WEILL

Propriété d'une classe de courbes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 93-95

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__93_0>

PROPRIÉTÉ D'UNE CLASSE DE COURBES;

PAR M. WEILL.

THÉORÈME. — *Si l'on coupe la courbe qui a pour équation* $y^m = x^p$ *par une droite quelconque, et si l'on mène les tangentes à la courbe aux points d'intersection, elles forment un polygone dont tous les sommets sont sur une courbe qui a pour équation* $y^m = kx^p$; *en particulier, si la droite est tangente à la courbe, on a* $k = 1$.

Un point de la courbe a pour coordonnées

$$x = \theta^m, \qquad y = \theta^p.$$

L'équation qui donne les valeurs de θ relatives aux points de rencontre d'une droite $x = Ay + B$ et de la courbe est

$$\theta^m = A\theta^p + B.$$

La tangente au point θ a pour équation

$$(p - m)\theta^m - px + my\theta^{m-p} = 0.$$

Considérons deux points de rencontre θ, θ', et posons $\theta^p = \lambda$, $\theta'^p = \lambda'^p$, nous aurons

$$\theta^m = A\theta^p + B,$$
$$\theta'^m = A\theta'^p + B.$$

d'où

$$(\theta\theta')^{mp} = [(A\theta^p + B)(A\alpha'^p + B)]^p$$

ou

(1) $$(\lambda\lambda')^m = [(A\lambda + B)(A\theta' + B)]^p.$$

D'autre part, les tangentes aux deux points ont pour équations

$$(p-m)\theta^m - px + my\,\theta^{m-p} = 0,$$
$$(p-m)\theta'^m - px + my\,\theta'^{m-p} = 0;$$

remplaçons dans ces équations θ^p par λ et θ^m par $A\lambda + B$, nous aurons

$$(p-m)(A\lambda + B) - px < my\,\frac{A\lambda + B}{\lambda} = 0$$

ou

$$(2)\quad A\lambda^2(p-m) - \lambda[B(p-m) - px + Amy] + Bmy = 0;$$

dans cette équation, x, y sont les coordonnées du point de rencontre des deux tangentes, et cette équation admet pour racines λ et λ'; donc

$$\lambda\lambda' = \frac{Bmy}{A(p-m)},$$
$$\lambda + \lambda' = \frac{B(p-m) - px + Amy}{A(m-p)};$$

transportons ces valeurs dans l'équation (1), nous voyons que les coordonnées (x, y) vérifient l'équation

$$\left[\frac{Bmy}{A(p-m)}\right]^m = \left[\frac{A^2Bmy}{A(p-m)} - \frac{B(p-m) - px + Amy}{A(p-m)}\,AB + B^2\right]^p$$

ou

$$y^m = x^p\,\frac{p^p(p-m)^{m-p}A^{m-p}}{m^m B^m}.$$

Il est facile de vérifier que le coefficient de x^p est 1 si la droite est tangente à la courbe donnée.

Remarques. — 1° En transformant la courbe en elle-même par polaires réciproques, on a l'énoncé suivant : Si d'un point du plan on mène à la courbe des tangentes, les droites qui joignent deux à deux les points de contact sont tangentes à une courbe de même espèce.

2° En transformant homographiquement, on a la courbe

$$\alpha^m = \beta^p \gamma^{m-p},$$

α, β, γ désignant trois fonctions linéaires ; en appliquant ensuite la transformation du deuxième ordre définie par les formules

$$x = y'z', \qquad y = x'z', \qquad z = x'y',$$

qui transforme la courbe en elle-même, on a un énoncé où les droites sont remplacées par des coniques passant par les trois points fondamentaux.

3° L'équation $y^m = x^p$ peut s'écrire $y = x^k$, k étant quelconque, entier ou fractionnaire; mais le théorème est encore vrai si l'on suppose k incommensurable : la courbe est alors transcendante, et le nombre des sommets du polygone demeure infini.

4° Lorsque la droite $x = Ay + B$ se déplace en restant tangente à la courbe

$$y^m = \lambda x^p,$$

si, aux points où elle coupe la courbe $y^m = x^p$, on mène les tangentes, le lieu des sommets du polygone formé par ces tangentes est la courbe

$$y^m = \lambda' x^p.$$

5° Si, aux points où une droite $x = Ay + B$ coupe la courbe $y^m = x^p$, on mène les normales, les sommets du polygone formé par ces normales sont sur la courbe

$$(B - x)^m = \lambda (Ay + B)^p.$$