NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. JAMET

Sur une série fonctionnelle

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 419-421

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__419_1>

SUR UNE SÉRIE FONCTIONNELLE;

PAR M. V. JAMET.

Soit $F(x)$ une fonction d'une variable, réelle ou non, assujettie à la condition d'être finie et continue quand x varie dans une certaine région comprenant le point x_0; de telle sorte que, dans cette région, le module de $F(x)$ ne s'élève pas au-dessus d'un nombre constant M. Considérons la fonction u_n définie comme il suit :

$$u_n = \int_{x_0}^{x} (x - z_1) F(z_1)\, dz_1 \int_{x_0}^{z_1} (z_1 - z_2) F(z_2)\, dz_2 \ldots$$
$$\times \int_{x_0}^{z_{n-1}} (z_{n-1} - z_n) F(z_n)[a + b(z_n - x_0)\, dz_n.$$

Soit μ le maximum du module de $a + b(x - x_0)$ dans la région considérée (a et b désignent des constantes). Le module de u_n est évidemment inférieur à

$$\mu M^n \,|\, x - x_0 \,|^{2n}.$$

La dérivée de u_n par rapport à x s'obtient en remplaçant la fonction qui figure sous le premier signe $\int$ par $F(z_1)\,dz_1$; de sorte que son module est inférieur à

$$\mu M^n\,|x - x_0|^{2n-1} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mu}{x - x_0} M^n\,|x - x_0|^{2n};$$

et la dérivée seconde de u_n, par rapport à x, est égale à

$$u_{n-1}\,F(x).$$

Si donc le point x est intérieur à un cercle tracé du point x_0 comme centre avec un rayon égal à $\frac{1}{\sqrt{M}}$, les séries

$$[a + b(x - x_0)] + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$
$$b + \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \ldots + \frac{du_n}{dx} + \ldots,$$
$$\frac{d^2u_1}{dx^2} + \frac{d^2u_2}{dx^2} + \ldots + \frac{d^2u_n}{dx^2} + \ldots$$

seront convergentes, et chacune des deux dernières sera la dérivée de la somme de la précédente. Soit y la somme de la première. A l'intérieur du cercle que nous venons de définir, la fonction y aura une dérivée première et une dérivée seconde. D'ailleurs, nous avons établi la relation

$$\frac{d^2u_n}{dx^2} = F(x).u_{n-1},$$

d'où l'on conclura la suivante :

$$\frac{d^2u_1}{dx^2} + \frac{d^2u_2}{dx^2} + \ldots + \frac{d^2u_n}{dx^2} = F(x)$$
$$\times [a + b(x - x_0) + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + \ldots],$$

ou bien

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F(x).y. \tag{1}$$

La fonction y que nous avons formée est donc une intégrale de l'équation (1), égale à a, pour $x = x_0$, et dont la dérivée première se réduit à b, pour cette même valeur de x.

Pour abréger, nous avons exposé ce résultat sous forme synthétique; mais le lecteur familier avec la théorie des équations différentielles comprendra aisément que l'analyse qui nous y a conduit nous a été suggérée par la lecture du Mémoire de M. Picard sur la théorie des équations aux dérivées partielles (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 4e série, t. VI).