Nouvelles annales de mathématiques

Audibert

Concours d'admission à l'École centrale en 1893 (deuxième session). Solution de la question de géométrie analytique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 520-522

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__520_0>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1893 (DEUXIÈME SESSION). SOLUTION DE LA QUESTION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE (¹);

PAR M. AUDIBERT.

1° Les deux droites

$$(1)\qquad \lambda(y-b)^2+(x-a)^2=0,$$

de direction $\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}$ et $\frac{-1}{\sqrt{-\lambda}}$, se coupant au point fixe (a, b) centre commun aux coniques Δ, on aura, pour déterminer les coefficients des coniques tangentes à l'axe des x,

$$x^2+2mxy+2Dx+2Ey-D^2=0,$$

les relations

$$C=-\lambda,$$
$$a+mb+D=0,$$
$$ma-\lambda b+E=0;$$

d'où résultera l'équation

$$(\Delta)\qquad \left\{\begin{aligned} &x^2+2mxy-\lambda y^2-2(a+mb)x\\ &\qquad -2(ma-\lambda b)y+(a+mb)^2=0.\end{aligned}\right.$$

On voit qu'elle est du second degré en m; on en conclut que par chaque point (x, y) du plan passent deux coniques Δ réelles ou imaginaires.

2° En particulier, pour celles passant par le point (o, q), les deux paramètres m' et m'' seront racines de

$$b^2m^2-2a(q-b)m+a^2-\lambda q(q-2b)=0.$$

(¹) *Voir* l'énoncé p. 352.

On en tire

$$(2) \quad m' + m'' = \frac{2a(q-b)}{b^2}, \qquad m'm'' = \frac{a^2 - \lambda q(q-2b)}{b^2}.$$

Les polaires de l'origine relatives à ces deux coniques ont respectivement pour équations

$$2(a + m'b)x + 2(m'a - \lambda b)y - (a + m'b)^2 = 0,$$
$$2(a + m''b)x + 2(m''a - \lambda b)y - (a + m''b)^2 = 0.$$

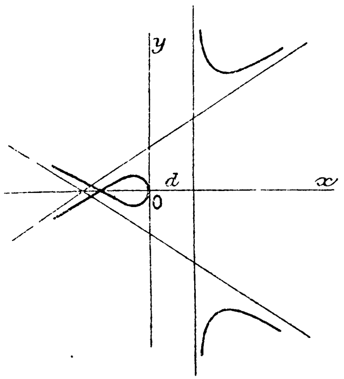
En les combinant avec (2), on éliminera m' et m'', et, pour déterminer les coordonnées du point de rencontre de ces deux polaires, on aura les égalités

$$bx + ay = q,$$
$$2ax - a\lambda by = \lambda q(q - 2b).$$

Le lieu de ces points, quand on fait varier q, est la parabole

$$(\mathrm{P}) \qquad \lambda(bx + ay)^2 - 2ax(a^2 + \lambda b^2) = 0.$$

Quelle que soit la valeur de λ, les courbes P toucheront l'axe des y à l'origine, leurs diamètres auront la direction fixe $\frac{-b}{a}$, et celui d'entre eux qui est conjugué à cet axe demeure invariable.



3° Cherchons le lieu des points de contact avec (P) des tangentes de direction $\frac{a}{\lambda b}$, λ étant fixe, a et b variables, mais liés par la relation

$$a = pb^2.$$

Soient x et y les coordonnées d'un de ces points, on aura

$$-\frac{\lambda(bx+a)b - a(a^2+\lambda b^2)}{\lambda(bx+ay)a} = \frac{a}{\lambda b}.$$

L'élimination de a et de b entre les trois relations qui précèdent donne

$$y = \pm \frac{\lambda + 2px}{\sqrt{2\lambda p}} \sqrt{\frac{x}{\lambda - 2px}}$$

et, en posant

$$\lambda = 2pd,$$

$$y = \pm \frac{d+x}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{x}{d-x}}.$$

Rappelons que les droites (1) ne sont réelles qu'à la condition que λ soit négatif et faisons $\lambda = -\lambda_1$, l'équation

$$y = \pm \frac{d+x}{\sqrt{\lambda_1}} \sqrt{\frac{x}{x-d}}$$

représentera la courbe cherchée.

Elle a un nœud au point $y = 0$, $x = -d$, et possède trois asymptotes

$$x = d, \qquad y = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\left(x + \frac{3}{2}d\right).$$

NOTA. — Solution analogue par M. J. Sala.