Nouvelles annales de mathématiques

Concours général de 1892

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 490-497

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__490_0>

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1892.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Mathématiques.

Soient Q une quadrique circonscrite à un ellipsoïde donné E, et A le pôle, par rapport à l'ellipsoïde, du plan P de la courbe de contact des deux surfaces :

1° Démontrer qu'il y a, en général, trois quadriques Q_1, Q_2, Q_3 homofocales avec l'ellipsoïde E et telles que les plans polaires P_1, P_2, P_3 du point A par rapport aux quadriques Q_1, Q_2, Q_3 passent par le centre de la quadrique Q.

2° Les plans P_1, P_2, P_3 sont les plans principaux de la quadrique Q, et les coniques C_1, C_2, C_3 intersections des surfaces (P_1, Q_1), (P_2, Q_2), (P_3, Q_3) sont les focales de cette quadrique.

3° Les projections orthogonales des coniques C_1, C_2, C_3 sur les plans principaux de l'ellipsoïde E sont des coniques homofocales.

On projettera, en particulier, ces coniques sur le plan principal qui contient l'axe majeur et l'axe moyen de l'ellipsoïde, et l'on cherchera le lieu décrit par les foyers des coniques projetées, quand la quadrique Q varie en restant circonscrite à l'ellipsoïde, le plan P de la courbe de contact ne changeant pas.

Physique.

I. Détermination de l'état hygrométrique de l'air par la méthode de condensation et par la méthode psychrométrique. Discuter ces deux méthodes et les comparer au point de vue de l'exactitude des résultats que peut fournir chacune d'elles.

II. On a proposé, pour comparer les valeurs de l'accélération de la pesanteur dans les différents lieux du globe, l'emploi d'un baromètre à siphon. Ce siphon serait à branches bien cylindriques; et la petite branche, renfermant un gaz sec, aurait été fermée à la lampe. Les variations de g se déduiraient des variations du niveau du mercure dans la petite branche.

On demande d'établir la formule : 1° dans le cas où l'instrument serait toujours ramené à une température constante, 2° dans le cas où l'observation serait faite à une température quelconque; 3° dans le cas où, au lieu d'un gaz, on aurait enfermé dans la petite branche une vapeur en contact avec un excès du liquide générateur.

Chimie.

I. Combinaisons, étudiées dans le cours, du fluor et du chlore avec les métalloïdes autres que l'oxygène et l'hydrogène.

II. On fait passer lentement du gaz oxygène pur et sec à travers un tube à effluves actionné par une forte bobine d'induction. La température est 0°, la pression 760^{mm}. Le gaz à sa sortie traverse 100^{cc} d'une dissolution d'acide arsénieux contenant $9^{gr},9$ d'acide arsénieux par litre.

Quand l'opération est terminée, on ajoute 100^{cc} d'une solution d'iode dans l'iodure de potassium à $25^{gr},4$ d'iode par litre. En supposant que l'effluve ait produit une contraction de $55^{cc},7$, on demande quel sera le volume d'une solution d'hyposulfite de soude à $31^{gr},6$ de sel anhydre par litre, qui sera nécessaire pour décolorer la solution arsénieuse additionnée d'iode.

L'équivalent du sodium est 23.

III. On décompose un poids x d'azotite d'ammoniaque en utilisant la chaleur de combustion d'un certain volume d'hydrogène dans un calorimètre convenablement disposé.

On demande de calculer ce point x d'azotite d'ammoniaque décomposé, ainsi que les poids, et, s'il y a lieu, les volumes gazeux, à 0° et 760^{mm}, des produits de sa décomposition à l'aide des données suivantes :

1° Poids de l'eau du calorimètre...............	1800^{gr}
2° Poids du calorimètre évalué en eau.........	$73^{gr},5$
3° Élévation totale de température de l'eau du calorimètre....................................	$1°,393$
4° Élévation de température de l'eau du calorimètre, résultant de la combustion de l'hydrogène seul, sans intervention de l'azotite d'ammoniaque.	$0°,378$
5° Chaleur de décomposition de 1^{gr} d'azotite d'ammoniaque..................................	$1^{cal},25$

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

I. Soient, sur une hélice tracée sur un cylindre de révolution, trois points non en ligne droite A, B, C, tels que les arcs AB et AC soient de même sens. Sur la même hélice, à partir d'un point quelconque A′ de cette courbe, on prend les arcs A′B′, A′C′, respectivement égaux aux arcs AB, AC, et tous deux de même sens que l'arc AB, ou tous deux de même sens que l'arc BA.

Démontrer que, si l'on projette orthogonalement, sur un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, le cercle circonscrit au triangle ABC et le cercle circonscrit au triangle A′B′C′, les deux ellipses, projections de ces cercles, sont égales.

II. Sur un cylindre de révolution on donne une hélice H et un cercle K. On donne aussi un triangle équilatéral abc, inscrit dans le cercle K. Soit un triangle ABC inscrit dans l'hélice H, tel que les trois sommets de ce triangle sont sur une même spire de l'hélice H et se projettent orthogonalement sur le plan du cercle K, aux points a, b, c. A chaque triangle ABC satisfaisant à ces conditions on fait correspondre une ellipse E, qui est la projection orthogonale, sur le plan du cercle K, du cercle circonscrit au triangle ABC :

1° Trouver le nombre des ellipses E, et, pour chacune d'elles, déterminer la droite sur laquelle est placé son grand axe.

2° Trouver le lieu des sommets de chacune des ellipses E, quand, le cylindre, l'hélice H, le cercle K restant fixes, on fait tourner le triangle équilatéral abc dans le plan du cercle K, autour du centre de ce cercle.

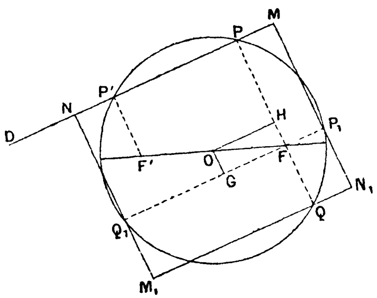
3° En général, le lieu des sommets d'une des ellipses E se compose de trois lignes distinctes: déterminer le rapport du pas de l'hélice H au rayon du cylindre de façon que deux de ces trois lignes se confondent.

III. On donne, sur une hélice tracée sur un cylindre de révolution, cinq points A, B, C, D, E, tels que les quatre arcs AB, BC, CD, DE sont égaux. Démontrer que la sphère qui passe par les quatre points A, B, C, D, et la sphère qui passe par les quatre points B, C, D, E, sont symétriques par rapport au plan des trois points B, C, D.

RHÉTORIQUE.

On donne un cercle de rayon R et, à l'intérieur de cette courbe, deux points F, F', symétriquement placés par rapport au centre O.

1° Par un point P de la circonférence du cercle O, on élève sur FP une perpendiculaire D, qui rencontre cette courbe en un second point P' : démontrer que la droite F'P' est perpen-



diculaire sur D, et que le produit $FP \times F'P'$ reste constant quand le point P décrit la circonférence du cercle O.

2° On trace par le point F, dans le plan du cercle O, deux cordes rectangulaires PFQ, P_1FQ_1, puis on élève par les extrémités P, Q de la corde PQ des perpendiculaires sur cette corde, et, par les extrémités P_1, Q_1 de la corde P_1Q_1 des perpendiculaires sur cette corde. Ces quatre perpendiculaires forment un rectangle MNM_1N_1 ; on demande le lieu décrit par les sommets de ce rectangle quand les deux cordes PFQ, P_1FQ_1 pivotent autour du point F en restant toujours rectangulaires.

3° Soient S l'aire du rectangle MNM_1N_1 et Σ celle du rectangle OGFH formé par les cordes rectangulaires PFQ, P_1FQ_1 et les perpendiculaires abaissées du centre O sur chacune d'elles ; les deux cordes rectangulaires PFQ, P_1FQ_1 pivotent encore autour du point F ; démontrer que les aires S, Σ sont liées par la relation

$$S^2 = 16\Sigma^2 + K^2,$$

K désignant une constante.

Trouver pour quelle position des cordes PFQ. P_1FQ_1 la surface S est maximum, et pour quelle position des mêmes cordes elle est minimum.

SECONDE.

I. Résoudre les équations

$$x + y + z = 1,$$
$$x + 9y + 25z = 10a,$$
$$x + 81y + 625z = 100b.$$

Déterminer, pour les nombres a et b, des valeurs entières telles que les valeurs des inconnues soient positives.

II. On donne deux droites xx', yy', non situées dans un même plan, et sur xx' un point A, sur yy' un point B; puis on considère un plan fixe P, passant par A et B, et une droite mobile Δ parallèle à ce plan et rencontrant les droites données :

1° Si l'on désigne par C et D les points de rencontre de la droite Δ dans l'une quelconque de ses positions, avec les droites xx' et yy', démontrer que le rapport $\frac{AC}{BD}$ a une valeur constante.

2° Démontrer qu'il y a deux plans P' et P'' tels que, si le plan P coïncide avec l'un d'eux, on a constamment $\frac{AC}{BD} = 1$.

3° Soit Δ' une parallèle au plan P', rencontrant xx' en C', et yy' en D'; soit, de même, Δ'' une parallèle au plan P'', rencontrant xx' en C'' et yy' en D''. On transporte les droites Δ' et Δ'' parallèlement à elles-mêmes, de manière à amener les points C' et C'' en un point donné O: ces droites prennent les positions OM' et OM''; trouver le lieu géométrique de chacun des points M' et M'', quand les droites Δ' et Δ'' se déplacent.

4° Trouver le lieu du point milieu de M'M'' quand les droites Δ' et Δ'' se déplacent en restant perpendiculaires.

TROISIÈME.

I. Trouver une fraction dont la valeur ne change pas quand on ajoute, en même temps, 20 au numérateur et 25 au dénominateur, sachant que les deux termes de cette fraction ont pour plus petit commun multiple le nombre 340.

II. Soit un triangle ABC; on mène les bissectrices de l'angle $\widehat{BAC}$ et de l'angle extérieur adjacent à celui-là, lesquelles coupent le côté BC aux points D et E :

1° Démontrer que la droite AP, qui joint le point A au milieu P de DE, est tangente au cercle circonscrit au triangle ABC.

2° Démontrer la relation

$$\frac{PB}{PC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

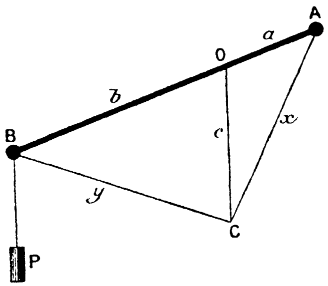
3° Construire le triangle ABC, connaissant les points B, C, D, et sachant que l'on a

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = m^2,$$

m désignant une longueur donnée.

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL.

Une barre rigide AB peut se mouvoir dans un plan vertical, en tournant autour d'un pivot fixé en son centre de gravité O, lequel n'est pas forcément en son milieu; on appellera a et b les longueurs OA, OB. Un fil flexible, mais inextensible, est attaché au point A par un de ses bouts. Il va passer par un



anneau très petit, de dimensions négligeables, fixé en un point invariable C ; le fil retourne ensuite passer par un second anneau fixé au point A de la barre, puis revient passer une deuxième fois par l'anneau C, puis une deuxième fois par l'anneau A, et ainsi de suite, de telle manière qu'entre les anneaux A et C courent $(2n+1)$ brins de fil. Le dernier brin, après avoir traversé l'anneau C, va passer par un troisième anneau fixé à la seconde extrémité B de la barre, après quoi il retombe verticalement, tendu par un poids P. On néglige toute espèce de frottement, ainsi que le poids du fil. De plus, on prend le point C sur la verticale du point O, à une distance c au-dessous de ce point.

1° Exprimer que le système proposé est en équilibre.

2° On suppose que, dans la position d'équilibre, les longueurs $CA = x$, $CB = y$ soient à a, b dans un même rapport donné K, en sorte que

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = K;$$

trouver les valeurs de a et de b pour lesquelles cette condition est remplie, c étant supposé connu, ainsi que K et le nombre $(2n+1)$.

3° Prouver que, le nombre $(2n+1)$ restant fixe, le rapport K ne saurait être pris arbitrairement, et trouver les limites entre lesquelles ce rapport doit être pris.

SECONDE MODERNE.

I. Étant donné un demi-cercle de diamètre AOB, on mène la tangente en B et la droite AMN, qui rencontre la courbe en M et la tangente en N. Calculer l'angle que doit faire AM avec AB, de sorte que, en faisant tourner la figure autour de AB, le double du volume engendré par le triangle AMB soit triple du volume engendré par le triangle MNB.

Construire, au moyen de la règle et du compas, la sécante qui répond à la question.

II. Ayant tiré la ligne de terre parallèlement à l'une des dimensions de la feuille, on prend un point a, arbitraire sur la feuille, par lequel on trace deux droites quelconques : sur l'une on met les lettres D et E', sur l'autre D' et E. On considère la pyramide ayant pour sommet un point quelconque de la ligne de terre et ayant pour base l'un des losanges construits sur les droites dont les projections horizontales sont D, E, et les projections verticales D', E', avec une longueur de côté égale à la hauteur du solide.

On coupe cette pyramide par le plan perpendiculaire au milieu de l'une des arêtes latérales, et l'on demande les projections du tronc ainsi déterminé.

Les faces de ce solide étant opaques (et les plans de projection étant transparents), indiquer la ponctuation de ses projections.

Figurer l'ombre propre du tronc, en supposant les rayons lumineux perpendiculaires au losange de base de la pyramide considérée.

TROISIÈME MODERNE.

I. Construire, au moyen de la règle et du compas, le décagone régulier équivalent à un triangle dont on donne les côtés.

II. Trouver la fraction équivalente à

$$\frac{321642}{234468}$$

et dans laquelle la différence des termes soit 145.

III. Les longueurs des côtés du triangle ABC étant représentées par a, b, c, calculer le produit des rayons de tous les cercles passant par deux sommets de ce triangle et tangents à l'un des côtés.