Nouvelles annales de mathématiques

G. Humbert

Sur l'orientation des systèmes de droites

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 37-64

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__37_1>

SUR L'ORIENTATION DES SYSTÈMES DE DROITES [1];

PAR M. G. HUMBERT.

I. — THÉORÈMES FONDAMENTAUX.

1. Laguerre a fait connaître, dans le *Bulletin de la Société philomathique,* plusieurs propositions géométriques très simples, relatives aux directions des systèmes de droites dans le plan, dont il a déduit des conséquences nombreuses et importantes ; nous avons eu nous-même l'occasion, dans un Mémoire sur le théorème d'Abel, de retrouver analytiquement ces propositions et de leur donner une certaine extension ; notre but est maintenant de démontrer un principe très général, auquel peuvent se rattacher toutes les propriétés énoncées jusqu'ici sur les directions des systèmes de

[1] Ce travail a été publié en partie dans le tome X de l'*American Journal of Mathematics*. M. Franklin, dans le tome XII du même journal, a indiqué une méthode très intéressante pour retrouver nos résultats; nous avons profité, dans notre nouvelle rédaction, de quelques-unes de ses indications.

Le § VII du travail actuel est inédit.

droites, et qui se prête aisément à des applications nouvelles.

A cet effet, nous commencerons par présenter sous une forme nouvelle une notion importante, introduite dans la Géométrie par Laguerre, celle de l'*orientation* d'un système de droites. La définition donnée par Laguerre est la suivante.

Soient, dans un plan, deux systèmes de n droites, A et A′; prenons arbitrairement un axe fixe, H, dans ce plan : si la somme des angles que font avec l'axe fixe les droites du système A est égale, à un multiple de π près, à la somme analogue pour les droites du système A′, on dit que les systèmes A et A′ ont même *orientation;* cette propriété est évidemment indépendante du choix de l'axe fixe H dans le plan : elle ne dépend que des directions des droites considérées.

2. Cette définition peut être transformée et précisée, au point de vue analytique, comme il suit.

Menons par l'origine des parallèles

$$y - a_1 x = 0, \qquad y - a_2 x = 0, \qquad \ldots . \qquad y - a_n x = 0$$

et

$$y - a'_1 x = 0, \qquad \ldots, \qquad y - a'_n x = 0$$

aux n droites de chacun des systèmes A et A′; soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$; $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ les angles de ces droites avec Ox, les axes étant supposés rectangulaires. On a

$$\alpha_k = \text{arc tang}\, a_k, \qquad \alpha'_k = \text{arc tang}\, a'_k,$$

d'où

$$e^{2i\alpha_k} = \cos(2 \,\text{arc tang}\, a_k) + i \sin(2\,\text{arc tang}\, a_k),$$

c'est-à-dire

$$e^{2i\alpha_k} = \frac{1 - a_k^2}{1 + a_k^2} + i\,\frac{2a_k}{1 + a_k^2} = \frac{(1 + ia_k)^2}{1 + a_k^2} = \frac{i - a_k}{i + a_k}$$

et, par suite,

$$e^{2i(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)} = \frac{(i-a_1)(i-a_2)\ldots(i-a_n)}{(i+a_1)(i+a_2)\ldots(i+a_n)}.$$

Soit posé maintenant

$$(y-a_1x)(y-a_2x)\ldots(y-a_nx) = f(x,y),$$
$$(y-a'_1x)\ldots\ldots\ldots\ldots(y-a'_nx) = \varphi(x,y),$$

il vient

$$e^{2i(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)} = \frac{f(1,i)}{f(-1,i)}$$

et

$$e^{2i(\alpha'_1+\ldots+\alpha'_n)} = \frac{\varphi(1,i)}{\varphi(-1,i)}.$$

Si donc les deux systèmes A et A′ ont même orientation, c'est-à-dire si l'on a, d'après la définition,

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_n = \alpha'_1+\ldots+\alpha'_n + h\pi,$$

on aura

$$\frac{f(1,i)}{f(-1,i)} = \frac{\varphi(1,i)}{\varphi(-1,i)}.$$

On peut donc considérer comme définissant l'orientation d'un système de droites issues de l'origine, représenté par l'équation homogène $f(x,y) = 0$, le rapport $\frac{f(1,i)}{f(-1,i)}$. Si les droites ne passent pas toutes par l'origine, et si $f(x,y,z) = 0$ est l'équation de leur ensemble, l'orientation sera définie par le rapport $\frac{f(1,i,0)}{f(-1,i,0)}$, et, plus généralement encore, si $f(x,y,z) = 0$ est l'équation d'une courbe algébrique quelconque, le rapport $\frac{f(1,i,0)}{f(-1,i,0)}$ définira l'orientation du système des directions asymptotiques de cette courbe.

3. Cela posé, considérons dans un plan un système variable de n droites, dont l'équation dépend algébri-

quement d'un paramètre : l'équation de ce système est de la forme

$$(1) \qquad \alpha A + \beta B + \ldots + \lambda L = 0,$$

A, B, ..., L étant des polynômes d'ordre n en x, y, z, et $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ des polynômes entiers par rapport à deux paramètres t et θ liés par une relation algébrique $\varphi(t, \theta) = 0$.

L'orientation du système est définie par le quotient

$$\omega = \frac{\alpha A(-1, i, 0) + \ldots + \lambda L(-1, i, 0)}{\alpha A(1, i, 0) + \ldots + \lambda L(1, i, 0)}.$$

Pour que ω soit constant, quels que soient t et θ, c'est-à-dire pour que le système variable ait une orientation fixe, il faut et il suffit que ω ne puisse pas devenir infini, et, par suite, que toutes les valeurs de t et θ, liées par la relation $\varphi(t, \theta) = 0$, qui vérifient l'équation

$$(2) \qquad \alpha A(-1, i, 0) + \ldots + \lambda L(-1, i, 0) = 0.$$

vérifient également l'équation

$$(2\ bis) \qquad \alpha A(1, i, 0) + \ldots + \lambda L(1, i, 0) = 0.$$

D'une manière plus précise, il faut que les courbes représentées par les équations (2) et (2 *bis*), où t et θ sont les coordonnées courantes, rencontrent aux mêmes points la courbe $\varphi(t, \theta) = 0$.

Cette condition peut s'interpréter géométriquement d'une manière très élégante : les valeurs de t et θ qui vérifient l'équation (2) sont, en effet, celles qui correspondent aux systèmes (1) contenant une droite passant par le point cyclique J ($x = -1$, $y = i$, $z = 0$); de même celles qui vérifient l'équation (2 *bis*) correspondent aux systèmes contenant une droite passant par le point cyclique I ($x = 1$, $y = i$, $z = 0$); la condition trouvée plus haut exprime donc que tout système contenant une droite (et généralement k droites) passant par I contient aussi une droite (et généralement k droites) passant par J.

La conclusion subsiste si l'équation (1) dépend algébriquement d'un nombre qnelconque de paramètres.

De là, ce résultat fondamental :

THÉORÈME. — *Pour qu'un système variable de n droites, dont l'équation contient algébriquement un nombre quelconque de paramètres, conserve dans le plan une orientation fixe, il faut et il suffit que lorsqu'une ou plusieurs des droites du système viennent à passer par un des points cycliques, d'autres droites du système, en même nombre, passent au même instant par l'autre point cyclique.*

Plus généralement, si l'équation (1) est celle d'une famille de courbes algébriques, on peut énoncer la proposition suivante :

Soit une famille de courbes algébriques, dont l'équation contient algébriquement un nombre quelconque de paramètres : pour que l'orientation du système des directions asymptotiques de chacune de ces courbes soit constante, il faut et il suffit que toutes les courbes de la famille, qui passent par un des points cycliques du plan, passent en même temps par l'autre.

4. On peut faire de ces principes des applications nombreuses. Considérons d'abord le cas où un paramètre θ figure au premier degré dans l'équation d'une famille de courbes; ces courbes appartiennent alors à un même faisceau ponctuel

$$f(x, y, z) + \theta\varphi(x, y, z) = 0.$$

L'orientation du système des directions asymptotiques d'une des courbes précédentes dépend du coefficient

$$\omega = \frac{f(1, i, 0) + \theta\varphi(1, i, 0)}{f(-1, i, 0) + \theta\varphi(-1, i, 0)},$$

et de cette expression résulte immédiatement ce théorème :

Si deux courbes algébriques de degré n sont telles que leurs systèmes respectifs d'asymptotes aient même orientation, le système des asymptotes de toute autre courbe de degré n, passant par les points d'intersection des deux premières, aura même orientation que chacun des deux systèmes primitifs.

Si la courbe $\varphi = 0$ passe par les points cycliques du plan, $\varphi(1, i, 0)$ et $\varphi(-1, i, 0)$ sont nuls ; par suite :

Si deux courbes de même degré rencontrent aux mêmes points une courbe algébrique quelconque passant par les points cycliques du plan, les deux systèmes formés par leurs directions asymptotiques ont même orientation.

Comme cas particulier de cette proposition, on retrouve un théorème important, dû à Laguerre, et qu'on obtient en supposant que la courbe algébrique considérée devienne un cercle :

Si l'on groupe deux à deux, d'une manière quelconque, sur n droites, les 2n points communs à un cercle et à une courbe algébrique d'ordre n, l'orientation de chacun des systèmes de n droites ainsi obtenus est la même que celle des asymptotes de la courbe.

II. — Orientation de certains systèmes de tangentes.

5. En transformant par polaires réciproques quelques-unes des propositions qui précèdent, on arrive à des théorèmes intéressants sur l'orientation du système des tangentes qu'on peut mener d'un point à une courbe; ainsi, la proposition qui termine le n° 3 donne lieu à la suivante :

Soit une famille de courbes dont l'équation tangentielle dépend algébriquement d'un nombre quelconque de paramètres : pour que l'orientation du système des tangentes qu'on peut mener d'un point fixe O *à chacune de ces courbes demeure constante, il faut et il suffit que toutes les courbes de la famille qui touchent une des droites isotropes issues de* O *touchent l'autre droite isotrope issue de ce point.*

En particulier, si les courbes considérées appartiennent à un même faisceau tangentiel, une seule de ces courbes touchera une droite isotrope issue de O; si elle touche en même temps l'autre droite isotrope, le point O sera un foyer de cette courbe. Donc :

Soit un faisceau tangentiel de courbes algébriques de classe n; par un foyer f de l'une d'elles menons les n tangentes à l'une quelconque des autres : tous les systèmes ainsi obtenus à partir du point f ont même orientation.

Réciproquement,

Si un point f jouit de cette propriété, c'est le foyer de l'une des courbes du faisceau.

On peut dire aussi, en transformant par polaires réciproques le premier théorème du n° 3, que :

Si les tangentes menées d'un point à deux courbes *de classe n forment deux systèmes de même orientation, les n tangentes menées de ce point à une quelconque des courbes du faisceau tangentiel déterminé par les deux premières forment un système de même orientation que les deux systèmes primitifs.*

Si deux des courbes du faisceau sont homofocales, toutes les courbes du faisceau ont les mêmes foyers; l'une d'elles se décompose en une courbe de classe $n-2$ et en deux points, qui sont les points cycliques du plan. Un point quelconque du plan peut être considéré comme un foyer de ce système de deux points; il résulte de là, par l'application du théorème précédent, que :

Les deux systèmes formés par les tangentes que l'on peut mener d'un point quelconque à deux courbes homofocales de même classe ont même orientation;

ou encore :

Le système des tangentes menées d'un point quelconque à une courbe algébrique de classe n, et le système des droites qui joignent le même point aux n foyers réels de la courbe ont même orientation.

(LAGUERRE.)

En combinant ce résultat avec le précédent, on arrive à une proposition simple relative au lieu des foyers des courbes d'un même faisceau tangentiel :

Le lieu des foyers des courbes d'un faisceau tangentiel déterminé par deux courbes A *et* B, *de classe n, est une courbe telle que si l'on joint un de ses points aux n foyers réels de* A *et aux n foyers réels de* B, *les deux systèmes de droites ainsi obtenus aient même orientation.*

6. Nous reviendrons plus loin, avec quelques détails,

sur les conséquences géométriques de ce théorème; auparavant, nous ferons une application des principes précédents à la solution d'un problème qui paraît présenter un certain intérêt.

Ce problème est le suivant :

Trouver toutes les courbes algébriques telles que le système des tangentes qu'on peut mener d'un point à l'une d'elles ait une orientation fixe, indépendante de la position de ce point dans le plan.

Si l'on se reporte au théorème de Laguerre démontré plus haut, on voit que ces courbes ne peuvent être que celles qui ont tous leurs foyers à l'infini; mais, avant d'affirmer inversement que les courbes qui ont tous leurs foyers à l'infini jouissent de la propriété énoncée, on doit faire une discussion, très simple d'ailleurs.

Soit, en effet, G une courbe de classe n dont tous les foyers sont à l'infini : il est nécessaire pour cela qu'elle touche la droite de l'infini aux points I et J, et qu'on ne puisse pas lui mener par I ou J d'autre tangente que cette droite. Dans ce cas, tous les foyers de la courbe sont à l'infini, mais leur position n'est pas déterminée, de sorte que le théorème de Laguerre ne paraît pas immédiatement applicable.

On peut voir néanmoins, d'une autre manière, que l'orientation du système des n tangentes menées à G d'un point quelconque O du plan ne dépend pas de la position de ce point. Imaginons, en effet, que O décrive une droite; l'équation du système des n tangentes issues de O contient algébriquement un paramètre, et le théorème général du n° 3 est applicable. Par suite, l'orientation de ce système est fixe, si, toutes les fois qu'une ou plusieurs des tangentes issues de O passent par le point cyclique I, d'autres tangentes en même nombre passent par le point cyclique J. C'est précisément ce qui se présente ici ; une tangente menée de O à G ne peut passer par I que si O est à l'infini, et elle passe alors par J. Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

L'orientation du système des tangentes menées d'un point à une courbe algébrique ayant ses foyers à l'infini est indépendante de la position du point considéré dans le plan.

Il est facile de donner l'équation générale de ces courbes en coordonnées tangentielles rectangulaires ; cette équation est

$$(u^2 + v^2) f_{n-2}(u, v) = F_n(u, v),$$

f_{n-2} étant un polynôme quelconque de degré $n - 2$ en u et v, et F_n un polynôme, également quelconque, de degré n, mais homogène.

7. Parmi les courbes qui ont tous leurs foyers à l'infini, on peut citer, avec Laguerre, celles qui sont enveloppées par une droite dont deux points donnés décrivent respectivement deux courbes algébriques, quelconques d'ailleurs.

Un autre exemple intéressant est fourni par la famille des épicycloïdes algébriques.

Si une courbe a tous ses foyers à l'infini, c'est-à-dire si les tangentes qu'on peut lui mener par les points cycliques coïncident toutes avec la droite de l'infini, la réciproque de cette courbe par rapport à un cercle de centre O sera telle que les droites isotropes issues de O ne la couperont qu'au point O.

Or la réciproque d'une épicycloïde par rapport au cercle fixe a pour équation, en coordonnées polaires,

$$(3) \qquad \frac{1}{r} = k \cos \frac{1}{2n+1}\,\theta,$$

n désignant le rapport du rayon du cercle mobile à celui du cercle fixe; de plus n est positif pour l'épicycloïde et négatif pour l'hypocycloïde.

Halphen a étudié d'une manière complète les points multiples des courbes (3), dont il écrit l'équation

$$(4)\qquad \frac{1}{r} = k \cos \frac{p}{q}\theta,$$

p et q étant positifs et premiers entre eux. Il résulte de ses belles recherches que les courbes précédentes n'ont un point singulier à l'origine, O, que si p est plus grand que q; en ce cas, la courbe présente en O deux *cycles*, dont les tangentes sont respectivement les droites isotropes; l'ordre de ces cycles est $p - q$ ou $\frac{p-q}{2}$, selon que p et q ne sont pas ou sont tous deux impairs; la classe des cycles est $2q$ ou q. D'ailleurs le degré de la courbe est $2p$ ou p. L'une des droites isotropes issues de O a en ce point avec la courbe un nombre d'intersections égal à la somme de l'ordre et de la classe du cycle correspondant, et de l'ordre de l'autre cycle, c'est-à-dire égal à $2p$ ou à p, ou, si l'on veut, égal dans tous les cas au degré de la courbe. Elle ne coupe donc la courbe qu'au point O.

Il résulte de là qu'une épicycloïde ou hypocycloïde algébrique aura tous ses foyers à l'infini si sa réciproque a une équation de la forme (4), p et q étant positifs, et p étant supérieur à q.

Soit alors $n = \frac{\lambda}{\mu}$, λ et μ étant premiers entre eux, on aura

$$\frac{p}{q} = \pm \frac{1}{2n+1} = \pm \frac{\mu}{2\lambda + \mu},$$

si μ et λ sont positifs, c'est-à-dire si la courbe est une épicycloïde, p sera toujours inférieur à q.

Si la courbe est une hypocycloïde, on devra supposer λ négatif, et l'on aura, si $\lambda = -\lambda'$,

$$\frac{p}{q} = \pm \frac{\mu}{\mu - 2\lambda'}.$$

Il faut, pour que p soit supérieur à q, que μ soit, en valeur absolue, supérieur à $\mu - 2\lambda'$, c'est-à-dire que λ' soit plus petit que μ; n est alors, en valeur absolue, inférieur à 1. Donc :

Les hypocycloïdes algébriques obtenues en faisant rouler un cercle à l'intérieur d'un cercle plus grand ont tous leurs foyers à l'infini;

et, par suite,

L'orientation du système des tangentes menées d'un point du plan à l'une de ces courbes est indépendante de la position du point.

Les autres courbes de la famille des épicycloïdes ou hypocycloïdes algébriques ne possèdent pas la même propriété.

III. — Application a l'hypocycloïde a trois rebroussements.

8. La plus simple des hypocycloïdes qu'on vient de rencontrer est, après la droite qui correspond au cas de $n = -\frac{1}{2}$, l'hypocycloïde à trois rebroussements qui correspond à celui de $n = -\frac{1}{3}$; le théorème précédent donne une propriété des tangentes à cette courbe qui paraît nouvelle, et qu'on peut énoncer ainsi :

L'orientation du système des trois tangentes menées *d'un point quelconque à une hypocycloïde à trois rebroussements est la même que celle des trois axes de symétrie de la courbe.*

Ce théorème permet, lorsqu'on connaît deux tangentes de l'hypocycloïde, de construire immédiatement et sans ambiguïté la troisième tangente qu'on peut mener par le point d'intersection des deux premières. On peut le regarder comme l'interprétation géométrique, dans le cas de l'hypocycloïde, de la propriété analytique fondamentale des courbes de troisième classe, propriété bien connue qu'on peut énoncer ainsi : il est possible de faire correspondre à chaque tangente d'une courbe de troisième classe un argument, de telle sorte que les arguments des trois tangentes issues d'un point quelconque aient une somme constante. En général, on ne connaît pas la signification *géométrique* de ces arguments, qui s'introduisent par la considération des fonctions elliptiques ; dans le cas de l'hypocycloïde, on voit que cette signification est très simple, l'argument étant l'angle que fait la tangente avec un des axes de symétrie de la courbe.

Il importe, pour ce qui va suivre, de préciser cette notion : soit t une tangente de l'hypocycloïde ; si par un point fixe O nous menons une parallèle à t et une parallèle Ox à l'un des axes de la courbe, choisi une fois pour toutes, nous désignerons par α l'angle que font ces deux droites, en le comptant à partir de Ox, dans le sens trigonométrique. Cet angle n'est défini qu'à un multiple près de π, ce qui n'a aucun inconvénient, puisque les orientations sont définies dans les mêmes conditions.

9. Cela posé, on déduit aisément du théorème fondamental les conséquences suivantes.

Soit t une tangente en un point A de l'hypocycloïde : les bissectrices de l'angle des deux tangentes autres que t, que l'on peut mener à la courbe par un point de cette droite, sont parallèles à deux directions fixes.

Ces directions sont celles des tangentes aux points B et C, où la tangente *t* rencontre de nouveau l'hypocycloïde.

On voit ainsi qu'une tangente à la courbe la rencontre de nouveau en deux points où les tangentes sont perpendiculaires l'une à l'autre : proposition bien connue, qui sert de base au beau Mémoire de M. Cremona sur l'hypocycloïde.

Par deux points quelconques d'une tangente t à l'hypocycloïde menons à la courbe les quatre tangentes autres que t : ces quatre droites forment un quadrilatère inscriptible dans un cercle.

Réciproquement, si le quadrilatère complet formé par quatre tangentes de l'hypocycloïde a quatre de ses sommets sur un cercle, la droite qui joint les deux autres sommets est une tangente de la courbe.

Dans tout triangle isoscèle circonscrit à une hypocycloïde, la droite qui joint le sommet au point de contact de la base est une tangente de la courbe.

Par chaque sommet d'un triangle circonscrit à une hypocycloïde passe une nouvelle tangente, distincte des côtés du triangle : les trois droites ainsi définies forment un nouveau triangle semblable au premier (1).

---

(1) Ce dernier théorème a été donné par M. S. Kantor (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. III, p. 137); je n'avais pas connaissance du remarquable travail de M. Kantor lors de la première publication de ce Mémoire; je m'empresse de reconnaître ici ses droits de priorité.

10. Le dernier théorème mérite d'être étudié avec quelques détails; il donne lieu à des conséquences intéressantes.

D'un triangle ABC circonscrit à l'hypocycloïde, on déduit, en menant les tangentes, distinctes des côtés, qui passent par les trois sommets un nouveau triangle $A_1B_1C_1$ semblable au premier; en appliquant la même construction à $A_1B_1C_1$, on obtient un troisième triangle semblable aux deux premiers, et ainsi de suite. Cette série de triangles est-elle illimitée? Retombe-t-on nécessairement sur un des triangles déjà trouvés, ou l'un des triangles finit-il par se réduire à un point? Ce sont là des questions auxquelles il est facile de répondre par l'application du théorème fondamental.

Désignons par α, β, γ les angles que font avec un des axes de symétrie de la courbe les côtés du triangle ABC; soit γ_1 l'angle que fait avec ce même axe la troisième tangente issue du point C. On a, d'après le théorème fondamental,

$$\gamma_1 + \alpha + \beta = h\pi,$$

d'où

$$\gamma_1 \equiv \gamma - (\alpha + \beta + \gamma) \qquad (\mathrm{mod}\ \pi).$$

Par suite, les angles α_1, β_1, γ_1, que font avec l'axe considéré les trois côtés du triangle $A_1B_1C_1$, sont

$$\alpha_1 \equiv \alpha - (\alpha - \beta + \gamma) \qquad (\mathrm{mod}\ \pi),$$
$$\beta_1 \equiv \beta - (\alpha + \beta + \gamma),$$
$$\gamma_1 \equiv \gamma - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Ce sont ces relations qui montrent la similitude des triangles ABC et $A_1B_1C_1$, puisque l'on en tire évidemment

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha - \beta, \qquad \alpha_1 - \gamma_1 = \alpha - \gamma, \qquad \beta_1 - \gamma_1 = \beta - \gamma.$$

Rien n'est plus aisé que de déterminer le rapport de similitude.

Remarquons, en effet, que les côtés homologues des deux triangles se coupent sous des angles égaux à $(\alpha + \beta + \gamma)$; or, d'après un théorème connu de Géométrie élémentaire, si, par les sommets d'un triangle, on mène des droites faisant avec les côtés opposés, dans un même sens de rotation, des angles égaux ω, ces droites forment un nouveau triangle semblable au premier, avec un rapport de similitude égal à $2\cos\omega$.

Les triangles $A_1B_1C_1$ et ABC sont donc semblables avec un rapport de similitude égal à $2\cos(\alpha + \beta + \gamma)$.

11. De là se déduisent de suite quelques résultats simples.

En premier lieu, si $\alpha + \beta + \gamma \equiv \pm \frac{\pi}{3}$, $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$ est égal à $\frac{1}{2}$, et les triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont égaux. On a d'ailleurs

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \equiv -2(\alpha + \beta + \gamma) \equiv \pm \frac{\pi}{3} \qquad (\text{mod } \pi),$$

et le triangle $A_2B_2C_2$ déduit de $A_1B_1C_1$ sera égal aux deux précédents. On a pour ce triangle

$$\alpha_2 \equiv \alpha_1 \mp \frac{\pi}{3} \equiv \alpha \mp \frac{2\pi}{3} \qquad (\text{mod } \pi).$$

. . . .

De même pour le triangle $A_3B_3C_3$ déduit de $A_2B_2C_2$, on aura

$$\alpha_3 \equiv \alpha_2 \quad (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) = \alpha \qquad (\text{mod } \pi).$$

. . . .

Le triangle $A_3B_3C_3$ coïncide donc avec ABC, puisqu'on ne peut mener à l'hypocycloïde qu'une seule tangente parallèle à une droite donnée.

Pour simplifier, appelons *premier triangle dérivé*, ou, plus simplement, *triangle dérivé* d'un triangle T, circonscrit à l'hypocycloïde, le triangle T_1 formé par les tangentes menées à la courbe des sommets de T, et distinctes des côtés de T; appelons *second triangle dérivé* de T le premier triangle dérivé de T_1, et ainsi de suite. On a en premier lieu la proposition générale :

Tous les triangles dérivés d'un même triangle lui sont semblables.

La propriété démontrée dans le cas où $\alpha + \beta + \gamma = \pm \frac{\pi}{3}$ s'énonce ainsi :

Si les côtés d'un triangle T, *circonscrit à l'hypocycloïde, font avec un des axes de symétrie de la courbe des angles dont la somme est* $\pm \frac{\pi}{3}$, *à un multiple près de* π, *les deux premiers triangles dérivés de* T *sont égaux à ce triangle, et le troisième coïncide avec* T.

En second lieu, si $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, le rapport de similitude est nul; le triangle $A_1 B_1 C_1$ se réduit donc à un point. De plus, on a

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{\pi}{2} \qquad (\bmod \pi),$$

ce qui montre que les côtés de $A_1 B_1 C_1$ sont perpendiculaires à ceux de ABC. Donc :

Si les côtés d'un triangle circonscrit à l'hypocycloïde font avec un des axes de symétrie de la courbe des angles dont la somme est $\frac{\pi}{2}$, *à un multiple près de* π, *les hauteurs de ce triangle sont des tangentes de l'hypocycloïde, et le triangle dérivé se réduit par suite à un point.*

12. Reprenons maintenant les relations

$$\alpha_1 \equiv \alpha - (\alpha + \beta + \gamma) \qquad (\bmod \pi),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

entre les angles qui correspondent à un triangle ABC et au triangle dérivé $A_1B_1C_1$. On a, de même, en passant au dérivé de $A_1B_1C_1$,

$$\alpha_2 \equiv \alpha_1 - (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \equiv \alpha + (\alpha + \beta + \gamma) \qquad (\bmod \pi)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

En général, pour le $n^{\text{ième}}$ triangle dérivé de ABC, on aura des expressions de la forme

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n &\equiv \alpha + h_n(\alpha + \beta + \gamma), \\ \beta_n &\equiv \beta + h_n(\alpha + \beta + \gamma) \\ \gamma_n &\equiv \gamma + h_n(\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned}\right\} \quad (\bmod \pi).$$

Pour le $(n+1)^{\text{ième}}$ triangle, il viendra

$$\alpha_{n+1} \equiv \alpha_n - (\alpha_n + \beta_n + \gamma_n) \equiv \alpha - [2h_n + 1](\alpha + \beta + \gamma)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

d'où, la loi de récurrence,

$$h_{n+1} + 2h_n + 1 = 0.$$

On en tire, puisque $h_1 = -1$,

$$h_n = \frac{(-2)^n - 1}{3},$$

et, par suite, les angles α_n, β_n, γ_n que font avec l'axe les côtés du $n^{\text{ième}}$ triangle dérivé de ABC sont donnés, en fonction des angles analogues α, β, γ qui correspondent à ce triangle, par les formules

$$\alpha_n \equiv \alpha + \frac{(-2)^n - 1}{3}(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$\beta_n \equiv \beta + \frac{(-2)^n - 1}{3}(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$\gamma_n \equiv \gamma + \frac{(-2)^n - 1}{3}(\alpha + \beta + \gamma)$$

Observons enfin que le rapport de similitude des triangles

$$A_n B_n C_n \quad \text{et} \quad A_{n-1} B_{n-1} C_{n-1}$$

est égal, d'après un résultat rappelé plus haut, à

$$2 \cos \frac{(-2)^n - (-2^{n-1})}{3} (\alpha + \beta + \gamma),$$

c'est-à-dire à

$$2 \cos 2^{n-1} (\alpha + \beta + \gamma).$$

13. Ces formules permettent de répondre aux questions que l'on s'était posées.

D'abord, dans quels cas la suite des triangles dérivés l'un de l'autre se terminera-t-elle à un point?

Pour que le triangle $A_n B_n C_n$ se réduise à un point, il faut que le rapport de similitude de ce triangle avec le triangle $A_{n-1} B_{n-1} C_{n-1}$ soit nul, c'est-à-dire que

$$2^{n-1}(\alpha + \beta + \gamma) \equiv \frac{\pi}{2} \qquad (\operatorname{mod} \pi),$$

ou

$$\alpha - \beta + \gamma = \frac{2k - 1}{2^n} \pi.$$

On aurait pu arriver de suite à ce résultat en écrivant que $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n$ est nul à un multiple près de π.

De là ce théorème, qui est la généralisation d'un résultat donné plus haut :

Si les côtés d'un triangle circonscrit à l'hypocycloïde font avec un des axes de symétrie de la courbe des angles dont la somme est de la forme $\frac{2k+1}{2^n}\pi$, *la série des triangles dérivés du premier se terminera à un point, au bout de n constructions.*

Ce point sera le point de concours des hauteurs du $(n-1)^{\text{ième}}$ triangle dérivé du triangle primitif.

Cherchons maintenant dans quels cas on retombera, après un certain nombre de constructions sur le triangle primitif.

Il faut pour cela que l'on ait

$$\alpha_n \equiv \alpha, \qquad \beta_n \equiv \beta, \qquad \gamma_n \equiv \gamma \qquad (\mathrm{mod}\,\pi),$$

c'est-à-dire

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{3k}{(-2)^n - 1}\pi.$$

Si n est le plus petit nombre pour lequel une relation de cette forme ait lieu, le $n^{\text{ième}}$ triangle dérivé du triangle primitif coïncidera avec ce triangle, et si l'on continue les constructions, on retrouve tous les triangles déjà formés.

Mais ici se présente une particularité curieuse : c'est qu'en construisant les triangles successifs à partir du premier, il peut arriver que l'un d'eux coïncide avec l'un des précédents sans que l'on ait retrouvé de nouveau le premier triangle.

En effet, le $p^{\text{ième}}$ et le $q^{\text{ième}}$ triangle dérivé $(q > p)$ coïncideront si l'on a

$$\frac{(-2)^p - 1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{(-2)^q - 1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) + k\pi,$$

c'est-à-dire

$$(-2)^p(\alpha + \beta + \gamma)[(-2)^{q-p} - 1] = 3k\pi$$

ou

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{3k}{(-2)^p[(-2)^{q-p} - 1]}\pi.$$

Si cette condition est remplie, k étant premier à 2, le $q^{\text{ième}}$ triangle dérivé coïncidera avec le $p^{\text{ième}}$, et, en continuant les constructions, on retrouvera indéfiniment les triangles dérivés dont l'ordre est compris entre

p et $q - 1$, sans retomber jamais sur le triangle primitif et les $p - 1$ premiers triangles dérivés. Ainsi :

Si les côtés d'un triangle circonscrit à l'hypocycloïde font avec un des axes de symétrie de la courbe des angles dont la somme est de la forme $\frac{3k}{2^p[(-2)^{q-p} - 1]}\pi$, *le* $q^{\text{ième}}$ *triangle dérivé de ce triangle coïncidera avec le* p^{ieme}.

14. Il est aisé d'expliquer *a priori* pourquoi, dans le cas qui nous occupe, le triangle primitif ne se reproduit pas nécessairement : cela tient à ce que la suite des triangles dérivés n'est pas réversible sans ambiguïté, ou, en termes plus précis, à ce qu'un même triangle circonscrit à l'hypocycloïde peut être considéré comme le dérivé de deux autres triangles circonscrits, et non pas d'un seul.

Reprenons, en effet, les relations

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha - (\alpha - \beta - \gamma) + k\pi,\\
\beta_1 &= \beta - (\alpha + \beta + \gamma) + l\pi,\\
\gamma_1 &= \gamma - (\alpha + \beta + \gamma) + m\pi.
\end{aligned}$$

On en tire

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) + \frac{l + m - k}{2}\pi,\\
\beta &= \beta_1 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) + \frac{k + m - l}{2}\pi,\\
\gamma &= \gamma_1 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) + \frac{k + l - m}{2}\pi.
\end{aligned}$$

Les nombres $l + m - k$, $k + m - l$, $k + l - m$ sont de même parité; on aura donc, pour α, β, γ, à des multiples de π près, les deux systèmes de valeurs

$$\alpha = \alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1), \qquad \alpha = \alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) + \frac{\pi}{2},$$

$$\beta = \beta_1 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1), \qquad \beta = \beta_1 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) + \frac{\pi}{2},$$

$$\gamma = \gamma_1 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1), \qquad \gamma = \gamma_1 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) + \frac{\pi}{2}.$$

De là ce théorème :

Dans tout triangle circonscrit à une hypocycloïde, on peut inscrire deux autres triangles circonscrits à la courbe : ces deux triangles sont semblables au premier et semblables entre eux ; leurs côtés homologues sont rectangulaires (1).

15. On pourrait pousser plus loin ces recherches, en étudiant l'ensemble des triangles circonscrits qui admettent pour triangle dérivé d'un ordre donné un même triangle circonscrit, et l'on arriverait ainsi à des résultats assez curieux que nous n'énoncerons pas, afin de ne pas fatiguer l'attention du lecteur ; nous nous contenterons de signaler une proposition de nature différente qui se déduit aisément du théorème fondamental :

Soient A, B, C *les points de contact des tangentes menées à l'hypocycloïde par un point* M ; *sur les directions* MA, MB, MC *portons, à partir de* M, *des longueurs* M*a*, M*b*, M*c*, *respectivement égales aux inverses des segments* MA, MB, MC : *le point* M *est le centre de gravité du triangle abc* (2).

(1) Ce théorème appartient à M. Kantor.

(2) La démonstration de ce théorème est analogue à celle qui est développée plus bas, aux nos 17, 18 : on prouve ainsi que le centre harmonique de A, B, C par rapport à M coïncide avec M, ce qui est

Sans insister sur les conséquences que l'on pourrait déduire de cette proposition pour la théorie de l'hypocycloïde à trois rebroussements, nous reviendrons au théorème démontré plus haut, relativement au lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de courbes planes, et nous montrerons qu'il met en évidence une classe intéressante de courbes étudiées déjà à un autre point de vue par divers géomètres, et en particulier par M. Darboux.

IV. — Lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de courbes planes.

16. Nous avons démontré plus haut que :

Le lieu des foyers des courbes d'un faisceau tangentiel déterminé par deux courbes A et B, de classe n, est une courbe F, telle que si l'on joint un de ses points aux n foyers réels de A et aux n foyers réels de B, les deux systèmes de droites ainsi obtenus aient même orientation.

Ce résultat peut être présenté sous une autre forme. Groupons deux à deux, d'une manière quelconque, un foyer a_k de la courbe A et un foyer b_k de la courbe B; il est clair que le lieu F est celui des points tels que, de l'un quelconque d'entre eux, les n segments $a_k b_k$ soient vus sous des angles ayant une somme algébrique égale à un multiple de π, et l'on retrouve ainsi les courbes remarquables de M. Darboux.

Ces courbes comprennent, comme cas particuliers,

précisément notre proposition. D'une manière plus générale, on établit de même que : *si l'on mène par un point* M *les tangentes à une courbe ayant tous ses foyers à l'infini, le centre harmonique des points de contact par rapport à* M *coincide avec ce point.*

les courbes telles que l'on voie, de chacun de leurs points, n segments fixes sous des angles dont la somme algébrique est égale à une constante quelconque : il suffit, en effet, de supposer que chacune des courbes A et B a un foyer à l'infini, c'est-à-dire que ces courbes touchent toutes deux la droite de l'infini; un des segments $a_k b_k$ est alors à l'infini, et il est vu de tout point du plan sous un angle constant θ. La somme des angles sous lesquels les autres segments à distance finie sont vus d'un point quelconque du lieu F est donc constante, et égale à $-\theta$, à un multiple près de π.

De la définition même du lieu F résulte immédiatement une belle proposition, donnée par M. Darboux :

Si une courbe est telle que, de chacun de ses points, plusieurs segments soient vus sous des angles dont la somme est un multiple de π, elle conserve la même propriété avec une infinité d'autres segments ayant tous leurs extrémités sur la courbe.

Ces segments s'obtiennent en joignant deux à deux, d'une manière quelconque, les foyers de deux courbes quelconques du faisceau tangentiel déterminé par les courbes A et B qui ont servi à la définition primitive du lieu.

Si A et B touchent la droite de l'infini, il résulte de ce qui a été dit plus haut que la proposition précédente doit être modifiée ainsi :

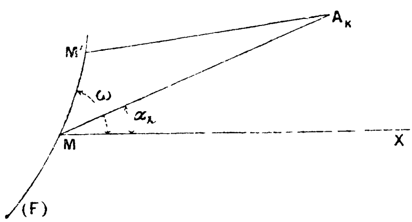
Si une courbe est telle que, de chacun de ses points, plusieurs segments soient vus sous des angles dont la somme est constante, elle conserve la même propriété avec une infinité d'autres segments, mais la valeur de la somme constante varie quand on passe d'un système de segments à l'autre.

La définition du lieu F ne dépend que de la position des foyers des courbes A et B; on peut, en particulier, supposer que chacune de ces courbes se réduise à ses n foyers réels, et l'on a ce théorème :

Si une courbe est telle qu'en joignant un quelconque de ses points à deux séries de n pôles fixes, à distance finie ou infinie, on obtienne deux systèmes de même orientation, cette courbe est le lieu des foyers des courbes de classe n qui touchent les n^2 droites joignant les pôles de l'une des séries aux pôles de l'autre série.

17. L'ensemble des n foyers réels d'une courbe appartenant à un faisceau tangentiel donné jouit de quelques propriétés simples, qui dérivent aisément des principes précédents.

Soient, en effet, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les n foyers réels de la courbe A; $B_1, \ldots, B_n$ ceux de la courbe B; M le foyer d'une courbe du faisceau tangentiel déterminé par A et B; M' le point infiniment voisin de M sur le lieu F.



Menons par M un axe quelconque MX; désignons par ω l'angle M'MX, par α_k l'angle A_kMX; par β_k l'nagle B_kMX. On a, d'après la propriété fondamentale du lieu F,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n,$$

et, en passant de M à M',

$$d\alpha_1 + d\alpha_2 + \ldots = d\beta_1 + d\beta_2 + \ldots.$$

Or $d\alpha_k$ est l'angle $M'A_kM$, et l'on a, dans le triangle $M'A_kM$,

$$d\alpha_k = \frac{MM'}{MA_k}\sin(\omega - \alpha_k).$$

Par suite,

$$(5) \qquad \sum \frac{\sin(\omega - \alpha_k)}{MA_k} = \sum \frac{\sin(\omega - \beta_k)}{MB_k}.$$

18. Ce résultat est susceptible d'une interprétation géométrique élégante, si l'on introduit une notion due à Laguerre.

Cette notion est celle du *centre harmonique* d'un système de points par rapport à un point.

Étant donnés, dans un plan, un point M et un groupe de n points, $A_1, \ldots, A_n$, portons sur chaque droite MA_k, à partir de M, une longueur égale à l'inverse de MA_k : composons ces longueurs comme des forces; sur la direction de leur résultante, portons, à partir de M, une longueur égale à l'inverse de la $n^{\text{ième}}$ partie de cette résultante; l'extrémité, a, du segment obtenu sera dit le *centre harmonique* des points $A_1, \ldots, A_n$ relativement au point M.

D'après cette définition, si l'on imagine par M deux axes rectangulaires MX et MY, et si α_k est l'angle de MA_k avec MX, les coordonnées du centre harmonique a seront

$$X = n\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \qquad Y = n\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2},$$

étant posé

$$\xi = \sum \frac{\cos\alpha_k}{MA_k}, \qquad \eta = \sum \frac{\sin\alpha_k}{MA_k}.$$

On peut aussi écrire

$$\xi = n\frac{X}{X^2+Y^2}, \qquad \eta = n\frac{Y}{X^2+Y^2}.$$

On aura des formules analogues pour les coordonnées du centre harmonique, b, des points $B_1, \ldots, B_n$, par rapport à M,

$$X' = n \frac{\xi'}{\xi'^2 + \eta'^2}, \qquad Y' = n \frac{\eta'}{\xi'^2 + \eta'^2},$$

étant posé

$$\xi' = \sum \frac{\cos \beta_k}{MB_k}, \qquad \eta' = \sum \frac{\sin \beta_k}{MB_k}.$$

Or la relation (5) donne

$$\xi \sin \omega - \eta \cos \omega = \xi' \sin \omega - \eta' \cos \omega.$$

Remplaçons dans cette équation ξ et η, ξ' et η' par leurs valeurs en X et Y, X′ et Y′, il vient

$$\frac{X \sin \omega - Y \cos \omega}{X^2 + Y^2} = \frac{X' \sin \omega - Y' \cos \omega}{X'^2 + Y'^2}.$$

En d'autres termes, un même cercle

$$x^2 + y^2 + \lambda(x \sin \omega - y \cos \omega) = 0$$

passe par a et b : ce cercle est d'ailleurs tangent en M à la direction MM′, c'est-à-dire à la courbe F. Donc, les centres harmoniques des points $A_1, \ldots, A_n$ et $B_1, \ldots, B_n$ par rapport à un même point M du lieu F, sont sur un cercle tangent à F au point M, et, comme on peut remplacer les points $A_1, \ldots, A_n$, ou $B_1, \ldots, B_n$ par les n foyers réels d'une quelconque des courbes du faisceau tangentiel déterminé par les courbes A et B, on a ce résultat :

Soit F *le lieu des foyers des courbes de classe n appartenant à un faisceau tangentiel donné : le centre harmonique des n foyers réels de l'une quelconque de ces courbes par rapport à un point fixe, choisi arbitrairement sur* F, *reste sur un cercle, tangent en ce point à la courbe* F.

19. Un cas particulier remarquable est celui où le point M est un *point double* de la courbe F; l'équation

$$\xi \sin\omega - \eta \cos\omega = \xi' \sin\omega - \eta' \cos\omega$$

est alors vérifiée pour les deux valeurs de ω qui correspondent aux deux branches de la courbe passant en M, et, par suite, on a nécessairement

$$\xi = \xi', \qquad \eta = \eta'.$$

Donc :

Si la courbe F *a un point double, le centre harmonique des n foyers réels d'une quelconque des courbes du faisceau tangentiel par rapport à ce point est un point fixe.*

Il est aisé de voir que la courbe F n'aura, en général, de point double que si l'une des courbes du faisceau tangentiel passe par I et J : le point double sera alors le point commun aux tangentes menées à la courbe en I et J, c'est-à-dire le foyer singulier de cette courbe.

Un autre cas intéressant est celui où M est à l'infini et ne coïncide pas avec un des points cycliques du plan ; il est aisé de voir alors que le centre harmonique d'un groupe de points par rapport à M coïncide avec le centre des moyennes distances de ces points; or on prouve facilement que, si aucune des courbes A et B n'a de foyer à l'infini, la courbe F a une asymptote réelle, et, par suite, il résulte du théorème démontré plus haut que le centre des moyennes distances des *n* foyers réels d'une courbe variable, appartenant à un faisceau tangentiel déterminé, décrit une *droite*.

L'application de ces théorèmes généraux au cas d'un faisceau tangentiel de coniques présente quelque intérêt.

(*A suivre.*)