Nouvelles annales de mathématiques

Maurice d'Ocagne

# Problème d'algèbre relatif à la nomographie

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 12 (1893), p. 469-476

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__469_0>

# PROBLÈME D'ALGÈBRE RELATIF A LA NOMOGRAPHIE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

1. Je rappelle en deux mots le principe de la méthode de représentation de certaines équations à trois variables au moyen des *points isoplèthes*, qui se trouve développée dans le Chapitre IV de ma *Nomographie* (¹).

Considérons trois systèmes de points dépendant chacun d'un paramètre arbitraire et définis par les formules

$$\begin{array}{lll} x = f_1(\alpha_1), & x = f_2(\alpha_2), & x = f_3(\alpha_3), \\ y = \varphi_1(\alpha_1), & y = \varphi_2(\alpha_2), & y = \varphi_3(\alpha_3). \end{array}$$

Leur ensemble, si l'on suppose chacun de ces points coté au moyen de la valeur du paramètre correspondant, constitue un abaque de l'équation en $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, qui exprime l'alignement de trois de ces points.

Les applications de cette méthode sont des plus fréquentes dans la pratique.

Il est intéressant de reconnaître la forme des équations représentées par les plus simples de ces abaques, ceux dans lesquels chaque système de points isoplèthes est constitué par des points cotés, régulièrement espacés sur une droite, c'est-à-dire tels que leurs distances respectives soient proportionnelles à la différence de leurs cotes.

Dans ce cas, les formules ci-dessus doivent évidem-

(¹) *Nomographie. Les calculs usuels effectues au moyen de abaques.* Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891.

ment prendre la forme

$$
\begin{array}{lll}
x = m_1 \alpha_1 + n_1, & x = m_2 \alpha_2 + n_2, & x = m_3 \alpha_3 + n_3, \\
y = p_1 \alpha_1 + q_1, & y = p_2 \alpha_2 + q_2, & y = p_3 \alpha_3 + q_3.
\end{array}
$$

L'équation représentée peut dès lors s'écrire

$$
\begin{vmatrix}
m_1\alpha_1 + n_1 & p_1\alpha_1 + q_1 & 1 \\
m_2\alpha_2 + n_2 & p_2\alpha_2 + q_2 & 1 \\
m_3\alpha_3 + n_3 & p_3\alpha_3 + q_3 & 1
\end{vmatrix} = 0,
$$

ou, sous forme développée,

$$
(a) \quad A_1\alpha_2\alpha_3 + A_2\alpha_3\alpha_1 + A_3\alpha_1\alpha_2 + B_1\alpha_1 + B_2\alpha_2 + B_3\alpha_3 + C = 0,
$$

les coefficients de cette équation étant donnés par les formules

$$
\begin{aligned}
A_1 &= m_2p_3 - m_3p_2, \\
A_2 &= m_3p_1 - m_1p_3, \\
A_3 &= m_1p_2 - m_2p_1, \\
B_1 &= m_1(q_2 - q_3) - p_1(n_2 - n_3), \\
B_2 &= m_2(q_3 - q_1) - p_2(n_3 - n_1), \\
B_3 &= m_3(q_1 - q_2) - p_3(n_1 - n_2), \\
C &= n_1q_2 - n_2q_1 + n_2q_3 - n_3q_2 + n_3q_1 - n_1q_3.
\end{aligned}
$$

Réciproquement, toute équation de la forme $(a)$ est-elle représentable par trois systèmes *réguliers* de points isoplèthes? En d'autres termes, $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B_1$, $B_2$, $B_3$ et $C$ étant donnés, peut-on toujours trouver un système de valeurs *réelles* de $m_1$, $n_1$, $m_2$, $n_2$, $m_3$, $n_3$, $p_1$, $q_1$, $p_2$, $q_2$, $p_3$, $q_3$ satisfaisant aux équations (I) ? Tel est le problème d'Algèbre qui va être ici examiné.

2. Remarquons tout d'abord que, si l'équation $(a)$ est représentable par trois systèmes réguliers de points isoplèthes, on peut toujours faire coïncider l'axe des $y$ avec la droite sur laquelle est disposé l'un de ceux-ci en

plaçant l'origine au point coté o. On n'enlève donc rien à la généralité du problème traité en prenant

$$m_1 = 0, \qquad n_1 = 0, \qquad p_1 = 1, \qquad q_1 = 0.$$

Le système précédent devient alors

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} (1) & A_1 = m_2 p_3 - m_3 p_2, \\ (2) & A_2 = m_3, \\ (3) & A_3 = - m_2, \\ (4) & B_1 = n_3 - n_2, \\ (5) & B_2 = m_2 q_3 - p_2 n_3, \\ (6) & B_3 = n_2 p_3 - q_2 m_3, \\ (7) & C = n_2 q_3 - n_3 q_2. \end{cases}$$

L'élimination de $m_2$ et $m_3$ entre (1), (2) et (3) donne

$$(8) \qquad A_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 = 0,$$

équation incompatible avec l'hypothèse où deux des coefficients $A_1$, $A_2$ et $A_3$ seraient nuls à l'exclusion du troisième [1].

Il n'y a, par suite, à envisager que les trois hypothèses suivantes :

1° Les trois coefficients $A_1$, $A_2$, $A_3$ sont différents de zéro, ce que nous écrirons

$$A_1 \neq 0, \qquad A_2 \neq 0, \qquad A_3 \neq 0.$$

2° Un seul d'entre eux est nul. Un choix convenable de notations permet toujours d'écrire cette hypothèse

$$A_1 = 0, \qquad A_2 \neq 0, \qquad A_3 \neq 0.$$

---

[1] Il résulte, en particulier, de là que l'équation $\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1 = 0$, qui traduit la multiplication, n'est pas représentable par trois systèmes réguliers de points isoplèthes, mais elle est représentable par trois systèmes rectilignes dont deux réguliers, savoir :

$$x = 1, \qquad x = -1, \qquad x = \frac{1 + \alpha_3}{1 - \alpha_3},$$
$$y = \alpha_1 \qquad y = \alpha_2, \qquad y = 0.$$

3° Ils sont nuls tous les trois,

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = 0, \qquad A_3 = 0.$$

3. *Premier cas.* — $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, $A_3 \neq 0$.

Les équations (2) et (3) donnent

$$m_2 = -A_3, \qquad m_3 = A_2,$$

et le système (I) se réduit à

$$(\mathrm{I}') \quad \begin{cases} (1') & A_1 = -A_2 p_2 - A_3 p_3, \\ (4') & B_1 = n_3 - n_2, \\ (5') & B_2 = -A_3 q_3 - p_2 n_3, \\ (6') & B_3 = n_2 p_3 - A_2 q_2, \\ (7') & C = n_2 q_3 - n_3 q_2. \end{cases}$$

Entre ces cinq équations éliminons $q_2$, $n_3$, $p_3$, $q_3$.

De (1′) et (4′) nous tirons d'abord

$$p_3 = -\frac{A_1 + A_2 p_2}{A_3}, \qquad n_3 = B_1 + n_2.$$

Portant ces valeurs de $n_3$ et de $p_3$ respectivement dans (5′) et (6′), on tire de celles-ci

$$q_3 = -\frac{B_2 + p_2(B_1 + n_2)}{A_3}, \qquad q_2 = -\frac{1}{A_2}\left(B_3 + n_2 \frac{A_1 + A_2 p_2}{A_3}\right).$$

L'équation (7′) devient alors

$$C = -n_2 \frac{B_2 + p_2(B_1 + n_2)}{A_3} + \frac{B_1 + n_2}{A_2}\left(B_3 + n_2 \frac{A_1 + A_2 p_2}{A_3}\right),$$

ou, toutes réductions faites,

$$(9) \quad A_1 n_2^2 + (A_1 B_1 - A_2 B_2 + A_3 B_3) n_2 + A_3(B_1 B_3 - A_2 C) = 0.$$

Le paramètre $p_2$ ayant disparu de lui-même dans cette élimination, on voit qu'on peut lui attribuer une valeur quelconque. En vue de la plus grande simplicité, nous prendrons naturellement

$$p_2 = 0.$$

L'équation (9) détermine $n_2$. Ce paramètre devant être réel, le problème ne sera possible qu'autant que l'on aura

$$(A_1B_1 - A_2B_2 + A_3B_3)^2 - 4A_1A_3(B_1B_3 - A_2C) \geqq 0$$

ou

$$(10) \left\{ \begin{aligned} & A_1^2B_1^2 + A_2^2B_2^2 + A_3^2B_3^2 - 2A_1A_2B_1B_2 - 2A_2A_3B_2B_3 \\ & \qquad - 2A_3A_1B_3B_1 + 4A_1A_2A_3C \geqq 0. \end{aligned} \right.$$

Si cette inégalité est satisfaite, l'équation (9) donne pour $n_2$ deux valeurs $\nu$ et $\nu'$. Adoptant l'une d'entre elles, $\nu$ par exemple, on a pour $q_2$, $n_3$, $p_3$, $q_3$ les valeurs

$$q_2 = -\frac{1}{A_2}\left(B_3 + \nu\frac{A_1}{A_3}\right), \qquad n_3 = B_1 + \nu,$$

$$p_3 = -\frac{A_1}{A_3}, \qquad q_3 = -\frac{B_2}{A_3}.$$

4. *Deuxième cas.* — $A_1 = 0$, $A_2 \neq 0$, $A_3 \neq 0$.

Le seul changement à ce qui précède tient à ce qu'ici l'équation (9), se réduisant à

$$(A_3B_3 - A_2B_2)n_2 + A_3(B_1B_3 - A_2C) = 0,$$

fournit pour $n_2$ une valeur toujours satisfaisante, savoir

$$n_2 = A_3\frac{B_1B_3 - A_2C}{A_2B_2 - A_3B_3}.$$

Dès lors, les formules qui terminent le numéro précédent deviennent

$$q_2 = -\frac{B_3}{A_2}, \qquad n_3 = A_2\frac{B_1B_2 - A_3C}{A_2B_2 - A_3B_3},$$

$$p_3 = 0, \qquad q_3 = -\frac{B_2}{A_3}.$$

Rappelons, d'ailleurs, qu'on a toujours

$$m_2 = -A_3, \qquad m_3 = A_2, \qquad p_2 = 0.$$

On voit, en outre, que $n_2$ et $n_3$ devenant infinis lorsque $A_2 B_2 - A_3 B_3 = 0$, la solution est, dans ce cas, illusoire. Il convient donc de compléter l'hypothèse faite par la condition

$$A_2 B_2 - A_3 B_3 \neq 0.$$

5. *Troisième cas.* — $A_1 = A_2 = A_3 = 0$.

Le système (I') se réduit à

$$(\mathrm{I}'') \quad \begin{cases} (4'') & B_1 = n_3 - n_2, \\ (5'') & B_2 = -n_3 p_2, \\ (6'') & B_3 = n_2 p_3. \\ (7'') & C = n_2 q_3 - n_3 q_2. \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, nous nous donnerons les valeurs de deux des six inconnues; mais ici, pas plus que précédemment, le choix n'est absolument arbitraire.

Ainsi les équations (5″) et (6″) montrent qu'on ne peut annuler aucune des qualités $n_2$, $p_2$, $n_3$, $p_3$, car $B_2$ et $B_3$ sont nécessairement différents de 0; dans le cas contraire, en effet, une des variables $\alpha_2$ ou $\alpha_3$ cesserait de figurer dans l'équation (1), les coefficients des rectangles étant déjà supposés nuls.

De même, l'équation (7″) montre qu'on ne saurait généralement pas se donner à la fois $q_2 = q_3 = 0$, ....

Une hypothèse, toujours admissible, consiste à prendre

$$p_3 = 1, \qquad q_2 = 0.$$

Le système (I″) devient alors

$$\begin{aligned} B_1 &= n_3 - n_2, \\ B_2 &= - n_3, \\ B_3 &= n_2 p_3, \\ C &= n_2 q_3, \end{aligned}$$

d'où l'on tire successivement

$$n_3 = -B_2,$$
$$n_2 = -(B_1 + B_2),$$
$$p_3 = -\frac{B_3}{B_1 + B_2},$$
$$q_3 = -\frac{C}{B_1 + B_2}.$$

6. *Résumé.* — Pour revenir au problème d'où nous sommes parti, nous pourrons résumer ce qui précède ainsi qu'il suit :

Une équation de la forme $(a)$ est représentable par trois systèmes réguliers de points isoplèthes, et cela d'une infinité de façons, dans les trois cas qui suivent, pour chacun desquels nous donnons le mode de représentation le plus simple :

*Premier cas.* — $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, $A_3 \neq 0$,

$$A_1^2 B_1^2 + A_2^2 B_2^2 + A_3^2 B_3^2 - 2 A_1 A_2 B_1 B_2 - 2 A_2 A_3 B_2 B_3 \\ - 2 A_3 A_1 B_3 B_1 + 4 A_1 A_2 A_3 C \geqq 0.$$

Formules de la représentation :

$$x = 0, \qquad x = -A_2 \alpha_2 + v, \qquad x = -\frac{A_3 B_3 + v A_1}{A_2 A_3},$$
$$y = \alpha_1, \qquad y = A_2 \alpha_3 + B_3 + v, \qquad y = -\frac{A_1 \alpha_3 + B_2}{A_3}.$$

$v$ étant racine de l'équation

$$A_1 v^2 + (A_1 B_1 - A_2 B_2 + A_3 B_3) v + A_3 (B_1 B_3 - A_2 C) = 0.$$

*Deuxième cas.* —

$$A_1 = 0, \qquad A_2 \neq 0, \qquad A_3 \neq 0, \qquad A_2 B_2 - A_3 B_3 \neq 0.$$

Formules de la représentation :

$$x = 0, \quad x = -A_3\alpha_2 + A_3 \frac{B_1 B_3 - A_2 C}{A_2 B_2 - A_3 B_3}, \quad x = A_2\alpha_3 + A_2 \frac{B_1 B_2 - A_3 C}{A_2 B_2 - A_3 B_3},$$

$$y = \alpha_1, \quad y = -\frac{B_3}{A_2}, \qquad\qquad y = -\frac{B_2}{A_3}.$$

On voit que dans ce cas les systèmes $\alpha_2$ et $\alpha_3$ sont disposés sur des droites parallèles.

*Troisième cas.* — $A_1 = A_2 = A_3 = 0$.

Formules de la représentation :

$$x = 0, \quad x = -(B_1 + B_2), \quad x = -B_2,$$

$$y = \alpha_1, \quad y = \alpha_2. \quad y = -\frac{B_3\alpha_3 + C}{B_1 + B_2}.$$

Dans ce cas, les trois systèmes $(\alpha_1)$, $(\alpha_2)$, $(\alpha_3)$ sont disposés sur des droites parallèles.