vérifiée que par les coordonnées du point cherché.

La deuxième équation du groupe, par exemple, en éliminant η par le moyen de l'équation auxiliaire, deviendra

$$\begin{aligned}&(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)a^2\beta\xi^2\\ &\quad-[(a^2-b^2)(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)+a^2b^2(a^2+b^2)]\alpha\beta\xi\\ &\qquad\qquad-b^2\alpha^2\beta(a^4-\rho)=0,\end{aligned}$$

et elle doit avoir une solution commune avec la première équation du groupe. Si donc on en retranche celle-ci, multipliée par $a^2\beta$, la solution commune sera donnée par l'équation résultante, qui, après suppression d'un facteur commun $b^2\alpha^2+a^2\beta^2-a^2b^2=0$, se réduit simplement à

$$(a^2-b^2)\alpha\xi=a^4-\rho.$$

Reprenant à nouveau la première équation du groupe et y substituant cette expression de $(a^4-\rho)$ en ξ, il vient définitivement

$$\xi=\alpha\,\frac{(a^2-b^2)\beta^2-b^2(a^2+b^2)}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2};$$

et l'on en conclura

$$\eta=\beta\,\frac{-(a^2-b^2)\alpha^2-a^2(a^2-b^2)}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2}\quad(1).$$

Telles sont les formules qui font connaître rationnellement les coordonnées ξ et η du point H en fonction des coordonnées α, β du point A.

(1) Ces valeurs, comparées respectivement à la première et à la troisième équation du groupe primitif, font immédiatement connaître les expressions des coordonnées du point de concours des normales aux extrémités de la corde $\overline{BC}$ en fonction de celles du pôle de cette corde, c'est-à-dire

$$\xi'=\alpha\,\frac{(a^2-b^2)(b^2-\beta^2)}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2},\qquad \eta'=-\beta\,\frac{(a^2-b^2)(a^2-\alpha^2)}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2}.$$

Ou bien, au contraire, on peut obtenir directement ces coordonnées comme celles du point diamétralement opposé à A sur le cercle (ABC), dont l'équation est calculée plus loin, et alors les équations écrites en premier lieu, débarrassées de cette solution, font connaître ξ et η.

Réciproquement, ξ et η étant donnés, on peut en déduire α et β, mais non point rationnellement. Toutefois les équations exprimant α et β en ξ et η ne sont point d'un degré aussi élevé qu'elles peuvent le paraître de prime abord. En effet, multipliant par α et β respectivement les expressions de ξ et η, et faisant la somme, il viendra simplement

$$\alpha\xi + \beta\eta = a^2 + b^2,$$

équation linéaire en α et β comme en ξ et η et qu'il suffit d'adjoindre à l'équation déjà mentionnée

$$a^2\beta(\xi - \alpha) = b^2\alpha(\eta - \beta),$$

laquelle est linéaire en ξ et η seulement, quadratique en α, β.

Puisque à un point H pris arbitrairement dans le plan de l'ellipse correspondent deux triangles ABC et que chaque triangle donne lieu à deux points M et M', d'où les côtés sont vus sous un angle droit, il est clair que la surface cherchée est du quatrième ordre, symétrique par rapport au plan de l'ellipse donnée comme par rapport aux plans perpendiculaires menés suivant ses axes, et enfin qu'elle admet comme ligne d'intersection avec le plan de l'ellipse : 1° cette courbe elle-même; 2° le cercle lieu des angles droits circonscrits à l'ellipse, ou cercle orthoptique.

Quoi qu'il en soit, du reste, et pour achever la solution analytique, je forme l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC. Cette équation rentre dans la forme

$$\begin{aligned}&(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)\\ &\quad + (b^2\alpha x + a^2\beta y - a^2b^2)(\lambda x + \mu y + \nu) = 0,\end{aligned}$$

qui est celle des coniques admettant la corde $\overline{BC}$ en commun avec l'ellipse donnée. Des trois conditions à introduire encore, la première est qu'elle soit vérifiée par les coordonnées α, β du point A, ce qui donne

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu = -1.$$

En écrivant de plus que les termes du second degré sont $x^2 + y^2$ à un facteur constant près, il vient encore

$$\lambda a^2\beta + \mu b^2\alpha = 0$$

et

$$\lambda b^2\alpha - \mu a^2\beta = a^2 - b^2.$$

d'où

$$\lambda = \frac{(a^2 - b^2)\, b^2 \alpha}{b^4 \alpha^2 + a^4 \beta^2},$$

$$\mu = -\frac{(a^2 - b^2)\, a^2 \beta}{b^4 \alpha^2 + a^4 \beta^2},$$

$$\nu = -\frac{a^2 b^2 (\alpha^2 + \beta^2)}{b^4 \alpha^2 + a^4 \beta^2},$$

et pour l'équation cherchée

$$\begin{aligned}(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)(x^2 + y^2) - (\alpha^2 + \beta^2 + a^2 - b^2)\, b^2 \alpha x \\ - (\alpha^2 + \beta^2 - a^2 + b^2)\, a^2 \beta y + (a^2 - b^2)(b^2\alpha^2 - a^2\beta^2) = 0.\end{aligned}$$

Il suffit d'y changer $x^2 + y^2$ en $x^2 + y^2 + 2z^2$ pour obtenir l'équation de l'ellipsoïde de révolution aplati ayant pour équateur le cercle (ABC),

$$\begin{aligned}(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)(x^2 + y^2 + 2z^2) - (\alpha^2 + \beta^2 + a^2 - b^2)\, b^2 \alpha x \\ - (\alpha^2 + \beta^2 - a^2 + b^2)\, a^2 \beta y + (a^2 - b^2)(b^2\alpha^2 - a^2\beta^2) = 0,\end{aligned}$$

et, finalement, l'élimination de α et β entre cette équation et celles qui lient entre elles les coordonnées de A et de H fournira celle de la surface cherchée.

Pour effectuer cette élimination de α et β, je commence par substituer, au contraire, dans l'équation de l'ellipsoïde les expressions de x et de y en α et β, savoir

$$x = \alpha\, \frac{(a^2 - b^2)\beta^2 + b^2(a^2 + b^2)}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2},$$

$$y = \beta\, \frac{-(a^2 - b^2)\alpha^2 + a^2(a^2 + b^2)}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2},$$

mais d'abord seulement dans les termes des degrés zéro et un : il me vient ainsi

$$\begin{aligned}&(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)^2(x^2 + y^2 + 2z^2) \\ &\quad = (\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2)\left[-(a^2 - b^2)\alpha^2\beta^2 + (a^2 + b^2)(b^4\alpha^2 + a^4\beta^2)\right] \\ &\qquad + \left[2a^2b^2(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)(b^2\alpha^2 - a^2\beta^2)\right](b^2\alpha^2 + a^2\beta^2).\end{aligned}$$

Je trouve, d'autre part,

$$\begin{aligned}b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)^2(x^2 + y^2) = (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2 - 2a^2 - 2b^2)\alpha^2\beta^2 \\ + (a^2 + b^2)^2(b^4\alpha^2 + a^4\beta^2),\end{aligned}$$

et, par suite, en faisant la différence j'aurai l'expression de z^2, assez compliquée à première vue, mais qui se simplifie aisément si l'on réfléchit qu'elle admet nécessairement le facteur $\alpha^2+\beta^2-a^2-b^2$. L'autre facteur peut lui-même s'écrire également *a priori*, comme représentant le lieu des pôles des normales à l'ellipse; quoi qu'il en soit, on trouvera

$$z^2=-\frac{(\alpha^2+\beta^2-a^2-b^2)[(a^2-b^2)^2\alpha^2\beta^2-b^6\alpha^2-a^6\beta^2]}{(b^2\alpha^2-a^2\beta^2)^2}.$$

Ainsi les équations de la surface sont ramenées à la forme

$$x=f(\alpha,\beta),\qquad y=f_1(\alpha,\beta),\qquad z=f_2(\alpha,\beta).$$

Mais, pour avoir une seule équation du type $F(x,y,z)=0$, je fais maintenant la somme des expressions dont la différence a donné z^2. J'obtiens, après quelques réductions,

$$(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)(x^2+y^2+z^2)=b^4\alpha^2+a^4\beta^2+a^2b^2(a^2+b^2),$$

et si maintenant je retranche successivement des deux membres les quantités $a^2(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)$ et $b^2(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)$, il me viendra

$$(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)(x^2+y^2+z^2-a^2)=b^2[-(a^2-b^2)\alpha^2+a^2(a^2+b^2)],$$
$$(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)(x^2+y^2+z^2-b^2)=a^2[\;\;(a^2-b^2)\beta^2+b^2(a^2+b^2)],$$

c'est-à-dire, en se reportant aux expressions mêmes de x et y en α et β,

$$\alpha=\frac{a^2x}{x^2+y^2+z^2-b^2},\qquad \beta=\frac{b^2y}{x^2+y^2+z^2-a^2}.$$

Or $\alpha x+\beta y=a^2+b^2$; j'ai donc simplement

$$\frac{a^2x^2}{x^2+y^2+z^2-b^2}+\frac{b^2y^2}{x^2+y^2+z^2-a^2}-(a^2+b^2)=0.$$

C'est, pour un cas particulier, l'équation de la surface de l'onde lumineuse, qu'on pourra aisément ramener à sa forme la plus usuelle

$$\frac{a'^2x^2}{x^2+y^2+z^2-a'^2}+\frac{b'^2y^2}{x^2+y^2+z^2-b'^2}+\frac{c'^2z^2}{x^2+y^2+z^2-c'^2}=0,$$

en prenant $a'^2=a^2+b^2$, $b'^2=a^2$, $c'^2=b^2$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1647. Démontrer que la somme des carrés des coefficients binômiels d'un nombre entier positif a

$$\sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k}^2$$

n'est *jamais* divisible par un nombre premier : $p > 2a$, mais toujours divisible par *tous* les nombres premiers compris entre

$$\frac{2a}{2n+2} \quad \text{et} \quad \frac{2a}{2n+1},$$

où n est un nombre entier positif et $< a$: et que la même somme n'est pas divisible par un même nombre premier p compris entre

$$\frac{2a}{2n+3} \quad \text{et} \quad \frac{2a}{2n+2},$$

excepté, si une puissance de p (supérieure à l'unité) se trouve dans l'intervalle de a jusqu'à $2a$. (C. Szily.)

1648. Démontrer les identités suivantes

1. $$\sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k}^2 = \sum_{k=0}^{k=m} 2^{a-2k} \binom{a}{k} \binom{a-k}{k}$$

où

$$m = \varepsilon\left(\frac{a}{2}\right).$$

2. $$\left\{\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k}^2 &= 2 \sum_{k=0}^{k=a-1} \binom{a}{k} \binom{a-1}{k} \\ &= \frac{2(2a-1)}{a-1} \sum_{k=1}^{k=a-1} \binom{a-1}{k} \binom{a-1}{k-1}. \end{aligned}\right.$$

3. $$\sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k}^2 = \frac{a+1}{a} \sum_{k=1}^{k=a-1} \binom{a}{k}\binom{a}{k-1}.$$

4. $$\sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k}^2 = (-1)^a \sum_{k=0}^{k=2a} (-1)^k \binom{2a}{k}^2.$$

5. $$\frac{\sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k}^2 \sum_{k=0}^{k=b} \binom{b}{k}^2}{\sum_{k=0}^{k=b} \binom{a}{k}\binom{b}{k}} = \sum_{k=-b}^{k=b} (-1)^k \binom{2a}{a-k}\binom{2b}{b-k},$$

où b est un nombre entier positif $< a$. (C. Szily.)

1657. On projette orthogonalement un ellipsoïde sur tous ses plans tangents.

Déterminer :

1° L'équation de la surface qui limite la région occupée par toutes les ellipses de contour apparent ainsi obtenues ;

2° Le nombre des points de contact de cette surface et de l'une de ces ellipses. (Mannheim.)

QUESTIONS RÉSOLUES.

Question 1569 (1).

COMPLÉMENT A LA SOLUTION

Par M. H. Brocard.

Note. — La construction des points M est précisément celle qui détermine pour lieu géométrique de ces points la courbe (1) désignée sous le nom de *Kreuzcurve*.

Il est intéressant de remarquer, à ce sujet, que cette courbe paraît avoir été signalée pour la première fois par Terquem (voir *N. A. M.*, 1847, p. 394, quest. 165).

(1) *Nouvelles Annales*, 3e série, t. XI, p. 43*; 1892.

Question 954.

(Voir 2e série, t. VIII, p. 432.)

Étant données une parabole et une circonférence passant par le foyer et coupant la parabole en quatre points, trouver le lieu des milieux des tangentes communes.

(OLGA ERMANSKA.)

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

L'énoncé textuellement reproduit renferme une indétermination. Il est évident que, pour le compléter, il est nécessaire de spécifier une condition relative aux circonférences, et puisqu'elle est laissée au choix du solutionniste, il y a lieu de prendre la plus simple.

Nous supposerons donc, par exemple, les circonférences de rayon constant R.

L'équation de la parabole rapportée à son axe et à son foyer étant

$$y^2 = 2px + p^2, \tag{1}$$

celle de la circonférence sera

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0 \tag{2}$$

avec la condition

$$\alpha^2 + \beta^2 = R^2. \tag{3}$$

La tangente à la circonférence, parallèle à la direction m, a pour équation

$$y = mx + \beta - m\alpha - R\sqrt{1 + m^2}.$$

Elle est tangente à la parabole (1) sous la condition

$$[p(1 + m^2) - 2m\beta + 2m^2\alpha]^2 = 4m^2 R^2(1 + m^2). \tag{4}$$

Formant les expressions des coordonnées des points de contact avec les deux courbes, on aura, pour tout point du lieu

$$(5) \qquad 2x = \alpha - \frac{Rm}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{p}{2m^2} - \frac{p}{2},$$

$$(6) \qquad 2y = \beta + \frac{R}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{p}{m}.$$

Il restera donc à éliminer m, α, β entre les quatre équations (3), (4), (5), (6), ou, ce qui revient au même, tirer α et β des équations (5), (6), les substituer dans les équations (3), (4) et éliminer m entre deux nouvelles équations.

La nécessité de se débarrasser au préalable des irrationnelles rendra cette élimination fort laborieuse. Nous croyons même qu'il serait impossible, en raison de cette complication, de parvenir à l'équation du lieu sous forme explicite.

Comme autre condition simple relative aux circonférences (2), il y aurait à supposer leurs centres sur l'axe de la parabole.

Les équations précédentes pourront encore nous servir moyennant les substitutions $\beta = 0$, $R = \alpha$; mais les simplifications qui en résultent sont illusoires, et l'élimination finale est tout aussi impraticable.

Nous croyons donc devoir nous borner à ces indications; cependant on peut observer qu'il paraît facile d'obtenir, par un tracé direct, quelques données sur la forme de la courbe, notamment dans la seconde hypothèse. Elle admet alors deux branches infinies, symétriques par rapport à Ox, asymptotes à Oy, extérieures et tangentes à la parabole, et paraboliques du côté des x positifs.

N. B. — M. Barisien a résolu la question en supposant que le cercle au lieu de passer par le foyer a son centre fixe.

Question 1419.

Un triangle ABC *étant donné, on mène d'un point* P *aux côtés* BC, CA, AB *des parallèles qui rencontrent respectivement* AB, BC, CA *en* A′, B′, C′ :

1° *Pour que les trois points* A′, B′, C′ *soient en ligne droite, il faut que* P *se trouve sur une conique déterminée.*

2° *A un point* P *de cette conique correspondent deux* *droites* A′B′C′ : *quel est le lieu de leur point de rencontre quand le point* P *parcourt la conique?*

Cas particulier du triangle ABC *équilatéral.*

(POUJADE.)

SOLUTION

Par M. E.-N. BARISIEN.

1° Prenons le côté CA pour axe des x, le côté CB pour axe des y. Soit θ l'angle ABC et posons $CA = a$, $CB = b$. Si α et β sont les coordonnées du point P, les équations des droites AB, PA′, PB′, PC′ sont respectivement

$$\begin{aligned} bx + ay &= ab, \\ x - \alpha &= 0, \\ y - \beta &= 0, \\ b(x-\alpha) + a(y-\beta) &= 0, \end{aligned}$$

de sorte que les coordonnées des points A′, B′, C′ sont

$$\text{A}' \left\{ \begin{aligned} x &= \alpha, \\ y &= \frac{b(a-\alpha)}{a}; \end{aligned} \right. \qquad \text{B}' \left\{ \begin{aligned} x &= 0, \\ y &= \beta; \end{aligned} \right. \qquad \text{C}' \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a\beta + b\alpha}{b}, \\ y &= 0. \end{aligned} \right.$$

La condition pour que ces trois points A′, B′, C′ soient en ligne droite est exprimée par le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \dfrac{b(a-\alpha)}{a} & 1 \\ 0 & \beta & 1 \\ \dfrac{a\beta + b\alpha}{b} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

lequel développé devient

$$(a\beta + b\alpha)(a\beta + b\alpha - ab) - ab\alpha\beta = 0$$

ou

$$(1) \qquad a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 + ab\alpha\beta - ab(a\beta + b\alpha) = 0.$$

Le lieu de P est donc alors la conique circonscrite à ABC et dont le centre coïncide avec le centre de gravité du triangle. Les tangentes à la conique aux sommets du triangle sont parallèles aux côtés opposés.

2° Les parallèles menées de P aux côtés BC, CA, AB, rencontrent aussi les côtés CA, AB, BC respectivement en A″, B″, C″. En exprimant que les points A″, B″, C″ sont en ligne droite, on retrouve l'équation (1). Il en résulte qu'à chaque point P correspondent deux droites A′B′C′ et A″B″C″.

L'équation de la droite A′B′C′ est

$$\frac{X}{CC'} + \frac{Y}{CB'} = 1.$$

Or

$$CC' = \frac{a\beta + b\alpha}{b}, \qquad CB' = \beta.$$

Donc l'équation de A′B′C′ est

$$b\beta X + (Y - \beta)(a\beta + b\alpha) = 0. \tag{2}$$

Celle de A″B″C″ est de même

$$a\alpha Y + (X - \alpha)(a\beta + b\alpha) = 0. \tag{3}$$

Pour avoir le lieu du point de rencontre des droites A′B′C′ et A″B″C″, il faut éliminer α et β entre (1), (2) et (3).

En résolvant (2) et (3) par rapport à X et à Y, on trouve

$$X = \frac{b\alpha^2(a\beta + b\alpha)}{(a\beta + b\alpha)^2 - ab\alpha\beta}, \qquad Y = \frac{a\beta^2(a\beta + b\alpha)}{(a\beta + b\alpha)^2 - ab\alpha\beta}.$$

Mais (1) peut s'écrire

$$(a\beta + b\alpha)^2 - ab\alpha\beta = ab(a\beta + b\alpha);$$

de sorte que X et Y se réduisent à

$$X = \frac{\alpha^2}{a}, \qquad Y = \frac{\beta^2}{b}.$$

Par conséquent

$$\alpha = \sqrt{aX}, \qquad \beta = \sqrt{bY}.$$

En portant ces valeurs de α et β dans (1), nous avons, après avoir fait disparaître les radicaux,

$$\left\{\begin{aligned} &[(aY + bX)(aY + bX - ab) + abXY]^2 \\ &\quad = 4abXY(aY + bX - ab)^2. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Le lieu des points de rencontre de A′B′C′ et A″B″C″ est donc une quartique passant par les points A, B, C, qui sont des points de rebroussement : la tangente de rebroussement, en chacun de ces points, est la médiane du triangle y aboutissant.

Cas du triangle équilatéral. — Alors $a = b$, $\theta = 60°$. Le lieu du point P devient alors

$$(5) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta = a(\alpha + \beta).$$

C'est le cercle circonscrit au triangle ABC.

Le lieu du point de rencontre des droites A′B′C′ et A″B″C″ devient

$$(6) \qquad [(X + Y)^2 + XY - a(X + Y)]^2 = 4XY(X + Y - a)^2.$$

C'est l'hypocycloïde à trois rebroussements, engendrée par un point d'un cercle de rayon $\frac{a}{3\sqrt{3}}$ roulant à l'intérieur du cercle de rayon $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Questions 1411-1431.

Démontrer que l'expression

$$\frac{1}{n}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^p + \left(\frac{n}{n+2}\right)^p + \ldots\right]$$

tend vers $\frac{1}{p-1}$, *lorsque n augmente indéfiniment.*

(CESARO.)

SOLUTION

Par M. FRANÇOIS BORLETTI, de Milan.

Si x et y désignent les coordonnées rectangulaires et si l'on pose

$$(1) \qquad y = \frac{1}{x^p},$$

l'aire comprise entre la courbe (1), l'axe positif x et les ordonnées, qui répondent aux abscisses $x = n + 1$ et $x = \infty$, sera

$$\int_{n+1}^{\infty} y\, dx = \frac{1}{(p-1)(n+1)^{p-1}}.$$

Si p est un nombre positif, l'ordonnée y de la courbe (1) prend des valeurs toujours plus petites, lorsque l'abscisse x augmente; par conséquent, la somme des rectangles ayant pour base commune l'unité et pour hauteur la dernière ordonnée de chaque rectangle que nous considérons sera

$$\frac{1}{(n+2)^p}+\frac{1}{(n+3)^p}+\ldots<\frac{1}{(p-1)(n+1)^{p-1}};$$

en ajoutant $\frac{1}{(n+1)^p}$ aux deux membres, on aura

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\frac{1}{(n+3)^p}+\ldots\\ <\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(p-1)(n+1)^{p-1}}.\end{aligned}$$

On obtiendra encore que la somme des rectangles, ayant pour hauteur la première ordonnée, sera

$$\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\ldots>\frac{1}{(p-1)(n+1)^{p-1}}.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)^{p-1}}<(p-1)\left[\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\ldots\right]\\ >\frac{1}{(n+1)^{p-1}}+\frac{p-1}{(n+1)^p}.\end{aligned}$$

Donc, si nous multiplions par n^{p-1}, nous obtiendrons

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{p-1}<(p-1)S<\left(\frac{n}{n+1}\right)^{p-1}+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{p-1}\frac{p-1}{n+1},$$

en désignant par S la suite donnée.

Si dans cette expression on fait $n=\infty$, on aura

$$S=\frac{1}{p-1},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Question 1517.

On donne une parabole et une autre conique, et l'on mène les quatre tangentes communes qui touchent la conique en A, A', A'', A'''. *Par le foyer* F *de la parabole, on mène un cercle touchant la conique en* A *et la rencontrant en* B *et* C, *etc. Démontrer que les quatre droites* BC, B' C', ... *concourent en un même point.* (WEILL.)

SOLUTION
Par M. E.-N. BARISIEN.

La question est beaucoup plus générale que ne l'indique l'énoncé.

Nous allons démontrer que :

Étant données une parabole et une conique, une tangente quelconque rencontre la conique aux points A *et* A_1. *Par ces deux points et par le foyer* F *de la parabole on fait passer un cercle. La seconde sécante d'intersection de ce cercle et de la conique passe par un point fixe.*

Soient

$$y^2 = 2px \tag{1}$$

l'équation de la parabole et

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{2}$$

celle de la conique.

Une tangente à la parabole de coefficient angulaire m a pour équation

$$y = mx + \frac{p}{2m}. \tag{3}$$

L'équation générale d'une conique passant par le point d'intersection de la tangente (3) avec la conique (2) est

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F) \\ &\qquad -(ux + vy - 1)\left(y - mx - \frac{p}{2m}\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

dans laquelle le facteur $(ux + vy - 1)$ représente le premier membre de l'équation de la seconde sécante d'intersection.

Exprimons que la conique (4) est un cercle, nous avons les deux conditions

$$(5) \qquad mv - u = 2B\lambda,$$

$$(6) \qquad v + mu = \lambda(A - C).$$

Exprimons aussi que la conique (4) passe par le foyer F, il vient

$$(7) \qquad \lambda(Ap^2 + 4Dp + 4F)m - p(up - 2)(m^2 + 1) = 0.$$

Les équations (5), (6) et (7) sont du premier degré en u, v et λ. On en déduit

$$(8) \qquad \lambda = -\frac{2p(m^2+1)}{Cp^2m + 2Bp^2 + 4Dpm + 4Fm},$$

$$(9) \qquad u = \frac{-2p[m(A-C) - 2B]}{m(Cp^2 + 4Dp + 4F) + 2Bp^2},$$

$$(10) \qquad v = \frac{-2p(2Bm + A - C)}{m(Cp^2 + 4Dp + 4F) + 2Bp^2}.$$

Par suite, l'équation de la seconde sécante d'intersection

$$ux + vy - 1 = 0$$

devient

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} &2px[m(A-C) - 2B] + 2py[2Bm + A - C] \\ &\qquad + m(Cp^2 + 4Dp + 4F) + 2Bp^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Or, cette équation ne contenant que m au premier degré, il en résulte que la seconde sécante d'intersection passe par le point donné par les équations des deux droites rectangulaires

$$(12) \qquad (A - C)x + 2By + \frac{Cp^2 + 4Dp + 4F}{2p} = 0,$$

$$(13) \qquad 2Bx - y(A - C) - Bp = 0.$$

C'est aussi par ce point fixe que passent les sécantes BC, B'C', ... de l'énoncé, lesquelles correspondent aux tangentes de la parabole qui sont en même temps tangentes à la conique donnée.

Remarque. — Lorsque la parabole donnée varie en conservant le même axe et le même sommet, on trouve pour le lieu du point fixe une conique : ce dont il est facile de s'assurer, en éliminant p entre les équations (12) et (13).

Question 1525.

On donne les deux demi-diamètres conjugués OA, OB *d'une ellipse. Du point* B *on abaisse une perpendiculaire sur* OA *et l'on porte sur cette droite les segments* BC *et* BD *égaux à* OA. *La circonférence* COD *rencontre aux points* P, Q *la parallèle menée du point* B *à* OA.

On sait que OP, OQ *donnent les directions des axes de l'ellipse; on demande de démontrer que les projections de* OP *et de* OQ *sur* OC (*ou sur* OD) *sont égales aux demi-axes de l'ellipse.* (MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. E.-N. BARISIEN.

Soit φ l'angle d'anomalie excentrique au point B, l'ellipse étant rapportée à son centre et à ses axes. Supposons le point P sur le grand axe de l'ellipse, et le point Q sur le petit axe. On sait que

$$(1) \qquad \mathrm{OP} = \frac{a}{\cos\varphi}, \qquad \mathrm{OQ} = \frac{b}{\sin\varphi},$$

$$\overline{\mathrm{OB}}^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi,$$

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{OA}}^2 = a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi.$$

On sait aussi que le lieu des excentricités C et D se compose des deux cercles de rayons respectifs $(a-b)$ et $(a+b)$. Ainsi

$$\mathrm{OC} = a - b, \qquad \mathrm{OD} = a + b.$$

Je dis maintenant que les droites OC et OD sont également inclinées sur le grand axe de l'angle excentrique φ.

En effet, si α désigne l'angle de la normale en B avec OP, on a

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{a\sin\varphi}{b\cos\varphi}.$$

D'où

$$(2) \qquad \cos\alpha = \frac{b\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}} = \frac{b\cos\varphi}{\mathrm{OA}}.$$

Projetons le triangle DOB sur OP, il vient

$$\mathrm{OD}\cos\widehat{\mathrm{DOP}} = a\cos\varphi + \mathrm{BD}\cos\alpha = a\cos\varphi + \mathrm{OA}\cos\alpha.$$

Donc, d'après (2),

$$(a+b)\cos\widehat{\mathrm{DOP}} = a\cos\varphi + b\cos\varphi.$$

On a bien, par conséquent,

$$\widehat{\mathrm{DOP}} = \varphi.$$

On trouverait de même

$$\widehat{\mathrm{COP}} = \varphi.$$

Si nous projetons P et Q et P′ et Q′ sur OC, on a

$$\mathrm{OP}' = \mathrm{OP}\cos\varphi,$$
$$\mathrm{OQ}' = \mathrm{OQ}\sin\varphi.$$

Donc, d'après la relation (1),

$$\mathrm{OP}' = a,$$
$$\mathrm{OQ}' = b.$$

Si P et Q se projettent sur OD en P″ et Q″, on a évidemment

$$\mathrm{OP}'' = \mathrm{OP}' = a,$$
$$\mathrm{OQ}'' = \mathrm{OQ}' = a,$$

puisque la droite OP est bissectrice de l'angle COD.

TABLE DES MATIÈRES DES EXERCICES.

Questions proposées.

Questions résolues.

19001 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.