NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GENTY

Solution géométrique de la composition de mathématiques donnée au concours d'admission à l'École polytechnique en 1892

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 425-426

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__425_0>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES DONNÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1892;

PAR M. GENTY, à Oran.

Les droites qui coupent harmoniquement deux coniques (S) et (S′) enveloppent une troisième conique (Σ) inscrite dans les deux quadrilatères formés par les tangentes aux deux coniques données en leurs points d'intersection.

Soit (L) une tangente de la conique (Σ) et supposons que le pôle P de l'une des cordes communes de (S) et de (S′) par rapport à (S) soit situé sur (L). On voit que du point P on peut mener trois tangentes à la conique (Σ), savoir : la droite (L) et les deux tangentes à (S) qui passent par ce point. Donc, dans ce cas, la conique (Σ) se réduit à un système de deux points, dont le point P fait partie, et ce point est évidemment aussi le pôle de la seconde corde commune des coniques données par rapport à (S′).

Or, c'est ce qui se présente dans le problème proposé. La droite de l'infini coupe harmoniquement le cercle et l'hyperbole équilatère et le pôle P de la corde commune DD′ par rapport au cercle est situé à l'infini, dans une direction perpendiculaire à cette corde.

Le pôle de la seconde corde commune HH′ par rapport à l'hyperbole se confond avec ce même point P. Donc cette seconde corde commune est le diamètre de l'hyperbole conjuguée à la direction perpendiculaire à DD′:

1° Toutes les droites perpendiculaires à DD′ passant par le point P, elles coupent harmoniquement le cercle et l'hyperbole;

2° Pour que les points d'intersection de la circonférence et de l'hyperbole soient tous réels, il faut, évidemment, que la parallèle à DD′, menée par le centre, fasse avec l'axe transverse de l'hyperbole un angle plus petit que 45°;

3° Il est clair que la droite HH′ appartient au lieu cherché, lequel comprend, en outre, le lieu du point d'intersection des droites DH et D′H′. Or ces droites décrivent deux faisceaux homographiques ayant pour base les points H et H′ : donc le lieu est une conique (C) qui passe en ces deux points. Les tangentes en ces deux points sont évidemment parallèles et l'on reconnaît de suite que la conique (C) a deux points à l'infini dans la direction des axes de l'hyperbole donnée : c'est donc une hyperbole équilatère ayant ses axes parallèles aux asymptotes de l'hyperbole donnée et concentrique avec cette hyperbole.

4° Si l'on transforme homographiquement la figure, dans l'une des positions de la droite DD′, de telle sorte que les points D et D′ deviennent les points imaginaires d'un cercle à l'infini, le cercle et l'hyperbole se transforment en deux cercles orthogonaux, et, si l'on fait la construction indiquée, on voit que la droite AB passe par le point fixe H′.