NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. BIOCHE

Sur les surfaces réglées qui passent par une courbe

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 412-419

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__412_0>

SUR LES SURFACES RÉGLÉES QUI PASSENT PAR UNE COURBE;

PAR M. CH. BIOCHE.

Cette Note a pour objet de montrer comment on peut généraliser facilement diverses propriétés des développables qui passent par une courbe. Ces surfaces peuvent être définies comme des surfaces réglées qui ont, tout le long de la courbe directrice, une courbure totale nulle. On peut considérer des surfaces réglées dont la courbure, le long de la directrice, serait assujettie à d'autres conditions. Cette remarque a fait l'objet d'une Communication à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. CX, p. 515); les résultats contenus dans la Note suivante ont été énoncés dans diverses séances de la Société mathématique.

1. *Formule fondamentale.* — Dans une Note insérée au Tome XVIII du *Bulletin de la Société mathématique*, j'ai déduit du ds^2 des expressions du paramètre de distribution K d'une surface réglée passant par une courbe, et de la distance ρ comprise entre la courbe et la ligne de striction sur la génératrice. La courbure de la surface en un point situé sur la courbe directrice est donnée par

$$-\frac{K^2}{(1+K^2\rho^2)^2}.$$

En appliquant les formules que je viens de rappeler, on trouve pour expression de la courbure, que je désignerai par $-G^2$,

$$-G^2 = -\left(\pi - \omega \cot\theta \sin\varphi - \frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2,$$

ω et π étant les courbures de la courbe donnée, θ l'angle de la génératrice avec la courbe, φ l'angle du plan tangent à la surface avec le plan osculateur à la courbe, et σ l'arc de cette courbe.

2. Il résulte de là que, si l'on se donne ω, π, θ, G en fonction de σ, la détermination de φ dépend de l'une des équations de Riccati

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \omega \cot\theta \sin\varphi + \pi - G,$$

que l'on obtient en prenant pour G l'une des racines carrées de la valeur absolue de la courbure. Si $G = 0$, les deux équations se réduisent à une seule; en tout cas, l'équation correspondant à un système de fonctions ω, π, θ, G est la même que celle qui correspond au système ω, $\pi - G$, θ, 0. La détermination d'une surface passant par une courbe et ayant une courbure donnée le long de cette courbe, revient donc à celle d'une développable passant par une autre courbe.

3. *Normalies.* — J'appelle *normalies* d'une courbe les surfaces formées par des normales à cette courbe. Si deux normalies se coupent sous un angle constant, $\frac{d\varphi}{d\sigma}$ a la même valeur pour les deux surfaces; leurs courbures ont alors pour expression commune

$$-\left(\pi - \frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2.$$

Donc, *si deux normalies se coupent sous un angle constant, elles ont même courbure tout le long de leur directrice.* En particulier :

1° Si l'une est développable, l'autre l'est aussi : propriété classique;

2° Les normalies formées par des droites invariablement liées au trièdre de la courbe ont toutes pour courbure $-\pi^2$, sur la directrice. Si la directrice est plane, ces normalies donnent des hélicoïdes développables.

4. Si l'on considère deux normalies ayant même courbure, les angles φ_1 et φ_2 correspondant à ces surfaces sont donnés par

$$\frac{d\varphi_1}{d\sigma} = \pi - G, \qquad \frac{d\varphi_2}{d\sigma} = \pi - G,$$

ou par

$$\frac{d\varphi_1}{d\sigma} = \pi - G, \qquad \frac{d\varphi_2}{d\sigma} = \pi + G.$$

Dans le premier cas, on a

$$\frac{d(\varphi_1 - \varphi_2)}{d\sigma} = 0,$$

dans le second

$$\frac{d\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)}{d\sigma} = \pi.$$

Donc, *si deux normalies ont même courbure tout le long de la directrice, elles se coupent sous un angle constant,* ce qui est le cas des développables; *ou bien elles admettent comme bissectrices des normalies développables.*

5. *Surfaces qui coupent sous un angle constant la développable des tangentes.* — Les surfaces correspondant à des valeurs constantes de φ_1 et ayant une courbure donnée le long de la directrice vérifient des équations

$$\pi + \omega \cot\theta \sin\varphi = \pm G.$$

Or les équations d'une génératrice définie par les angles θ et φ sont, par rapport au trièdre formé par la tangente, la normale principale et la binormale,

$$\frac{X}{\cos\theta} = \frac{Y}{\sin\theta\cos\varphi} = \frac{Z}{\sin\theta\sin\varphi};$$

donc cette droite est sur l'un des cônes

$$(\pi \mp G)(Y^2 + Z^2) + \omega ZX = 0.$$

Ces cônes ont tous deux pour plan principal le plan rectifiant, et les plans perpendiculaires aux génératrices principales donnent les sections circulaires. Si $G = \pm\pi$, l'un des cônes se décompose en deux plans : plan osculateur et plan normal. Si $G = 0$, les deux cônes se confondent en un seul, lieu des génératrices des développables correspondant à la condition $\varphi =$ const., cône qui a été déjà signalé dans divers travaux.

6. Un plan perpendiculaire à la tangente, mené à une distance d du point de la directrice, donne dans les deux cônes correspondant à une valeur donnée de la courbure des cercles de rayons

$$R_1 = \frac{\omega d}{2(\pi - G)}, \qquad R_2 = \frac{\omega d}{2(\pi + G)},$$

le cercle situé sur le cône correspondant à $G = 0$ a pour rayon

$$R_0 = \frac{\omega d}{2\pi};$$

on en déduit la relation

$$\frac{2}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

d'où l'on conclut que tout plan passant par la tangente coupe les cônes correspondant à une même valeur de G^2, et le cône correspondant à $G = 0$ suivant des droites qui forment avec la tangente un faisceau harmonique.

7. *Surfaces engendrées par les droites invariablement liées à la courbe.* — M. Appell a fait remarquer que, pour qu'une droite liée à une courbe engendre une développable autre que celle des tangentes, il faut que cette courbe soit une hélice, et que la droite soit sur le cône du second degré dont il a été question. Si l'on considère une surface ayant tout le long de la directrice une courbure constante, de valeur quelconque $-G^2$, on voit que les courbures de la directrice sont liées par une équation du premier degré,

$$\pi + \omega \cot\theta \sin\varphi = G,$$

c'est-à-dire, d'après un théorème bien connu, dû à M. Bertrand, que les normales principales de la courbe doivent être normales principales d'une seconde courbe. Les génératrices des surfaces considérées, qui passent par un point de la courbe, forment le cône

$$(\pi - G)(Y^2 + Z^2) + \omega ZX = 0,$$

qui est alors de grandeur constante.

8. Pour définir complètement ce cône, comme on sait que les génératrices principales sont perpendiculaires aux sections circulaires, il suffit de déterminer ces génératrices. L'une d'elles est la tangente; l'autre fait avec la tangente un angle θ défini par

$$\pi + \omega \cot\theta = G.$$

Si l'on identifie cette équation de condition avec celle qui lie les courbures ω et π à la longueur du segment de normale compris entre la directrice et la courbe qui a les mêmes normales principales et à l'angle des tangentes à ces courbes, on reconnaît facilement que la seconde génératrice est menée dans le plan rectifiant perpendiculairement à la binormale de la courbe conjuguée. On peut aussi remarquer que cette seconde génératrice engendre une surface qui a pour ligne de striction la directrice et qui est applicable sur une surface gauche de révolution. Or j'ai déjà indiqué la construction précédente comme donnant une surface applicable sur une surface gauche de révolution, lorsque sa ligne de striction est donnée (voir *Leçons* de M. Darboux, t. III, p. 314).

9. *Observations relatives à une Note de M. Cesaro.* — Après la publication aux *Comptes rendus* de la Communication que je rappelle en commençant, M. Cesaro a fait insérer dans les *Nouvelles Annales*, 3ᵉ série, tome IX, page 294, une Note où il déclare qu'un article, paru l'année précédente dans le même Recueil (p. 445), contenait « sous une forme plus ou moins explicite les théories énoncées par M. Bioche ». Je crois devoir donner à ce propos quelques explications; si je ne l'ai pas fait plus tôt, c'est que je n'ai lu qu'il y a peu de jours la Note en question dans le Tome IX des *Nouvelles Annales*.

Dans ma Communication, j'avais énoncé un théorème sur les points centraux des droites liées à un trièdre. Ce théorème avait été établi antérieurement par M. Cesaro, et M. Mannheim a fait remarquer qu'il était un cas particulier d'une propriété plus générale (*Nouvelles Annales*, 3ᵉ série, t. IX, p. 127). Mais, à part cela, la réclamation de M. Cesaro me paraît peu justifiée. Dans sa Note du Tome IX, il démontre la formule fondamentale; mais il ne l'avait pas démontrée auparavant. Nous nous sommes servis tous deux des coordonnées qu'il appelle *intrinsèques*, qui ont été employées avant nous. C'était donc à chacun d'en tirer ce qu'il pouvait.

10. Voici, d'ailleurs, ce qui constitue, en somme, la

conclusion de M. Cesaro dans la Note que je discute : « De même l'observation de M. Bioche, relative au changement de π en $\pi - G$, est comprise parmi les *Remarques sur les surfaces gauches*. Quelques énoncés de cette Note contiennent, à vrai dire, des restrictions inutiles, dues au choix particulier de la courbe fondamentale; mais en ne rien supposant sur cette ligne, il est facile de restituer aux énoncés toute la généralité dont ils sont susceptibles, et l'on peut alors étudier fort aisément les lignes asymptotiques ($\varphi = 0$), les géodésiques ($\varphi = 90°$), les lignes de courbure, etc., en attribuant à G successivement les formes

$$\pi, \quad \pi + \omega \cot\theta, \quad \omega \cot\theta \sin\varphi. \text{ »}$$

11. Pour répondre à la première phrase de cette citation, je copie le passage auquel elle fait allusion, en changeant seulement une notation : « On en (de ces formules) trouve sans peine une interprétation géométrique en observant que, si l'on diminue de G la torsion de (M) (la directrice), elles coïncident avec les conditions nécessaires et suffisantes pour que la direction considérée soit invariable dans l'espace » (p. 446). Je ne reconnais pas bien ma remarque là dedans, d'autant plus qu'il s'agit alors seulement du cas où la courbe considérée est ligne de striction. D'ailleurs, pour donner une idée des restrictions que M. Cesaro reconnaît être inutiles et qu'il aurait mieux fait, par suite, de supprimer, je ferai encore quelques citations.

12. « Lors donc que la ligne de striction est ligne de courbure de la surface, la courbure de celle-ci, le long de la ligne en question, est mesurée en valeur absolue, par le carré du paramètre de distribution des plans tangents » (p. 448). Or, il est bien connu que

cette propriété est caractéristique de toute ligne de striction.

« Remarquons enfin que toute ligne de striction et de courbure ne saurait être géodésique sans être plane » (p. 449). Or il est également bien connu que toute ligne de courbure qui est géodésique est plane.

Je ne voudrais pas être trop long. Je m'arrête donc là. Je crois en avoir dit assez pour montrer que, même eussé-je lu le premier article de M. Cesaro, avant de faire la Communication dont il parle dans le second, j'étais en droit de faire cette Communication; les restrictions de M. Cesaro masquant complètement la généralité dont ses énoncés étaient susceptibles.