NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. SONDAT

Sur un système de coordonnées triangulaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 503-519

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__503_1>

SUR UN SYSTÈME DE COORDONNÉES TRIANGULAIRES [1];

PAR M. P. SONDAT.

45. THÉORÈME — *Si un point* $O(\alpha\beta\gamma)$ *décrit la droite fixe* $X(\lambda\mu\nu)$, *et si* $O_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ *est le point harmoniquement associé à* X, *la droite* $X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$, *harmoniquement associée à* O, *enveloppe la conique inscrite*

$$\frac{\alpha_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\beta_1} = 1.$$

En effet, le point O appartenant à X, on a

$$\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu} = 1,$$

ou

$$\frac{-\lambda}{-\alpha} + \frac{-\beta}{-\mu} = 1,$$

(1) Voir même Tome, p. 360.

et, par suite,

$$\frac{\alpha_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\beta_1} = 1,$$

équation qui exprime que X_1 est une tangente à la conique inscrite que cette équation représente.

46. *Application.* — Construire la quatrième tangente commune à deux coniques inscrites.

Soient les coniques inscrites

$$\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta} = 1, \qquad \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta_1} = 1.$$

Si $Y(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ et $Y_1(-\alpha_1, -\beta_1, -\gamma_1)$ sont les droites harmoniquement associées aux points $O(\alpha\beta\gamma)$ et $O_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, la droite $X(\lambda\mu\nu)$, harmoniquement associée au point de rencontre ω des droites Y et Y_1 sera la tangente commune cherchée.

47. Théorème. — *Si une droite $X(\lambda\mu\nu)$ tourne autour d'un point fixe $O(\alpha\beta\gamma)$ et si $X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$ est la droite harmoniquement associée à O, le point $O_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, harmoniquement associé à X, décrit la conique circonscrite*

$$\frac{\alpha_1}{\lambda_1} + \frac{\beta_1}{\mu_1} = 1.$$

On a, en effet,

$$\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu} = 1$$

ou

$$\frac{-\lambda}{-\alpha} + \frac{-\beta}{-\mu} = 1$$

et, par suite,

$$\frac{\alpha_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\beta_1} = 1.$$

équation qui exprime que le point O_1 appartient à la conique circonscrite que cette équation représente.

48. *Application.* — Trouver le quatrième point de rencontre de deux coniques circonscrites.

Soient les coniques circonscrites

$$\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta} = 1, \qquad \frac{\alpha}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\beta} = 1.$$

Si $O(-\lambda, -\mu, -\nu)$ et $O_1(-\lambda_1, -\mu_1, -\nu_1)$ sont les points harmoniquement associés aux droites $X(\lambda\mu\nu)$ et $X_1(\lambda_1\,\mu_1\,\nu_1)$, le point ω, harmoniquement associé à la droite OO_1, sera le quatrième point de rencontre des deux coniques.

49. Problème. — *Étant donnés cinq points d'une conique, mener avec la règle, les tangentes en ces points, et trouver d'autres points de la courbe.*

Soit la conique ABCDE.

Si O est le point de rencontre des droites X et Y, harmoniquement associées aux points O et E, par rapport au triangle ABC, et si une droite ρ tourne autour de O, le point ω, harmoniquement associé à ρ, décrira la conique.

De plus, si $Z(\lambda\mu\nu)$ est la droite harmoniquement associée à O, les tangentes en A, B, C seront les droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$.

50. Problème. — *Étant données cinq tangentes d'une conique, trouver les points de contact et construire d'autres tangentes.*

Soit la conique tangente aux droites a, b, c, d, e.

Si X est la droite qui joint les points O et O_1, harmoniquement associés aux droites d et e, par rapport au triangle abc, et si un point ω décrit la droite X, la droite ρ associée harmoniquement à ω, enveloppera la conique.

De plus, si $O_2(\alpha\beta\gamma)$ est le point harmoniquement associé à X, la conique touchera a, b, c en α, β, γ.

31. Théorème. — *Si l'on joint un point* $O(\alpha\beta\gamma)$ *de la conique circonscrite*

$$\frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\mu}{\beta}=1$$

aux points λ, μ, ν *par les droites* $Y(\lambda\mu_1\nu_2)$, $Z(\lambda_2\mu\nu_1)$, $U(\lambda_1\mu_2\nu)$, *on aura deux droites* $X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$ *et* $X_2(\lambda_2\mu_2\nu_2)$ *enveloppant les* cubiques

$$\frac{\lambda}{\lambda_1}+\frac{\mu}{\mu_1}+\frac{\nu}{\nu_1}=3,\qquad \frac{\lambda_2}{\lambda}+\frac{\mu_2}{\mu}+\frac{\nu_2}{\nu}=3,$$

inscrites à ABC.

Si, en effet, on écrit que les droites Y, Z, U passent par le point O de la conique, on trouve

$$\begin{cases} \lambda_1=\dfrac{\alpha\mu}{\beta}, & \mu_1=\dfrac{\nu\beta}{\gamma}, & \nu_1=\dfrac{\lambda\gamma}{\alpha}; \\ \lambda_2=\dfrac{\nu\alpha}{\gamma}, & \mu_2=\dfrac{\lambda\beta}{\alpha}, & \nu_2=\dfrac{\mu\gamma}{\beta}. \end{cases}$$

On a donc

$$\lambda_1\mu_1\nu_1=1,\qquad \lambda_2\mu_2\nu_2=1,$$

et, par suite, les droites

$$X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1),\qquad X_2(\lambda_2\mu_2\nu_2).$$

D'ailleurs, en s'aidant des équations de la conique, on a

$$\sum\left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)=3,\qquad \sum\left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)=3.$$

Les droites X_1 et X_2 sont donc tangentes aux cubiques que ces équations représentent.

52. Théorème. — *Si l'on mène une tangente* $X(\lambda\mu\nu)$ *à la conique inscrite*

$$\frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\mu}{\beta}=1,$$

coupant les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *aux points* $I(\alpha\beta_1\gamma_2)$, $H(\alpha_2\beta\gamma_1)$, $K(\alpha_1\beta_2\gamma)$, *les points* $O_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ *et* $O_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$ *décriront les cubiques*

$$\frac{\alpha_1}{\alpha}+\frac{\beta_1}{\beta}+\frac{\gamma_1}{\gamma}=3, \qquad \frac{\alpha}{\alpha_2}+\frac{\beta}{\beta_2}+\frac{\gamma}{\gamma_2}=3,$$

circonscrites à ABC.

Si, en effet, on écrit que les points I, H, K appartiennent à la tangente X, on trouve

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha_1=\dfrac{\lambda\beta}{\mu}, & \beta_1=\dfrac{\mu\gamma}{\nu}, & \gamma_1=\dfrac{\nu\alpha}{\lambda}; \\ \alpha_2=\dfrac{\lambda\gamma}{\nu}, & \beta_2=\dfrac{\mu\alpha}{\lambda}, & \gamma_2=\dfrac{\nu\beta}{\mu}. \end{array}\right.$$

On a donc

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1=-1, \qquad \alpha_2\beta_2\gamma_2=-1,$$

et, par suite, les points

$$O_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1) \quad \text{et} \quad O_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2).$$

D'ailleurs, en s'aidant des équations de la conique, on a

$$\sum\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}\right)=3, \qquad \sum\left(\frac{\alpha}{\alpha_2}\right)=3.$$

Les points O_1 et O_2 décrivent donc les cubiques que ces équations représentent.

53. Théorème. — *Si trois triangles sont placés de telle sorte que chacun d'eux soit inscrit dans l'un des deux autres et circonscrit au troisième, et si de plus deux d'entre eux sont homologiques, ils le sont tous les trois deux à deux et le centre d'homologie de deux quelconques d'entre eux appartient à l'axe d'homologie du troisième et de celui des deux premiers qui est inscrit dans l'autre. La conique inscrite dans chacun de ces triangles aux sommets du triangle inscrit touche l'axe d'homologie du premier de ces triangles et du troisième au centre que cet axe contient.*

Soit le point $O(\alpha\beta\gamma)$. Menons $A\lambda$ qui coupe $\alpha\gamma$ en B_1 et $\alpha\beta$ en C_1. On a

$$\left\{\begin{array}{llll} B_1, & \lambda, & \dfrac{\beta(\alpha-\lambda)}{\lambda}, & \dfrac{1}{\beta(\lambda-\alpha)}; \\[2ex] C_1, & \lambda, & \dfrac{\beta(\lambda-\alpha)}{\lambda}, & \dfrac{1}{\beta(\alpha-\lambda)}. \end{array}\right.$$

Les droites BC_1 et B_1C se coupent au point

$$A_1, \quad -\lambda, \quad \frac{\beta(\lambda-\alpha)}{\lambda}, \quad \frac{1}{\beta(\lambda-\alpha)},$$

qui appartient à $\beta\gamma$, et les trois triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$ et $A_1B_1C_1$ sont placés comme l'indique l'énoncé.

Les droites AA_1, BB_1, CC_1 se coupent au point

$$O_1, \quad -\lambda, \quad \frac{\beta(\alpha-\lambda)}{\lambda}, \quad \frac{1}{\beta(\alpha-\lambda)},$$

qui appartient à la droite

$$X(-\alpha, -\beta, -\gamma),$$

et l'on a les systèmes homologiques

$$(\text{centre } O)\left|\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right|(\text{axe } X), \qquad O_1\left|\begin{array}{ccc} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{array}\right| X_1.$$

Les coordonuées de l'axe X_1 sont, d'ailleurs,

$$X_1 : \quad \lambda, \quad \frac{\beta(\beta-\alpha)}{\lambda}, \quad \frac{1}{\beta(\lambda-\alpha)}.$$

Comme on a

$$\left\{\begin{array}{llll} A_1\alpha : & \alpha, & \frac{\beta(\lambda-\alpha)}{\lambda+\alpha}, & \frac{\lambda+\alpha}{\alpha\beta(\lambda-\alpha)}, \\ B_1\beta : & 2\lambda-\alpha, & \beta, & \frac{1}{\beta(2\lambda-\alpha)}, \\ C_1\gamma : & \frac{\alpha\lambda}{2\alpha-\lambda}, & \frac{\beta(\lambda-2\alpha)}{\lambda}, & \gamma, \end{array}\right.$$

les droites $A_1\alpha$, $B_1\beta$, $C_1\gamma$ sont concourantes au point

$$O_2 : \quad \frac{\lambda^2}{\alpha}, \quad \frac{\beta(\lambda-\alpha)^2}{\lambda^2}, \quad \frac{-\alpha}{\beta(\lambda-\alpha)^2},$$

qui appartient à X_1.

On a alors le système homologique

$$O_2 \left| \begin{array}{ccc} A_1 & B_1 & C_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{array} \right| X_2.$$

Si l'on appelle I, H, K les points $(B_1C_1, \beta\gamma)$, $(A_1C_1, \alpha\gamma)$, $(A_1B_1, \alpha\beta)$, qui fixent l'axe X_2, on a, pour leurs coordonnées,

$$\left\{\begin{array}{llll} I : & \lambda, & \frac{\beta(\lambda+\alpha)}{\lambda}, & \frac{-1}{\beta(\lambda+\alpha)}, \\ H : & \frac{\alpha\lambda}{2\lambda-\alpha}, & \frac{\beta(\lambda-\alpha)}{\lambda}, & \frac{\gamma(2\lambda-\alpha)}{\lambda-\alpha}, \\ K : & 2\alpha-\lambda, & \frac{\beta(\lambda-\alpha)}{\lambda-2\alpha}, & \frac{1}{\beta(\lambda-\alpha)}, \end{array}\right.$$

et, par suite,

$$X_2 : \quad \frac{\alpha^2}{\lambda}, \quad \frac{\beta\lambda}{\lambda - \alpha}, \quad \frac{-\gamma(\lambda - \alpha)}{\alpha}.$$

Le point O appartient donc à X_2.

La conique inscrite à ABC en α, β, γ a pour équation, en coordonnées tangentielles,

$$\frac{\alpha}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\beta} = 1,$$

les coordonnées du point de contact étant

$$\frac{\lambda_1^2}{\alpha}, \quad \frac{\mu_1^2}{\beta}, \quad \frac{\nu_1^2}{\gamma}.$$

Or la droite X_1 satisfait à cette équation et O_2 est le point de contact.

Il résulte d'ailleurs de la position symétrique des trois triangles qu'il doit y avoir :

Une seconde conique touchant les côtés de $A_1B_1C_1$ en A, B, C et la droite X_2 en O;

Une troisième conique touchant les côtés de $\alpha\beta\gamma$ en A_1, B_1, C_1 et la droite X en O_1.

Remarque. — Si O est le centre de gravité de ABC, la droite X passe à l'infini, et la troisième conique est une parabole.

54. Théorème. — *Si les perpendiculaires abaissées d'un point donné* $O(\alpha\beta\gamma)$, *sur les droites* O_1A, O_1B, O_1C *coupent les côtés* BC, CA, AB *en trois points situés sur une droite* $X(\lambda\mu\nu)$, *le lieu géométrique du point* $O_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ *est (avec la droite à l'infini) la conique passant par les points* A, B, C, O, *et l'ortho-*

centre $O'(\alpha'\beta'\gamma')$ *de* ABC, *et l'enveloppe de la droite* X *est une parabole inscrite à* ABC.

Posons, pour abréger,

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned}
P &= \beta c \cos A + a \cos C,\\
Q &= \gamma a \cos B + b \cos A,\\
R &= \alpha b \cos C + c \cos B,\\
P' &= \beta c - a \cos B,\\
Q' &= \gamma a - b \cos C,\\
R' &= \alpha b - c \cos A,\\
P_1 &= b - \gamma a \cos C,\\
Q_1 &= c - \alpha b \cos A,\\
R_1 &= a - \beta c \cos B.
\end{aligned}\right.$$

D'où les égalités

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned}
&(cP' - \alpha bP) + (aR - \beta c Q_1) = 0,\\
&(aQ' - \beta cQ) + (bP - \gamma a R_1) = 0,\\
&(bR' - \gamma aR) + (cQ - \alpha b P_1) = 0,
\end{aligned}\right.$$

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned}
R' &= \alpha(\gamma P + P_1),\\
P' &= \beta(\alpha Q + Q_1),\\
Q' &= \gamma(\beta R + R_1).
\end{aligned}\right.$$

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned}
a(QR - Q'Q_1) &= b(QR' + P_1Q_1),\\
b(PR - R'R_1) &= c(RP' + Q_1R_1).\\
c(PQ - P'P_1) &= a(PQ' + P_1R_1).
\end{aligned}\right.$$

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned}
&bP = cP' + aR_1.\\
&cQ = aQ' + bP_1,\\
&aR = bR' + cQ_1,\\
&PQR - P'Q'R' + P_1Q_1R_1\\
&\qquad - PQ'Q_1 + QR'R_1 + RP'P_1.
\end{aligned}\right.$$

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned}
&-\frac{P'R' + PQ_1}{\sin A} = \frac{\alpha(PQ' + QR_1)}{\sin B} = \frac{Q'R' + RP_1}{\gamma \sin C}\\
&= \frac{P_1Q_1 - QR'}{\gamma \sin A} = -\frac{Q_1R_1 + RP'}{\sin B} = \frac{\alpha(P_1R_1 + PQ')}{\sin C}\\
&= -4\rho^2(\alpha\beta - \alpha - 1)\sin A \sin B \sin C,
\end{aligned}\right.$$

ρ étant le rayon du cercle ABC.

En écrivant que la droite $O\lambda$ doit passer par O et être perpendiculaire à $O_1 A(\alpha_1 \infty o)$, et procédant de même pour $O\mu$ et $O\nu$, on aura (4) et (23)

$$(49)\qquad \left\{ \begin{aligned} \beta\lambda &= \frac{cP' - \alpha_1 bP}{cQ - \alpha_1 bP_1}, \\ \gamma\mu &= \frac{aQ' - \beta_1 cQ}{aR - \beta_1 cQ_1}, \\ \alpha\nu &= \frac{bR' - \gamma_1 aR}{bP - \gamma_1 aR_1}. \end{aligned} \right.$$

Pour que les points λ, μ, ν soient en ligne droite, il faut que $\lambda\mu\nu = 1$, ou, en utilisant les égalités (46) et (47),

$$\begin{aligned} &b^2 P[c(1 + \alpha_1\beta_1)(QR' + P_1Q_1) - \alpha_1 a(Q'R' + P_1R)] \\ &+ c^2 Q[a(1 - \beta_1\gamma_1)(RP' - Q_1R_1) - \beta_1 b(P'R' + PQ_1)] \\ &- a^2 R[b(1 + \alpha_1\gamma_1)(PQ' + P_1R_1) - \gamma_1 c(P'Q' - QR_1)] = 0, \end{aligned}$$

ou (48)

$$(50)\quad (\alpha\beta - \alpha + 1)(\alpha_1\beta_1 - \alpha_1 + 1)\left(-\frac{bP}{\beta}\alpha_1 + \frac{aR}{\beta_1} + \alpha cQ\right) = 0.$$

Cette condition sera remplie si

$$\frac{1}{\alpha} - \beta = 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\alpha_1} + \beta_1 = 1,$$

c'est-à-dire (5) si l'un des points O et O_1 est à l'infini, quelle que soit la position de l'autre.

En écartant ce cas particulier, $\lambda\mu\nu$ sera une droite si le point variable O_1 est lié au point fixe O par l'équation

$$(51)\qquad -\frac{bP}{\beta}\alpha_1 + \frac{aR}{\beta_1} + \alpha cQ = 0.$$

Cette équation se réduit à une identité si

$$P = Q = R = 0,$$

c'est-à-dire si O se confond avec O'.

L'équation (51), mise sous la forme

$$\frac{a}{\beta}(c\cos B + \alpha_1 b\cos C) - \alpha b\left(c\cos A + \frac{a}{\beta_1}\cos C\right)$$
$$- c\left(\alpha_1 b\cos A - \frac{a}{\beta_1}\cos B\right) = 0,$$

nous montre qu'elle serait satisfaite si O_1 se confondait avec O'.

L'équation (51) peut encore s'écrire

$$(\alpha - \alpha_1)\cot A + \frac{1}{\beta\beta_1}(\beta - \beta_1)\cot B + \alpha\alpha_1(\alpha - \alpha_1)\cot C = 0,$$

et se trouve vérifiée si O_1 se porte en O.

De plus, comme les points O et O_1 y entrent symétriquement, les perpendiculaires abaissées de O_1 sur OA, OB, OC doivent couper BC, CA, AB en trois points aussi en ligne droite.

En résumé, si O n'est ni l'orthocentre ni à l'infini, sur toute droite L passant par O, il existe trois points pour lesquels $\lambda\mu\nu$ est une droite : le point O lui-même, le point à l'infini sur L et un troisième lié à O par l'équation (51).

Cherchons le lieu que cette équation représente.

En posant

$$\lambda_1 = -\frac{cQ}{\gamma b P}, \qquad \mu_1 = \frac{-aR}{\alpha c Q}, \qquad \nu_1 = -\frac{bP}{\beta a R},$$

d'où

$$\lambda_1\mu_1\nu_1 = -1,$$

l'équation (51) prendra la forme

$$\frac{\alpha_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\beta_1} = 1.$$

Elle représente donc (41) une conique tangente en A, B, C aux droites $A\lambda_1$, $B\mu_1$, $C\nu_1$ et passant par O et O'.

D'après (49), la droite $X_1(\lambda_1\,\mu\,\nu_1)$ est harmoniquement associée au point de rencontre ω des droites

$$Y(-\alpha, -\beta, -\gamma)$$

et

$$Y'(-\alpha', -\beta', -\gamma'),$$

qui sont elles-mêmes harmoniquement associées aux points O et O'.

Cette droite X_1 (46) est la quatrième tangente commune aux coniques inscrites à ABC en α, β, γ et α', β', γ'.

Cherchons maintenant l'enveloppe de X.

Les relations (49) donnent

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{c}{b}\,\frac{P' - \beta\lambda Q}{P - \beta\lambda P_1}, \\ \beta_1 &= \frac{a}{c}\,\frac{Q' - \gamma\mu R}{Q - \gamma\mu Q_1}, \\ \gamma_1 &= \frac{b}{a}\,\frac{R' - \alpha\nu P}{R - \alpha\nu R_1}. \end{aligned}\right.$$

Portant ces valeurs dans (51) et développant à l'aide de (45), on aura

$$\frac{P}{\beta}(P'Q' + QR_1) - \lambda\beta Q(Q'R' + P_1R) - \frac{\lambda\mu\gamma R}{\alpha}(P'R' + PQ_1) = 0,$$

ou (48)

$$(\alpha\beta - \alpha + 1)\left(-bP + \lambda\beta cQ + \frac{\lambda\mu aR}{\alpha}\right) = 0.$$

Avec

$$\frac{1}{\alpha} + \beta = 1,$$

le point O serait à l'infini, et X resterait indéterminée.

En écartant ce cas, on doit avoir

$$(52)\qquad -bP + \lambda\beta cQ + \frac{\lambda\mu aR}{\alpha} = 0.$$

Cette équation devient identique si $P = Q = R = 0$, ou si O se confond avec O'.

Si l'on pose

$$\alpha_2 = \frac{bP}{\beta c Q}, \qquad \beta_2 = \frac{cQ}{\gamma a R}, \qquad \gamma_2 = \frac{aR}{\alpha b P},$$

d'où

$$\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 = -1,$$

l'équation (52) prendra la forme

$$(53) \qquad \frac{\alpha_2}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta_2} = 1,$$

c'est-à-dire (43) que l'enveloppe de X est une conique tangente aux côtés a, b, c en α_2, β_2, γ_2.

Cette conique est, d'ailleurs, une parabole, car son équation (52) est vérifiée par $\lambda = \mu = \nu = 1$, puisqu'elle se réduit à l'identité

$$aR = \alpha(bP - \beta c Q).$$

Quand le point O_1 se porte en O, la droite X devient

$$X_2: \quad \frac{cP' - \alpha b P}{\beta(cQ - \alpha b P_1)}, \quad \frac{aQ' - \beta c Q}{\gamma(aR - \beta c Q_1)}, \quad \frac{bR' - \gamma a R}{\alpha(bP - \gamma a R_1}, $$

et cette droite est tangente à la parabole.

D'après (50), si $C(-1, -1, -1)$ et C_1 sont les points harmoniquement associés à la droite à l'infini et à X_2, le point $O_2(\alpha_2 \beta_2 \gamma_2)$ sera harmoniquement associé à CC_1.

Ce point O_2 (48) est le quatrième point de rencontre des coniques circonscrites à ABC, selon la droite à l'infini et X_2.

54. Problème. — *Étant données les coordonnées normales d'un point* $O(xyz)$, *trouver celles du point isogonal* $O_1(x_1 y_1 z_1)$.

Si α', β', γ' sont les coordonnées angulaires de O, on a (5)

$$\alpha' = \frac{y}{z}, \qquad \beta' = \frac{z}{x}, \qquad \gamma' = \frac{x}{y}.$$

Pour le point O_1, on a

$$\frac{1}{\alpha'} = \frac{y_1}{z_1}, \qquad \frac{1}{\beta'} = \frac{z_1}{x_1}, \qquad \frac{1}{\gamma'} = \frac{x_1}{y_1};$$

d'où

$$xx_1 = yy_1 = zz_1,$$

et comme

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = 2S,$$

on aura

$$xx_1 = yy_1 = zz_1 = \frac{2S}{\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}}.$$

Si O appartient au cercle circonscrit, le dénominateur est nul (21), et O_1 est à l'infini.

55. Théorème. — *Si un point* $O(\alpha'\beta'\gamma')$ *décrit une droite* $X(\lambda'\mu'\nu')$, *le point* $O_1(\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1)$, *isogonal de* O, *décrit la conique circonscrite à* ABC *selon la droite* $X_1(\lambda'_1\mu'_1\nu'_1)$, *isogonale de* X.

On a, en effet, en coordonnées angulaires (4),

$$\frac{\alpha'}{\lambda'} + \frac{\mu'}{\beta'} = 1,$$

ou

(54) $$\frac{1}{\lambda'} : \frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} : \frac{1}{\mu'} = 1. \qquad \frac{\lambda'_1}{\alpha'_1} + \frac{\beta'_1}{\mu'_1} = 1,$$

Donc O_1 décrit la conique que cette équation représente en coordonnées ponctuelles et angulaires (43).

Si X passe à l'infini

$$\lambda' = -\frac{c}{b}, \qquad \mu' = -\frac{a}{c}, \qquad \nu' = -\frac{b}{a},$$

et l'équation, qui devient

$$a\beta'_1 + \frac{b}{\alpha'_1} + c = 0,$$

est celle du cercle circonscrit (21).

56. Théorème. — *Si une droite* X$(\lambda' \mu' \nu')$ *tourne autour d'un point fixe* O$(\alpha' \beta' \gamma')$, *la droite* $X_1(\lambda'_1 \mu'_1 \nu'_1)$, *isogonale de* X, *enveloppe la conique inscrite à* ABC *selon le point* $O_1(\alpha'_1 \beta'_1 \gamma'_1)$, *isogonal de* O.

Même démonstration. La droite X_1 enveloppe ici la conique inscrite que l'équation (54) représente en coordonnées tangentielles et angulaires.

Si O est le centre de gravité,

$$\alpha' = \frac{c}{b}, \qquad \beta' = \frac{a}{c}, \qquad \gamma' = \frac{b}{a},$$

et l'équation devient

$$\frac{\lambda'_1}{\frac{b}{c}} + \frac{\frac{c}{a}}{\mu'_1} = 1.$$

Dans ce cas, O_1 est le point de Lemoine.

57. *Équation en coordonnées tangentielles de la conique circonscrite.* — Soit la conique

$$\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta} = 1$$

circonscrite à ABC selon la droite X$(\lambda\mu\nu)$.

Coupons-la par la droite $X_1(\lambda_1 \mu_1 \nu_1)$

$$\frac{\lambda_1}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu_1} = 1.$$

L'élimination de β entre ces deux équations donne

$$\alpha^2 - \left(\lambda + \lambda_1 - \frac{\lambda\mu}{\mu_1}\right)\alpha + \lambda\lambda_1 = 0.$$

Les racines de cette équation sont égales si

$$(55) \qquad \left(\lambda + \lambda_1 - \frac{\lambda\mu}{\mu_1}\right)^2 - 4\lambda\lambda_1 = 0,$$

d'où

$$\alpha = \pm\sqrt{\lambda\lambda_1}.$$

On voit par là que si λT est la seconde tangente issue de λ, la droite AT rencontre BC au point $-\lambda$, conjugué harmonique de λ sur BC.

L'équation (55) est en coordonnées tangentielles celle de la conique circonscrite, et les coordonnées de la tangente $X_1(\lambda_1\,\mu_1\,\nu_1)$ au point $O(\alpha\beta\gamma)$ sont

$$\frac{\alpha^2}{\lambda}, \quad \frac{\beta^2}{\mu}, \quad \frac{\gamma^2}{\nu}.$$

58. Si, au théorème 51, on cherche le point de rencontre $O_1(\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1)$ des droites X_1 et X_2, on trouve

$$(56) \qquad \alpha_1 = -\frac{\alpha^2}{\lambda}, \qquad \beta_1 = -\frac{\beta^2}{\mu}, \qquad \gamma_1 = -\frac{\gamma^2}{\nu}.$$

Or, si $X_3(\lambda_3\,\mu_3\,\nu_3)$ est la tangente à la conique au point O, on a (57)

$$\lambda_3 = \frac{\alpha^2}{\lambda}, \qquad \mu_3 = \frac{\beta^2}{\mu}, \qquad \nu_3 = \frac{\gamma^2}{\nu}.$$

Donc, quand le point O décrit la conique, le point O_1 demeure harmoniquement associé à la tangente X_3 au point mobile.

Si l'on appelle $O'(\alpha'\,\beta'\gamma')$ le point harmoniquement associé à $X(\lambda\mu\nu)$, le lieu du point O_1 s'obtiendra en portant dans l'équation de la conique les valeurs de α et de β fournies par (56). On trouve ainsi la *quartique*

$$\pm\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha'}}\pm\sqrt{\frac{\beta'}{\beta_1}}=1. \tag{57}$$

Si la droite X passe à l'infini, on aura la solution de la question 1419, proposée par M. Poujade dans les *Nouvelles Annales* et résolue par M. Barisien (octobre 1893, p, 55*).

59. De même, si, au théorème 52, on cherche la droite O_1O_2, soit $X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$, on trouve

$$\lambda_1=-\frac{\lambda^2}{\alpha},\qquad \mu_1=-\frac{\mu^2}{\beta},\qquad \nu_1=-\frac{\nu^2}{\gamma}.$$

Or, si $O_3(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ est le point de contact de la tangente X à la conique, on a (39)

$$\alpha_3=\frac{\lambda^2}{\alpha},\qquad \beta_3=\frac{\mu^2}{\beta},\qquad \gamma_3=\frac{\nu^2}{\gamma}.$$

Donc, quand la tangente X se meut, la droite X_1 demeure harmoniquement associée au point de contact O_3.

Si l'on appelle $X'(\lambda'\mu'\nu')$ la droite harmoniquement associée au point $O(\alpha\beta\gamma)$, la droite X_1 enveloppera la quartique

$$\pm\sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda_1}}\pm\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu'}}=1, \tag{59}$$

dont l'équation s'obtient en portant dans celle de la conique les valeurs de λ et de μ fournies par (58).