NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ANDRÉ CAZAMIAN

Sur un lieu géométrique et ses applications

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 387-403

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__387_1>

SUR UN LIEU GÉOMÉTRIQUE ET SES APPLICATIONS;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN,
Élève du lycée de Pau.

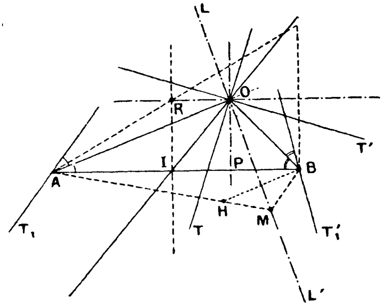
Nous nous proposons dans cette Note de rattacher les uns aux autres un certain nombre de problèmes, qui paraissent au premier abord bien différents, et où l'on trouve comme lieu une *strophoïde* droite ou oblique.

Nous partirons du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Etant donnés dans un plan* (*fig.* 1) *trois points fixes* A, B, O, *le lieu des points* M *tels que la bissectrice de l'angle* AMB (*ou de son supplément*) *passe par* O *est une strophoïde dont le point double est en* O.

Il est d'abord évident que le point O est un point double du lieu, puisque les deux bissectrices de l'angle AOB passent par O; et sur une droite quelconque LL′ issue de O se trouve un point du lieu, et un seul, que

Fig. 1.



l'on obtient en prenant le point d'intersection avec AH, H étant le symétrique de B par rapport à LL′. La courbe est donc du troisième ordre, elle passe par les points cycliques I et J, puisque la droite AI, par exemple, fait un angle indéterminé avec elle-même. La cubique est donc circulaire. Enfin, il est facile de voir que les tangentes au point double O sont les bissectrices de l'angle AOB, en supposant qu'un point du lieu se rapproche indéfiniment de O. La courbe est en définitive une cubique circulaire admettant un nœud à tangentes rectangulaires : c'est donc une strophoïde. Exprimons d'ailleurs analytiquement, et en prenant pour axes de coordonnées deux droites rectangulaires passant par O, que les tangentes des angles AMO, BMO (M étant un point du lieu) sont égales, nous aurons, en appelant (a, b), (a', b') les coordonnées des points A et B,

$$\frac{\dfrac{y-b}{x-a}-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}\dfrac{y-b}{x-a}}+\frac{\dfrac{y-b'}{x-a'}-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}\dfrac{y-b'}{x-a'}}=0$$

ou

$$\frac{ay - bx}{x^2 + y^2 - ax - by} = -\frac{a'y - b'x}{x^2 + y^2 - a'x - b'y}.$$

Sous cette forme, trois points du lieu sont en évidence : le point O et les points de rencontre de OA, OB, avec les cercles décrits sur OA et OB comme diamètres, c'est-à-dire les points A, B et P, projection de O sur AB. En écrivant l'équation ainsi

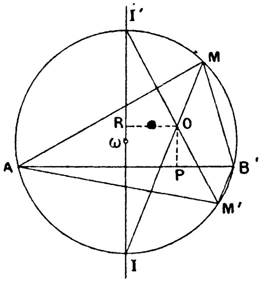
$$\begin{gathered}(x^2 + y^2)[(a + a')y - (b + b')x] \\ + (ab' + ba')(x^2 - y^2) + 2(bb' - aa')xy = 0,\end{gathered}$$

on reconnaît bien une strophoïde ayant pour point double l'origine, pour tangentes en ce point les bissectrices de l'angle AOB, pour direction asymptotique la droite OI, I étant le milieu de AB.

En supposant que la droite LL′ tourne autour de O, on vérifie que dans les positions OA, OB, OP et OR parallèle à AB, les points A, B, P et R, projection de O sur la perpendiculaire au milieu de AB, font partie du lieu, et dans la position OI le point correspondant est rejeté à l'infini. On voit en outre que les tangentes aux points A et B sont les symétriques de AB par rapport à AO et BO, en faisant approcher indéfiniment LL′ de OA ou OB. La strophoïde est ainsi plus que suffisamment déterminée, et l'on peut construire son point fixe puisqu'on connaît la direction asymptotique issue du point double et plusieurs points de la courbe.

Une autre génération simple du lieu consisterait à en déterminer les deux points situés sur un cercle quelconque passant par A et B (*fig.* 2). On voit que l'on obtient ces deux points en joignant I et I′ situés sur le diamètre perpendiculaire à AB, au point O, ce qui détermine M et M′. Cette construction du lieu, en faisant varier le cercle, montre encore que le point O est point double, et que la courbe passe par les points A, B, P, R.

Fig. 2.



Parmi les applications immédiates du théorème tel que nous l'avons énoncé, signalons les suivantes :

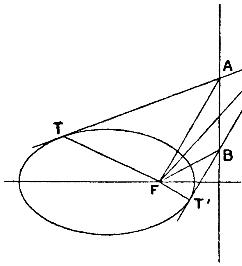
1. *Lieu des foyers des coniques tangentes en deux points donnés à deux droites données.*

Si F est un point du lieu, on sait, en effet, que la droite joignant ce point au point de rencontre O des deux tangentes données est bissectrice de l'angle AFB, A et B désignant les points de contact. Donc le lieu est une strophoïde ayant O pour point double et dont on construit immédiatement plusieurs éléments.

2. *Lieu des foyers des coniques tangentes à deux droites données et admettant pour directrice une droite donnée.*

Soient, en effet, O le point de concours des tangentes, A et B leurs points de rencontre avec la directrice donnée, T et T' les points de contact, et F un point du lieu. Les deux angles OFT, OFT' sont égaux, ainsi que les deux angles AFT, BFT' (droits tous les deux) : donc les deux angles OFA, OFB sont aussi égaux (*fig.* 3). Les points A et B sont fixes, et la bissectrice de l'angle AFB est assujettie à passer le point fixe O : le lieu est une strophoïde.

Fig. 3.



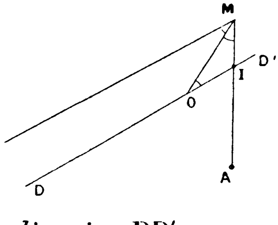
Examinons maintenant les divers cas particuliers du théorème, tous utiles dans les applications :

1° Si le triangle AOB est isoscèle, la hauteur du triangle isoscèle issue de O faisant évidemment partie du lieu, celui-ci se décompose en cette droite et un cercle, le cercle circonscrit au triangle AOB. Pour un point quelconque de ce cercle, la bissectrice de l'angle AMB va, en effet, passer par le milieu de l'arc AB.

Les points A, O, B ne sont pas assujettis à rester à distance finie. Si le point A est à l'infini, dans une direction DD' passant par O, on a le théorème suivant :

Étant donnés dans un plan deux points fixes, O, A

Fig. 4.



(*fig.* 4) *et une direction* DD' *passant par* O, *le lieu des points* M *tels que* OM *soit bissectrice de l'angle* *ayant pour côtés* AM *et la parallèle à* DD′ *menée par* M *est une strophoïde dont le point double est en* O *et dont la direction asymptotique est* DD′.

Il est à remarquer que le point A est le point fixe de la strophoïde.

En s'appuyant sur ce théorème, on trouve immédiatement la solution des problèmes suivants, que nous citons comme exemples.

3. *Dans un cercle, on considère un rayon fixe* OA *et un rayon mobile* OB. *Lieu de l'orthocentre du triangle* AOB.

Si H est un point du lieu, HO étant bissectrice de l'angle AHB, le lieu est une strophoïde (droite) dont O est le point double, A le point fixe.

4. *Lieu des foyers des hyperboles tangentes à une droite donnée en un point donné et admettant pour asymptote une droite donnée.*

Si O est le point de rencontre de la tangente avec l'asymptote, A le point de contact de la tangente, la droite FO est bissectrice de l'angle formé par FA et la parallèle à l'asymptote menée par F.

5. *Podaire d'un point quelconque de la directrice d'une parabole.*

Soient (*fig.* 5) F le foyer, A le sommet, M le point donné, P un point du lieu. Menons de P la parallèle PL à la directrice, et désignons par I le point de rencontre de la tangente en A avec le rayon vecteur du point M. On a

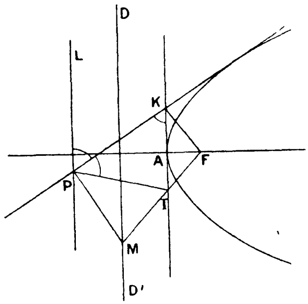
$$\widehat{LPK} = \widehat{PKI},$$

et le triangle KIP est isoscèle puisque le point I est le milieu de FM, donc

$$\widehat{\mathrm{LPK}} = \widehat{\mathrm{KPI}},$$

PM, perpendiculaire sur PK, sera donc bissectrice de l'angle IPL. Le lieu du point P est donc une strophoïde

Fig. 5.



ayant son point double en M, son point fixe en I, et sa direction asymptotique parallèle à la directrice (l'asymptote est la symétrique de la tangente au sommet par rapport à la directrice).

Dans le cas où le point O est à l'infini, dans une direction donnée AX, BX′, le problème revient à déterminer les points M tels que la bissectrice de l'angle AMB soit parallèle à une direction fixe. La strophoïde peut alors être considérée comme ayant son point double à l'infini : c'est une hyperbole équilatère. Si l'on prend, en effet, sur une hyperbole équilatère donnée, un point M et deux points fixes A et B diamétralement opposés, les bissectrices de l'angle AMB sont constamment parallèles aux asymptotes.

Exemples :

6. *Lieu des foyers des coniques dont on donne deux tangentes parallèles et le diamètre des contacts.*

7. *Lieu des points de contact des tangentes menées à une famille de coniques homofocales parallèlement à une direction donnée.*

Si M est le point de contact, la tangente est, en effet, bissectrice de l'un des angles FMF', F et F' désignant les deux foyers. Le centre de l'hyperbole équilatère est le centre des coniques homofocales.

Nous allons maintenant, comme applications, passer à une série de questions relatives aux coniques homofocales et où l'on trouve comme lieu une strophoïde.

8. Supposons d'abord qu'on donne dans le plan deux points fixes, A et B, et un troisième point fixe O. Du point O on décrit une série de cercles concentriques, et l'on demande le lieu des points de concours des tangentes menées à ces cercles par les points fixes A et B.

Soient C, D, E, F les quatre points de rencontre relatifs à un cercle particulier. On voit immédiatement que les angles ACB, ADB, AEB, AFB ont une de leurs bissectrices passant par le point fixe O. Le lieu cherché est donc la strophoïde dont O est le point double, qui passe par A, B et le pied P de la perpendiculaire abaissée de O sur AB ; ce point correspond au cas où la circonférence est tangente à la droite AB.

Remarquons qu'en faisant une transformation homographique de façon que les points A et B deviennent les points cycliques, les cercles concentriques se transformeraient en des coniques bitangentes en deux points fixes ; les points C, D, E, F deviendraient les foyers de ces coniques : nous serions ramenés au problème (1).

9. Considérons maintenant une famille de coniques ayant pour foyers deux points fixes F, F'. Soient A et B

deux points pris sur l'une d'elles. D'après un théorème dû à Chasles : « Pour que les tangentes menées de deux points A et B à une conique forment un quadrilatère circonscriptible à un cercle, il faut et il suffit que les points A et B appartiennent à une conique homofocale à la proposée. » Le quadrilatère formé par les tangentes menées de A et B à une conique (C) de la famille est donc circonscrit à un cercle dont le centre s'obtiendra en prenant le point de concours des bissectrices des angles FAF$'$, FBF$'$ (les points A et B étant supposés de côtés différents de l'axe focal), puisque les angles des tangentes menées d'un point fixe à une famille de coniques homofocales admettent les mêmes bissectrices. Il en résulte que tous les cercles inscrits dans les quadrilatères formés par les tangentes menées de A et B à chacune des coniques de la famille ont tous pour centre le point fixe ω, pôle normal de la corde AB dans la conique considérée. On peut donc, d'après le théorème précédent (8), énoncer le théorème suivant :

Étant donnée une famille de coniques homofocales, si par deux points A *et* B *pris sur l'une d'elles, on mène les tangentes à une conique quelconque de la famille, le lieu des points de rencontre de ces tangentes est une strophoïde passant par* A, B, *et dont le point double est le pôle normal ou tangentiel de la corde* AB, *par rapport à la conique considérée, et suivant que les points* A *et* B *sont de côtés différents ou du même côté de l'axe focal.*

Remarquons que la strophoïde passe par les foyers, puisque les deux points F, F$'$ constituent une conique de la famille, à laquelle les droites AF, AF$'$, BF, BF$'$ sont tangentes.

Si l'on considère une conique particulière (C) et deux points A et B sur cette conique, situés, par exemple, du même côté du grand axe, on voit que l'on peut déduire du théorème précédent, l'énoncé suivant :

10. *Deux points quelconques étant pris sur une conique, les droites joignant chacun d'eux aux deux foyers forment un quadrilatère complet dont les six sommets appartiennent à une strophoïde ayant pour point double le pôle tangentiel de la corde* AB (*si ces deux points sont du même côté de l'axe focal*) *et pour direction asymptotique le diamètre conjugué à la corde* AB.

Cette strophoïde passe, comme nous le savons, par les projections du point double sur la corde AB et sur les axes de la conique C. Nous la retrouverons dans les questions qui vont suivre.

11. Supposons alors que les deux points A et B se rapprochent indéfiniment sur la conique (C) considérée et viennent se confondre. Le lieu (9) devient le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe A à une famille de coniques homofocales. C'est donc une strophoïde passant par les foyers et ayant son point double au point A. Considérons d'ailleurs une tangente quelconque AM, M étant le point de contact. La droite MA est l'une des bissectrices de l'angle FMF'. C'est toujours le même problème que nous traitons.

12. Puisque deux coniques homofocales sont orthogonales en leurs points d'intersection, le point de contact M d'une tangente menée d'un point A est le pied d'une normale issue de A à la seconde conique de la famille passant par M. D'où cet énoncé :

Le lieu des pieds des normales menées d'un point *fixe à une famille de coniques homofocales est une strophoïde ayant son point double au point considéré.*

13. Considérons de nouveau deux points A et B sur une conique (C) et supposons-les situés, par exemple, du même côté de l'axe focal. Nous savons alors que le lieu des points de rencontre des tangentes menées de A et B à toutes les coniques homofocales à (C) est une strophoïde passant par A et B et dont le point double est le pôle ω de AB par rapport à la conique C. Il existe en particulier une conique de la famille tangente à la droite AB, et son point de contact M fait partie du lieu. Mais nous savons que le troisième point de la strophoïde situé sur AB est le pied de la perpendiculaire abaissée du point double ω. Le point M est donc le pied de cette perpendiculaire; en d'autres termes, le point M est la projection du point ω sur sa polaire. D'où cet énoncé :

La projection d'un point du plan d'une conique sur sa polaire est le point de contact de la conique homofocale tangente à cette polaire.

Il en résulte immédiatement que cette projection est un point tel que l'une des bissectrices de l'angle formé par les droites qui la joignent aux deux foyers passe par le point considéré. De là le théorème suivant :

Le lieu des projections d'un point fixe sur ses polaires par rapport aux coniques ayant pour foyers deux points donnés est une strophoïde passant par les foyers et ayant son point double au point fixe.

Il est maintenant absolument évident que les lieux (9), (11), (12), (13) relatifs à un point ω du plan forment une seule et même courbe, puisque l'on n'a fait que résoudre dans ces divers cas le problème : Trouver le lieu des points M tels que $M\omega$ soit bissectrice de l'angle FMF'. On voit d'ailleurs facilement que les strophoïdes obtenues ont au moins neuf points communs.

14. Supposons qu'un point P décrive une droite D. Ses polaires par rapport à une conique C vont se couper en un point fixe P_1. Soit K le pied de la perpendiculaire abaissée de l'un des points P sur sa polaire. La droite KP est une bissectrice de l'angle FKF' (13) : donc la perpendiculaire KP_1 est l'autre bissectrice. Cette bissectrice passant par le point fixe P_1, on peut énoncer la propriété suivante :

Lorsqu'un point parcourt une droite, les pieds des perpendiculaires menées de chaque position du point sur sa polaire décrivent une strophoïde dont le point double est le pôle de la droite et la direction asymptotique, le diamètre conjugué à la droite donnée.

Ce théorème peut encore s'énoncer ainsi :

Étant donnée une conique et un point P_1 *dans son plan, si l'on mène par ce point une sécante quelconque dont on prend le pôle* P *par rapport à la conique, le lieu des projections des points* P *sur la sécante est une strophoïde dont le point double est en* P_1 *et qui passe par les foyers de la conique.*

Ce dernier lieu est évidemment le même pour toutes les coniques homofocales.

15. Le lieu (9) peut être généralisé. Assujettir les points A et B à se trouver sur une conique de la famille,

c'est assujettir le quadrilatère ABFF′ à être circonscriptible à un cercle. L'énoncé général sera le suivant :

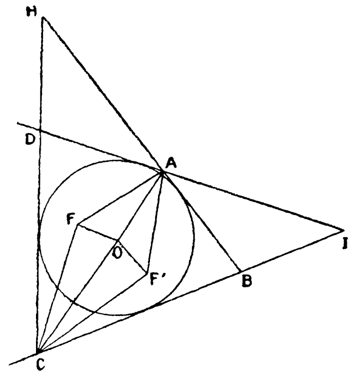
On considère deux familles de coniques homofocales ayant pour foyers deux couples de sommets opposés d'un quadrilatère circonscriptible. Le lieu des points de rencontre des tangentes communes est une strophoïde dont le point double est au centre du cercle inscrit dans le quadrilatère.

Soient, en effet, ω le centre du cercle inscrit, A et B, C et D les deux couples de sommets opposés, M un point du lieu. Les deux angles AMB et CMD auront les mêmes bissectrices, puisque M est le point de concours de deux tangentes communes, et l'une de ces bissectrices passera par le point ω, puisque les droites (MA, MB), (MC, MD) sont les tangentes menées de M à deux coniques inscrites dans le quadrilatère et que toutes ces tangentes, parmi lesquelles se trouvent les tangentes au cercle ω, forment un faisceau en involution.

16. En faisant une transformation homographique des coniques homofocales, de façon que deux points A et B pris sur l'une d'elles deviennent les points cycliques, les coniques homofocales se transforment en un faisceau de coniques inscrites dans un quadrilatère. Ce quadrilatère est circonscriptible à un cercle, puisque les points I et J, transformés de A et B, appartiennent à une conique de la famille. Le problème (9) ainsi transformé nous amène à chercher le lieu des points de rencontre des tangentes menées de I et J, c'est-à-dire le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscriptible. Cette courbe est du troisième ordre : je dis que c'est une strophoïde.

Soient, en effet, ABCD, (AC), (BD) désignant les deux couples de sommets opposés, un quadrilatère circonscrit à un cercle O et S une conique inscrite dans ce quadrilatère (*fig.* 6). Les points A et C peuvent être

Fig. 6.



considérés comme appartenant à une conique homofocale à S, puisque les tangentes menées de A et C à S forment un quadrilatère circonscrit à un cercle, et le centre O de ce cercle étant le point de concours des bissectrices des angles opposés DAB, DCB. Soient alors F, F′ les foyers de S. Le quadrilatère AFCF′ est donc aussi circonscriptible, d'après le théorème de Chasles, et le centre du cercle inscrit est le point de concours des bissectrices des quatre angles FAF′, FCF′, AFC, AF′C; en particulier, des angles FAF′, FCF. Mais les angles FAF′ et DAB ont les mêmes bissectrices, de même les angles FCF′, DCB. Donc le centre du cercle inscrit dans le quadrilatère AFCF′ se confond avec le point O. Les bissectrices des angles AFC, AF′C vont passer par le point O. Le lieu des points F et F′ est donc bien une strophoïde dont le point double est en O, et qui passe par A et C.

En répétant le même raisonnement pour les deux autres couples de sommets opposés, on verrait que la strophoïde lieu passe aussi par les points C, D, H, I.

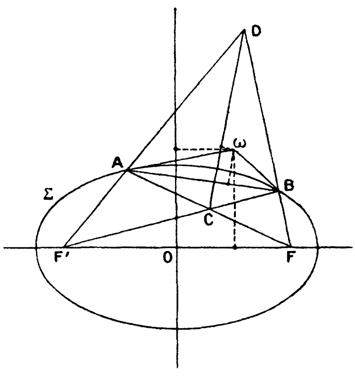
Elle passera aussi par les projections du centre du cercle, qui est le point double, sur les diagonales AC, BD, HI. Elle passera encore par les projections de ce centre sur les perpendiculaires aux milieux des diagonales.

Pour avoir sa direction asymptotique, il faut joindre le point O au milieu d'une diagonale ; ces trois droites doivent se confondre (on retrouve ainsi la propriété de la droite de Newton du quadrilatère).

Nous arrêterons là l'étude des applications du théorème que nous avons signalé au début. En combinant les divers résultats obtenus, on peut donner l'énoncé général suivant des propriétés étudiées, dont la plupart sont, séparément, bien connues. Nous ne ferons que mettre en évidence l'identité de tous ces lieux.

Étant donnés une conique Σ *de foyers* F, F′, *de centre* O, *et un point fixe* ω *dans son plan* (*fig.* 7), A

Fig. 7.



et B *étant deux points de la courbe, en joignant ces deux points aux foyers, on forme un quadrilatère cir-*

conscriptible à un cercle, dont les six sommets sont A, B, C, D, F, F′. *Soit* ω *le centre du cercle inscrit, c'est-à-dire le point de concours des tangentes (ou des normales) en* A *et* B. *Il existe une strophoïde* S *dont le point double est* ω, *les tangentes en ce point étant les bissectrices communes des angles formés par les droites joignant* ω *à deux couples de sommets opposés du quadrilatère, en particulier aux points* F, F′, *la direction asymptotique étant celle de la droite de Newton du quadrilatère, c'est-à-dire le diamètre conjugué à* AB *dans la conique* Σ. *Cette strophoïde passe par les points suivants : les six sommets du quadrilatère complet* A, B, C, D, F, F′ (*la tangente au point* A, *par exemple, étant la symétrique de* AB *par rapport à* Aω), *les projections de* ω *sur les axes de la conique, sur les diagonales* AB, CD *et sur les droites perpendiculaires en leur milieu, par les pieds des normales menées de* ω *à la conique* Σ. *Cette strophoïde* S *jouit des propriétés suivantes :*

1° *Elle est le lieu des foyers des coniques inscrites dans le quadrilatère ;*

2° *Le lieu des points de concours des tangentes communes aux coniques admettant pour foyers deux couples de sommets opposés du quadrilatère, en particulier le lieu des points de rencontre des tangentes menées de deux sommets opposés aux coniques admettant pour deux foyers deux autres sommets opposés ;*

3° *Le lieu des projections du point* ω *sur les axes de toutes les coniques inscrites dans le quadrilatère ;*

4° *Le lieu des points de contact des tangentes, des pieds des normales menées de* ω *à l'une quelconque de ces coniques, le lieu des projections du point* ω *sur ses polaires, le lieu des projections des différents points* *de la polaire de* ω *par rapport à l'une quelconque de ces coniques sur leurs propres polaires par rapport à la même conique* (14).

(Soit, en effet, σ une conique particulière inscrite dans le quadrilatère, la strophoïde S' relative à σ et au point ω contient les foyers, les points de contact des tangentes, les pieds des normales, les projections de ω sur les axes de la conique et sur sa polaire; cette strophoïde S' n'est autre que la strophoïde S, car ces deux courbes ont en commun les points cycliques, le point à l'infini sur la droite de Newton, les deux foyers de σ, plus les six sommets du quadrilatère ou les projections de ω sur les diagonales et les perpendiculaires en leurs milieux, qui sont les points de ces lieux relatifs aux coniques infiniment aplaties du faisceau.)

Ces diverses propriétés s'étendent en outre à toutes les coniques homofocales à chacune des coniques inscrites dans le quadrilatère, en particulier à toutes les coniques homofocales à la conique ayant pour foyers deux sommets opposés F, F' du quadrilatère.