Nouvelles annales de mathématiques

S. Mangeot

Sur le discriminant des formes cubiques ternaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 421-424
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__421_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LE DISCRIMINANT DES FORMES CUBIQUES TERNAIRES;

PAR M. S. MANGEOT,
Docteur ès Sciences.

J'ai montré récemment [1] que l'on peut inscrire dans une cubique plane trois triangles ayant leurs côtés parallèles aux asymptotes de la courbe, et que si

$$xyz + Ax + By + Cz = 0$$

est l'équation trilinéaire de la cubique rapportée aux asymptotes, et

$$ax + by + cz = 2h$$

la relation constante qui lie les variables x, y, z, les côtés de chacun de ces triangles ont pour équations

$$(1) \quad x = \frac{hS'}{aS' - A}, \qquad y = \frac{hS'}{bS' - B}, \qquad z = \frac{hS'}{cS' - C},$$

[1] *Bulletin de la Societe mathematique*, t. XXI, n° 3.

S' désignant chaque racine de l'équation

$$(2) \qquad (aS - A)(bS - B)(cS - C) = h^2 S^2.$$

Relativement à ces trois droites, la cubique serait représentée par l'équation

$$(3) \qquad \frac{\lambda}{x_1} + \frac{\mu}{y_1} + \frac{\nu}{z_1} + 1 = 0,$$

en appelant λ, μ, ν les seconds membres des formules (1). Rapportée à tout autre triangle que ceux-ci, la courbe a une équation qui n'est pas de la forme (3).

Si l'on cherche la condition pour que les droites qui sont définies par les formules (1) passent par un même point, on trouve que S' doit vérifier la dérivée de l'équation (2), c'est-à-dire être une racine double de cette équation. Or voici des conséquences de cette remarque.

Supposons que deux des trois systèmes de trois droites que je viens de définir soient confondus en un seul, ce qui revient à admettre que l'équation (2) a une racine double, S'. Les trois droites de ce système double, étant représentées par les formules (1), devront passer par un même point M : l'équation (3) de la courbe, supposée rapportée à ces trois droites, fait voir que le point M sera un point double de la courbe.

Réciproquement, admettons que la cubique ait un point double, et soient d_1, d_2, d_3 les directions asymptotiques tracées par ce point. L'équation de la courbe, rapportée à ces trois droites, devra avoir, d'une manière évidente, la forme (3) : donc ces droites pourront être représentées par les relations (1), S' étant une racine convenable de l'équation (2), et, puisqu'elles sont concourantes, il faudra que S' soit racine double de cette équation. Des trois systèmes de droites précédemment considérés, deux seront confondus avec le système (d_1, d_2, d_3).

La conclusion de ce qui précède est celle-ci :

Pour que la cubique ait un point double, il faut et il suffit que deux des trois triangles inscrits qui ont leurs côtés parallèles aux asymptotes se réduisent à un seul. Ce triangle double est lui-même réduit à un point, et ce point est le point double.

Je suis conduit, par une voie toute naturelle, à la méthode qui suit pour exprimer qu'une cubique, rapportée à un triangle de référence quelconque, admet un point double.

Les relations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ étant supposées représenter les trois asymptotes par rapport à ce triangle, on identifie l'équation de la cubique avec la formule

$$\frac{\lambda}{X-\lambda} + \frac{\mu}{Y-\mu} + \frac{\nu}{Z-\nu} + 1 = 0,$$

et l'on exprime que les trois équations en λ, μ, ν obtenues de la sorte ont deux de leurs trois solutions (λ, μ, ν) confondues en une seule $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$.

Ces trois équations sont linéaires par rapport aux quatre quantités $\mu\nu$, $\nu\lambda$, $\lambda\mu$, $\lambda\mu\nu$, et, par conséquent, leur résolution pourra se ramener à celle d'une équation du troisième degré, dont la formation est immédiate. Le discriminant de cette équation, égalé à zéro, fournirait la condition cherchée $\Delta = 0$ [1].

Si l'on ne connaît pas les équations mêmes des asymptotes de la cubique, la théorie des fonctions symétriques

---

[1] Le point double serait déterminé par l'intersection des deux droites $X = \lambda_1$, $Y = \mu_1$.

permettra de calculer l'expression de Δ en fonction des données. Ainsi, en partant de cette forme de l'équation générale d'une cubique

$$\varphi_3(x,y) + \varphi_2(x,y) + \alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

où, après réduction du coefficient de y^3 à l'unité, φ_3 et φ_2 représentent les termes du troisième et du deuxième degré, si l'on désigne par u_1, u_2, u_3 les trois racines de l'équation $\varphi_3(1, u) = 0$ et si l'on pose

$$f(u) = -\frac{\varphi_2(1, u)}{\varphi'_3(1, u)},$$

on trouve que la condition du point double s'obtient en annulant le discriminant de l'équation du troisième degré

$$\begin{aligned}[(u_1 - u_2)S + L][(u_2 - u_3)S + M]& \\ \times [(u_3 - u_1)S + N] - \tfrac{1}{4}D^3 S^3 &= 0,\end{aligned}$$

dans laquelle on a

$$D = \begin{vmatrix} 1 & u_1 & f(u_1) \\ 1 & u_2 & f(u_2) \\ 1 & u_3 & f(u_3) \end{vmatrix},$$

$$L = \begin{vmatrix} 1 & u_1 & f(u_1) \\ 1 & u_2 & f(u_2) \\ -\beta & \alpha & \gamma \end{vmatrix} + f(u_1)f(u_2) \begin{vmatrix} 1 & u_1 & f(u_1) \\ 1 & u_2 & f(u_2) \\ 1 & u_3 & -f(u_3) \end{vmatrix},$$

et où M, N ont les valeurs qui se déduisent de celle de L par une permutation circulaire des indices 1, 2, 3. Les coefficients de cette équation, rapportés à celui de S^3, sont des fonctions symétriques rationnelles de u_1, u_2, u_3, et l'on sait les exprimer au moyen des coefficients de φ_3 et de φ_2.

Cette méthode constitue donc un procédé particulier pour calculer le discriminant d'une forme cubique à trois variables.
