Nouvelles annales de mathématiques

GÉRARD

Sur la géométrie non euclidienne

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 74-84

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__74_1>

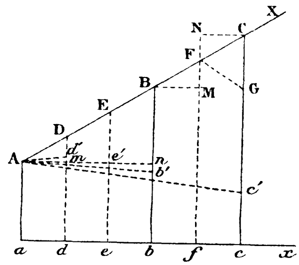
SUR LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE;

PAR M. GÉRARD.

On sait (*voir* le *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse, Note 2 de la 6e édition) que la somme des angles d'un triangle rectiligne est ou bien égale à deux angles droits pour tous les triangles, ou bien moindre que deux angles droits pour tous les triangles. Nous prendrons pour point de départ la seconde hypothèse; par conséquent, la somme des angles d'un polygone de n côtés sera supposée moindre que $2n-4$ angles droits.

LEMME I. — *Étant données deux demi-droites* AX, ax (*fig.* 1) *faisant avec* Aa, *la première, un angle*

Fig. 1.



droit ou obtus, la deuxième, un angle droit; si l'on prend sur AX, *à partir du point* A, *un segment va-*

riable AB, *que l'on projette en ab sur ax, les trois quantités*

$$Bb, \quad \frac{AB}{ab}, \quad \frac{Bb - Aa}{AB}$$

augmentent en même temps que AB.

En effet, soit $AC > AB$, et abaissons Cc perpendiculaire sur ax.

1° $Cc > Bb$. — Car élevons au milieu f de bc une perpendiculaire qui rencontre BC en un point F, et plions le quadrilatère $BFfb$ autour de Ff, le point B vient coïncider avec un point G de Cc; il faut prouver que le point G est situé entre C et c, ou que l'angle fFG est moindre que fFC. Or $fFG = fFA$, et, dans le quadrilatère $AFfa$, qui a deux angles droits a, f et un angle A droit ou obtus, il faut bien que l'angle F soit aigu, puisque la somme des angles d'un quadrilatère est supposée moindre que quatre angles droits. Ainsi l'angle fFA, étant aigu, est moindre que son supplément fFC. C. Q. F. D.

2° $\frac{AC}{ac} > \frac{AB}{ab}$. — En effet, supposons, par exemple,

$$\frac{bc}{ab} = \frac{2}{3};$$

et soit

$$ad = de = eb = bf = fc;$$

par les points d, e, f, menons des perpendiculaires à ax, qui rencontrent AX en D, E, F. Tout revient à démontrer que les segments AD, DE, ... vont en croissant à mesure qu'on s'éloigne du point A; par exemple, $FC > FB$.

Or, dans le quadrilatère $BCcb$, qui a déjà deux angles droits, l'angle C doit être moindre que le supplément de l'angle bBC, c'est-à-dire moindre que bBA ou

FGC. Par conséquent

$$FC > FG = FB.$$

Ainsi

$$\frac{BC}{AB} > \frac{bc}{ab}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{AC}{AB} > \frac{ac}{ab}. \qquad \text{C. F. Q. D.}$$

3° $\dfrac{Cc - Aa}{AC} > \dfrac{Bb - Aa}{AB}$. — En effet, supposons, par exemple,

$$\frac{BC}{AB} = \frac{2}{3};$$

et soit

$$AD = DE = EB = BF = FC;$$

menons Dd, Ee, ... perpendiculaires sur ax. Tout revient à démontrer que la différence entre deux perpendiculaires consécutives va en croissant, à mesure qu'on s'éloigne du point A ; par exemple, que

$$Ff - Bb < Cc - Ff.$$

Or, comme $BF = FC$, si l'on abaisse BM et CN perpendiculaires sur Ff, les triangles BFM, CFN sont égaux ; donc

$$FM = FN \qquad \text{ou} \qquad Ff - Mf = Nf - Ff;$$

comme

$$Mf < Bb \qquad \text{et} \qquad Nf < Cc \ (1^{\circ}),$$

on en déduit

$$Ff - Bb < Cc - Ff.$$

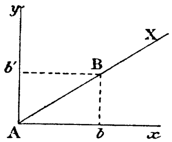
Ainsi

$$\frac{Cc - Bb}{Bb - Aa} > \frac{BC}{AB}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{Cc - Aa}{Bb - Aa} > \frac{AC}{AB}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On traiterait sans peine le cas où BC et AB n'ont pas de commune mesure.

Cas particulier. — Les conclusions précédentes subsistent quand les points A et a se confondent. Donc, si l'on prend sur l'un des côtés d'un angle, à partir du sommet, un segment variable AB (*fig.* 2), que l'on projette en $\mathrm{A}b$ sur l'autre côté, les rapports $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A}b}$, $\frac{\mathrm{B}b}{\mathrm{AB}}$ di-

Fig. 2.



minuent en même temps que AB. De même, en projetant le point B en b' sur la perpendiculaire à $\mathrm{A}x$ au point A, on voit que le rapport $\frac{\mathrm{A}b'}{\mathrm{AB}}$ augmente à mesure que AB diminue. Donc, si l'on fait tendre AB vers zéro, le rapport $\frac{\mathrm{B}b}{\mathrm{BA}}$, qui va en décroissant et qui reste supérieur au rapport *croissant* $\frac{\mathrm{A}b'}{\mathrm{AB}}$, tend vers une limite *différente de zéro*.

Lemme II. — *Revenons à la fig.* 1, *et abaissons* $\mathrm{A}b'$ *perpendiculaire sur* $\mathrm{B}b$, *je dis que* $\frac{\mathrm{A}b'}{ab}$ *diminue lorsque* ab *augmente, le point* A *restant fixe, c'est-à-dire que, en abaissant* $\mathrm{A}c'$ *perpendiculaire sur* $\mathrm{C}c$, *on a*

$$\frac{\mathrm{A}c'}{ac} < \frac{\mathrm{A}b'}{ab}.$$

En effet, supposons toujours

$$\frac{bc}{ab} = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad ad = de = eb = bf = fc,$$

puis abaissons $\mathrm{A}d'$, $\mathrm{A}e'$, ... perpendiculaires sur $\mathrm{D}d$, $\mathrm{E}e$, ...; tout revient à démontrer que la différence entre deux perpendiculaires va en diminuant, à mesure qu'on s'éloigne du point A, par exemple,

$$\mathrm{A}b' - \mathrm{A}e' < \mathrm{A}e' - \mathrm{A}d'.$$

Or, en appelant m et n les points de rencontre de Ae' avec Dd et Bb, il est clair que $me' = ne'$, et par conséquent

$$Ab' - Ae' < e'n = e'm < Ae' - Ad'. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ceci posé, supposons que les droites AX et ax (*fig.* 1) soient toutes deux perpendiculaires à Aa, et faisons tendre AB vers zéro, le rapport $\frac{AB}{ab}$, qui va constamment en décroissant, tend vers une limite *à laquelle il reste constamment supérieur;* soit $f(aA)$ cette limite qui ne dépend que de aA.

D'autre part, le rapport $\frac{Ab'}{ab}$ augmente à mesure que ab diminue, tout en restant inférieur à $\frac{AB}{ab}$, donc

$$\frac{Ab'}{ab} < f(aA).$$

J'en conclus d'abord $f(aA) > 1$; ensuite, de même que, dans le quadrilatère trirectangle $Ab'ba$, $\frac{Ab'}{ab}$ est moindre que $f(aA)$, de même, dans le quadrilatère trirectangle $ABba$, $\frac{AB}{ab}$ est moindre que $f(bB)$. Ainsi

$$(1) \qquad f(Aa) < \frac{AB}{ab} < f(bB).$$

Reste à déterminer la forme de la fonction f. Pour cela, je vais montrer qu'elle satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(2) \qquad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),$$

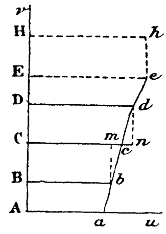
quelles que soient les deux longueurs x et y.

Sur l'un des côtés d'un angle droit uAv (*fig.* 3), prenons trois longueurs

$$AB = x - y, \qquad AC = x, \qquad AD = x + y;$$

sur la perpendiculaire à AD au point D, prenons un point arbitraire d, abaissons da perpendiculaire sur Au,

Fig. 3.



et soient b, c les points de rencontre de ad avec les perpendiculaires à AD aux points B et C; enfin abaissons bm et dn perpendiculaires sur Cc.

1° Comme BC = CD, le lemme I nous apprend que bc est moindre que cd, par conséquent, mc moindre que cn; donc

$$2\mathrm{C}c < \mathrm{C}m + \mathrm{C}n.$$

Or

$$\frac{\mathrm{D}d}{\mathrm{C}n} > \frac{\mathrm{B}b}{\mathrm{C}m} > f(y);$$

donc

$$\mathrm{D}d + \mathrm{B}b > 2\mathrm{C}c\, f(y),$$

d'où, en divisant par Aa et faisant tendre Dd vers zéro,

$$f(x+y) + f(x-y) \geqq 2f(x)\, f(y).$$

2° Posons $\frac{cd}{bc} = \mu$, le lemme I nous apprend aussi que $\frac{cn}{cm}$ est moindre que μ, donc

$$\mathrm{C}c > \frac{\mathrm{C}n + \mu\mathrm{C}m}{1+\mu}.$$

Or prenons sur le prolongement de ad un point quelconque e, que nous projetons en E sur AD; prenons, sur le prolongement de AE, une longueur EH $= y$;

enfin projetons le point e en h sur la perpendiculaire à AH au point H; nous aurons

$$\frac{\mathrm{B}b}{\mathrm{C}m} < \frac{\mathrm{D}d}{\mathrm{C}n} < \frac{\mathrm{E}e}{\mathrm{H}h},$$

d'où

$$\mathrm{D}d + \mu \mathrm{B}b < (1+\mu)\mathrm{C}c\,\frac{\mathrm{E}e}{\mathrm{H}h}$$

ou

$$\frac{\mathrm{D}d}{\mathrm{A}a} + \mu\frac{\mathrm{B}b}{\mathrm{A}a} < (1+\mu)\frac{\mathrm{C}c}{\mathrm{A}a}\,\frac{\mathrm{E}e}{\mathrm{H}h};$$

d'où, en faisant tendre Ee vers zéro, le point E *restant fixe,* et, en remarquant que μ tend vers 1, car

$$1 < \mu < \frac{cd}{\mathrm{CD}} < \frac{\mathrm{CD} + \mathrm{C}c + \mathrm{D}d}{\mathrm{CD}} < 1 + 2\frac{\mathrm{E}e}{\mathrm{CD}},$$

on trouve

$$f(x+y) + f(x-y) \leqq 2f(x)f(y).$$

Donc enfin

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ceci posé, soit a une ligne quelconque, comme $f(a) > 1$, on peut trouver un nombre positif α, tel que

$$f(a) = \frac{1}{2}(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) = \operatorname{ch}\alpha;$$

ensuite, en calculant successivement $f(2a)$, $f(3a)$, ... par la formule (2), on trouve

$$f(na) = \operatorname{ch} n\alpha;$$

d'où l'on déduit

$$f\left(\frac{1}{n}a\right) = \operatorname{ch}\frac{\alpha}{n}, \qquad f\left(\frac{m}{n}a\right) = \operatorname{ch}\frac{m}{n}\alpha$$

et, en général,

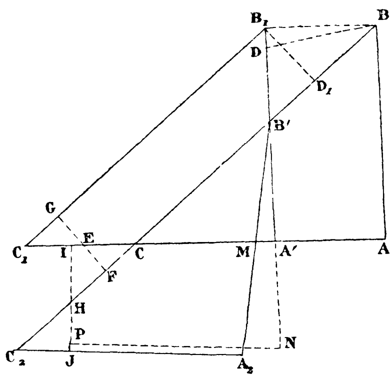
$$f(x) = \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\alpha\right).$$

quelle que soit la longueur x. Si donc on désigne par k la longueur $\frac{1}{\alpha}a$, que Bolyai appelle l'*unité naturelle* de longueur, on aura

$$f(x) = \operatorname{ch}\frac{x}{k}. \tag{3}$$

Cherchons maintenant la relation qui existe entre les trois côtés d'un triangle ABC rectangle en A (*fig.* 4). D'un point B′ pris sur le prolongement de l'hypoténuse, abaissons B′A′ perpendiculaire sur AC; faisons glisser le

Fig. 4.



triangle A′B′C le long de AC jusqu'en AB_1C_1, puis le long de BC jusqu'en A_2BC_2. Puis, par le milieu E de CC_1, menons à BC une perpendiculaire EF, qui sera aussi perpendiculaire à B_1C_1 en un point G tel que $EF = EG$. De même, la perpendiculaire HI à la droite AC, menée par le milieu de CC_2, est aussi perpendiculaire à A_2C_2 en un point J, tel que $HI = HJ$. Enfin menons B_1D_1 perpendiculaire à BC et B′D perpendiculaire sur AB; nous avons vu que, si l'on fait tendre BB′ vers zéro, on a

$$\lim\frac{B'D}{BB'} = \lim\frac{B_1D_1}{BB_1};$$

de même, $\frac{IH}{CH}$ et $\frac{EF}{EC}$ tendent vers la même limite; donc

$$\lim \frac{IJ}{CC_2} = \lim \frac{FG}{CC_1},$$

d'où, en divisant membre à membre et en remarquant que $CC_2 = BB'$ et $CC_1 = AA'$,

$$(4) \qquad \lim \frac{B'D}{AA'} \lim \frac{BB_1}{IJ} = \lim \frac{B_1D_1}{FG}.$$

Or, en appliquant les formules (1) et (3) au quadrilatère trirectangle $AA'B'D$, on a

$$\text{ch}\frac{AD}{k} < \frac{B'D}{AA'} < \text{ch}\frac{A'B'}{k};$$

donc, si l'on fait tendre BB' vers zéro, $\frac{B'D}{AA'}$ tend vers $\text{ch}\frac{AB}{k}$; de même, en considérant le quadrilatère FGB_1D_1, on voit que $\frac{B_1D_1}{FG}$ tend vers $\text{ch}\frac{BC}{k}$.

Reste $\frac{BB_1}{IJ}$; comme $AB_1 = A_2B$, en appelant M le point de rencontre de A_2B avec AC, on voit que $BB_1 > A_2M$, donc

$$\frac{BB_1}{IJ} > \frac{A_2M}{IJ} > \text{ch}\frac{JA_2}{k};$$

d'autre part, en prenant sur le prolongement de BA une longueur $AN = BB_1$, et en abaissant NP perpendiculaire sur IJ, on a aussi

$$\frac{BB_1}{IP} = \frac{AN}{IP} < \text{ch}\frac{PN}{k};$$

mais, comme $BN = BA_2$, le point N tombe dans l'angle BC_2A_2 et le point P, entre I et J; donc $IP < IJ$, et l'on a, *a fortiori*,

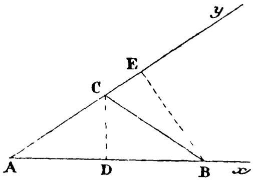
$$\frac{BB_1}{IJ} < \operatorname{ch}\frac{PN}{k} < \operatorname{ch}\frac{PI + IA + AN}{k}.$$

Les relations précédentes montrent que $\frac{BB_1}{IJ}$ tend vers $\operatorname{ch}\frac{AC}{k}$; et alors l'équation (4) donne

$$(5) \qquad \operatorname{ch}\frac{AB}{k}\operatorname{ch}\frac{AC}{k} = \operatorname{ch}\frac{BC}{k}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Considérons maintenant un triangle quelconque ABC (*fig.* 5); supposons l'angle A aigu et menons la hau-

Fig. 5.



teur CD. En appliquant la formule (5) aux triangles rectangles BCD, ACD, on a

$$\operatorname{ch}\frac{BC}{k} = \operatorname{ch}\frac{CD}{k}\operatorname{ch}\frac{AB - AD}{k},$$
$$\operatorname{ch}\frac{AC}{k} = \operatorname{ch}\frac{CD}{k}\operatorname{ch}\frac{AD}{k};$$

d'où, en se servant des notations et des formules

$$\operatorname{sh}x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \qquad \operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x},$$
$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch}x\operatorname{ch}y \pm \operatorname{sh}x\operatorname{sh}y,$$

on déduit

$$\operatorname{ch}\frac{BC}{k} = \operatorname{ch}\frac{AB}{k}\operatorname{ch}\frac{AC}{k} - \operatorname{sh}\frac{AB}{k}\operatorname{sh}\frac{AC}{k}\,\frac{\operatorname{th}\frac{AD}{k}}{\operatorname{th}\frac{AC}{k}}.$$

De même, en abaissant la hauteur BE, on a

$$\operatorname{ch}\frac{BC}{k} = \operatorname{ch}\frac{AB}{k}\operatorname{ch}\frac{AC}{k} - \operatorname{sh}\frac{AB}{k}\operatorname{sh}\frac{AC}{k}\,\frac{\operatorname{th}\frac{AE}{k}}{\operatorname{th}\frac{AB}{k}};$$

donc

$$\frac{\operatorname{th}\frac{AD}{k}}{\operatorname{th}\frac{AC}{k}} = \frac{\operatorname{th}\frac{AE}{k}}{\operatorname{th}\frac{AB}{k}},$$

c'est-à-dire que la valeur commune de ces deux rapports ne dépend pas des longueurs AB ou AC, mais seulement de l'angle A : c'est cette valeur qu'on appelle le *cosinus* de l'angle A, de sorte que

$$\operatorname{ch}\frac{BC}{k} = \operatorname{ch}\frac{AB}{k}\operatorname{ch}\frac{AC}{k} - \operatorname{sh}\frac{AB}{k}\operatorname{sh}\frac{AC}{k}\cos A.$$

En supposant l'angle A obtus, on arriverait à la même formule, à condition de définir le cosinus d'un angle obtus comme égal au cosinus du supplément de cet angle *précédé du signe* —.

Ainsi les côtés a, b, c et les angles A, B, C d'un triangle sont liés par les relations

$$\operatorname{ch}\frac{a}{k} = \operatorname{ch}\frac{b}{k}\operatorname{ch}\frac{c}{k} - \operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{sh}\frac{c}{k}\cos A,$$

$$\operatorname{ch}\frac{b}{k} = \operatorname{ch}\frac{c}{k}\operatorname{ch}\frac{a}{k} - \operatorname{sh}\frac{c}{k}\operatorname{sh}\frac{a}{k}\cos B,$$

$$\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k} - \operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}\cos C.$$