Nouvelles annales de mathématiques

S. Maillard

Note sur la parabole

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 428-430

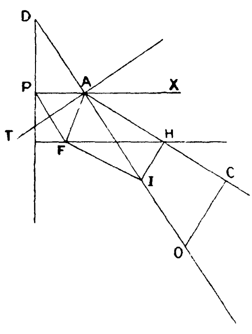
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__428_1>

NOTE SUR LA PARABOLE;

PAR M. S. MAILLARD,
Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers.

Construire une parabole connaissant un point A, *le diamètre* AX *et le centre* O *du cercle osculateur en* A (*fig.* 1).

Fig. 1



Soit I le milieu de OA; le point D, symétrique de I par rapport à A, se trouve sur la directrice DP perpendiculaire sur AX, et le foyer F est symétrique de P par rapport à la tangente AT perpendiculaire sur OA.

On sait, en effet, que : *Le rayon de courbure de la parabole est double de la normale terminée à la directrice.* Parmi les applications classiques du calcul intégral (*voir* FRENET), figure cette question : Trouver une courbe dans laquelle le rayon de courbure égale

n fois la normale. Pour $n = -2$, la courbe est une parabole. Nous n'insisterons que sur ce cas particulier, en nous servant de considérations tout à fait élémentaires.

Les sécantes communes à une conique et à un cercle sont également inclinées sur les axes de la conique. La tangente en A et la corde AB commune à la parabole et au cercle osculateur font avec l'axe des angles égaux; AB est donc parallèle à la tangente en A_1, symétrique de A par rapport a l'axe; le milieu C de AB est sur le diamètre du point A_1 et la droite CO est perpendiculaire sur AB. Le milieu H de AC se trouve sur l'axe, et, si la droite HI est perpendiculaire sur AC, le point I est le milieu du rayon AO. Or l'angle FHI, formé par l'axe et la droite HI, égale l'angle de la directrice et de AC, ou encore l'angle de la directrice et de AT, ou encore l'angle de l'axe et de la normale, ou enfin l'angle du rayon vecteur et de la normale ; c'est-à-dire FHI = FAI. Les quatre points F, A, H, I sont sur un cercle, dont le diamètre est AI; l'angle AFI est droit. Mais les triangles AFI, APD sont égaux : *donc* AI, *moitie du rayon de courbure, égale* AD, *normale terminée à la directrice.*

Autrement. — L'angle du rayon vecteur avec l'axe est double de l'angle de la normale avec l'axe. Si ce dernier augmente de α, le premier augmente de 2α; donc l'angle de deux rayons vecteurs FA, FA′ est double de l'angle A′O′A des deux normales correspondantes. Soit I′ le centre du cercle circonscrit au triangle A′O′A, l'angle au centre A′I′A égale A′FA, et les quatre points A, A′, I′, F sont sur une circonférence. Si les deux points A′ et A se correspondent en A, cette circonférence a pour diametre AI moitié de AO : donc l'angle AFI est droit, etc., comme plus haut.

Le théorème énoncé par M. Rouché, question 1653, est une conséquence immédiate de ce qui précède.