NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. SONDAT

Sur un système de coordonnées triangulaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 360-387

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__360_0>

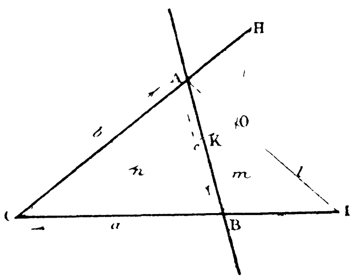
SUR UN SYSTÈME DE COORDONNÉES TRIANGULAIRES;

PAR M. P. SONDAT

1. On trouve dans la *Géométrie supérieure* de Chasles (III^e Section, Chap. XXIII et XXIV) l'aperçu d'un système de coordonnées triangulaires. Je me propose, dans cette Note, de développer ce système et de montrer par quelques applications l'utilité qu'on peut en tirer en Géométrie pure.

2. *Coordonnées du point.* — Soit (*fig.* 1) ABC un triangle de référence. Nous désignerons par a, b, c les

Fig. 1.



longueurs de ses côtés, comptés dans le même sens de rotation, par exemple, dans le sens alphabétique, savoir de B vers C, de C vers A et de A vers B, et par S sa surface.

Imaginons un point O à ses sommets par les droites OA, OB, OC dont nous désignerons les directions par

l, m, n, et coupant les côtés en I, H, K. Si nous posons

$$\frac{\mathrm{IB}}{\mathrm{IC}} = \alpha, \qquad \frac{\mathrm{HC}}{\mathrm{HA}} = \beta, \qquad \frac{\mathrm{KA}}{\mathrm{KB}} = \gamma,$$

les quantités α, β, γ, liées par l'égalité

$$(1) \qquad \alpha\beta\gamma = -1,$$

sont trois nombres abstraits qui fixent la position du point O. Nous les appellerons les coordonnées *segmentaires* de ce point.

Il est évident qu'un point de BC est déterminé par sa seule coordonnée α et que le centre de gravité est le point $(-1, \ -1, \ -1)$.

En posant

$$\frac{\sin(lb)}{\sin(lc)} = \alpha', \qquad \frac{\sin(mc)}{\sin(ma)} = \beta', \qquad \frac{\sin(na)}{\sin(nb)} = \gamma',$$

les côtés a, b, c étant comptés comme on l'a dit, les nombres α', β', γ' fixent aussi le point O et en sont les coordonnées *angulaires*.

Les coordonnées angulaires sont d'ailleurs reliées, en valeurs et en signes, aux coordonnées segmentaires par les relations

$$(2) \qquad \alpha\alpha' = -\frac{c}{b}, \qquad \beta\beta' = -\frac{a}{c}, \qquad \gamma\gamma' = -\frac{b}{a};$$

d'où

$$(3) \qquad \alpha'\beta'\gamma' = +1.$$

On sait que les coordonnées *normales* du point O sont ses distances x, y, z aux côtés a, b, c, distances qu'on peut regarder comme positives quand le point O est dans l'intérieur du triangle ABC.

Elles satisfont à l'égalité

$$(4) \qquad ax + by + cz = \mathrm{S}$$

et sont reliées, en valeurs et en signes, aux coordonnées angulaires par

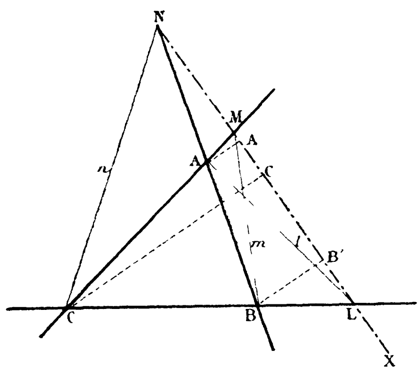
$$(5) \qquad \alpha' = \frac{y}{z}, \qquad \beta' = \frac{z}{x}, \qquad \gamma' = \frac{x}{y}$$

et aux coordonnées segmentaires par

$$(6) \qquad \alpha = -\frac{c}{b}\frac{z}{y}, \qquad \beta = -\frac{a}{c}\frac{x}{z}, \qquad \gamma = -\frac{b}{a}\frac{y}{x}.$$

3. *Coordonnées de la droite.* — Soit (*fig.* 2) X une

Fig. 2.



droite coupant les côtés a, b, c en L, M, N. Appelons l, m, n les directions AL, BM, CN et posons

$$\frac{\mathrm{LB}}{\mathrm{LC}} = \lambda, \qquad \frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MA}} = \mu, \qquad \frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{NB}} = \nu,$$

$$\frac{\sin(lb)}{\sin(lc)} = \lambda', \qquad \frac{\sin(mc)}{\sin(ma)} = \mu', \qquad \frac{\sin(na)}{\sin(nb)} = \nu'.$$

Les nombres λ, μ, ν sont les coordonnées *segmentaires* de X et les nombres λ', μ' ν' en sont les coordonnées *angulaires*.

On a d'ailleurs

$$(7)\qquad \lambda\mu\nu = +1;$$

$$(8)\qquad \lambda\lambda' = -\frac{c}{b}, \qquad \mu\mu' = -\frac{a}{c}, \qquad \nu\nu' = -\frac{b}{a};$$

$$(9)\qquad \lambda'\mu'\nu' = -1.$$

Soient x', y', z' les distances AA′, BB′, CC′ des sommets A, B, C à la droite X, distances que nous regardons comme positives quand la droite X laisse les trois sommets du même côté.

Ces longueurs seront les coordonnées *normales* de X.

Elles sont reliées aux coordonnées segmentaires par

$$(10)\qquad \lambda = \frac{y'}{z'}, \qquad \mu = \frac{z'}{x'}, \qquad \nu = \frac{x'}{y'},$$

et aux coordonnées angulaires par

$$(11)\qquad \lambda' = -\frac{c}{b}\frac{z'}{y'}, \qquad \mu' = -\frac{a}{c}\frac{x'}{z'}, \qquad \nu' = -\frac{b}{a}\frac{y'}{x'}.$$

Elles vérifient d'ailleurs l'égalité

$$A'B' + B'C' + C'A' = 0$$

ou

$$(12)\qquad \begin{cases} 4S^2 = a^2(x'-y')(x'-z') \\ \qquad + b^2(y'-x')(y'-z') + c^2(z'-x')(z'-y'). \end{cases}$$

Remarquons que toute droite menée par A est déterminée par sa seule coordonnée λ et que la droite $(1, 1, 1)$ est celle à l'infini dans le plan.

4. Théorème. — *Si un point* $O(\alpha\beta\gamma)$ *appartient à la droite* $X(\lambda\mu\nu)$, *on a*

$$(13)\qquad \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu} = 1, \qquad \frac{\mu}{\beta} + \frac{\gamma}{\nu} = 1, \qquad \frac{\nu}{\gamma} + \frac{\alpha}{\lambda} = 1.$$

On a, en effet (*fig*. 3),

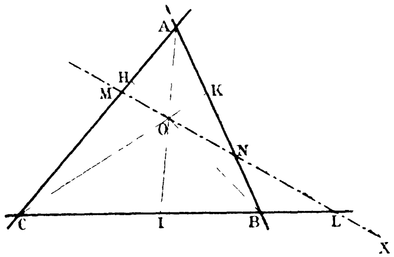
$$(A : LIBC) = (A : LONM),$$
$$(B : HMCA) = (B : OMLN),$$

et, en ajoutant,

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu} &= (LONM) + (OMLN) \\ &= (OLMN) + (OMLN) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Les deux autres relations se déduisent aisément de celle-ci, en tenant compte des égalités (1) et (7).

Fig. 3.



Les équations (13) deviennent, en coordonnées angulaires,

$$(14) \qquad \frac{\alpha'}{\lambda'} + \frac{\mu'}{\beta'} = 1, \qquad \frac{\beta'}{\mu'} + \frac{\nu'}{\gamma'} = 1, \qquad \frac{\gamma'}{\nu'} + \frac{\lambda'}{\alpha'} = 1,$$

et se réduisent, en coordonnées normales, à la seule

$$(15) \qquad axx' + byy' + czz' = 0.$$

5. *Équations de la droite*. — Si un point O se déplace sur une droite *fixe* X, ses coordonnées variables satisferont, suivant le choix des coordonnées, aux équations (13), (14) ou (15). On peut donc regarder ces équations comme étant celles de la droite X.

La droite (1, 1, 1) à l'infini est représentée dans les trois systèmes par

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} + \beta = 1, \\[2ex] b\alpha' + \dfrac{a}{\beta'} + c = 0. \\[2ex] ax + by + cz = 0. \end{cases}$$

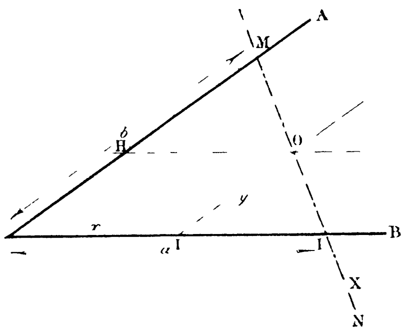
6. *Equations du point.* — Si une droite X tourne autour d'un point *fixe* O, ses coordonnées variables satisferont aussi aux mêmes équations (13), (14) ou (15), qui sont alors celles du point O.

Le centre de gravité a pour équations, dans les trois systèmes,

$$\lambda + \frac{1}{\mu} + 1 = 0, \qquad \frac{1}{b\lambda'} + \frac{\mu'}{a} = \frac{1}{c}, \qquad x' + y' + z' = 0.$$

7. Les coordonnées *cartésiennes* ne sont qu'un cas particulier des coordonnées segmentaires; car, si le côté AB passe à l'infini (*fig.* 4), la première des équa-

Fig. 4.



tions (13), après suppression des longueurs devenues infinies, se réduit à

$$\frac{IC}{LC} - \frac{HC}{MC} = 1$$

ou

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

équation dans laquelle x et y sont les coordonnées cartésiennes du point O, rapporté aux côtés de l'angle C, a et b les longueurs LC et MC.

Nous emploierons, dans ce qui suit, les coordonnées segmentaires, et il sera d'ailleurs facile de transformer les résultats obtenus.

8. *Coordonnées du point de rencontre de deux droites.* — Soient les deux droites

$$X(\lambda\mu\nu) \quad \text{et} \quad X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$$

se coupant au point $O(\alpha\beta\gamma)$.

On doit avoir

$$\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu} = 1, \qquad \frac{\lambda_1}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu_1} = 1,$$

avec

$$\lambda\mu\nu = 1, \qquad \lambda_1\mu_1\nu_1 = 1, \qquad \alpha\beta\gamma = -1.$$

D'où l'on tire

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{\nu_1 - \nu}{\nu\nu_1(\mu - \mu_1)}, \\ \beta &= \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda\lambda_1(\nu - \nu_1)}, \\ \gamma &= \frac{\mu_1 - \mu}{\mu\mu_1(\lambda - \lambda_1)}. \end{aligned} \right.$$

9. *Point à l'infini sur une droite.* — Soit $Q(\alpha\beta\gamma)$ le point à l'infini sur une droite donnée $X(\lambda\mu\nu)$.

On aura ses coordonnées par les formules (17) en supposant $X_1(1\,1\,1)$ à l'infini. On trouve ainsi

$$(18) \qquad \alpha = \frac{1 - \nu}{\nu(\mu - 1)}, \qquad \beta = \frac{1 - \lambda}{\lambda(\nu - 1)}, \qquad \gamma = \frac{1 - \mu}{\mu(\lambda - 1)}.$$

10. *Coordonnées de la droite passant par deux points.* — Soient les deux points

$$O(\alpha\beta\gamma),\quad O_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$$

et $X(\lambda\mu\nu)$ leur droite.

On doit avoir

$$\frac{\lambda}{\alpha}+\frac{\beta}{\mu}=1,\qquad \frac{\lambda}{\alpha_1}+\frac{\beta_1}{\mu}=1,$$

avec

$$\lambda\mu\nu=1,\qquad \alpha\beta\gamma=-1,\qquad \alpha_1\beta_1\gamma_1=-1.$$

D'où l'on tire

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda &= \frac{\beta-\beta_1}{\beta\beta_1(\gamma-\gamma_1)},\\ \mu &= \frac{\gamma-\gamma_1}{\gamma\gamma_1(\alpha-\alpha_1)},\\ \nu &= \frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha\alpha_1(\beta-\beta_1)}. \end{aligned}\right.$$

Si l'un des points, soit O_1, est le centre de gravité, on remplacera α_1, β_1, γ_1 par -1.

11. *Condition pour que trois points soient en ligne droite.* — Soient les trois points

$$O(\alpha\beta\gamma),\quad O_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1),\quad O_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2).$$

Pour qu'ils soient en ligne droite, il faut et il suffit que leurs équations soient compatibles, ou que l'on ait

$$(20)\qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha} & \beta & 1 \\ \frac{1}{\alpha_1} & \beta_1 & 1 \\ \frac{1}{\alpha_2} & \beta_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

12. *Condition pour que trois droites soient concourantes.* — Soient les trois droites

$$X(\lambda\mu\nu),\quad X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1),\quad X_2(\lambda_2\mu_2\nu_2).$$

Pour qu'elles soient concourantes il faut et il suffit que leurs équations soient compatibles, ou que l'on ait

$$(21)\qquad \begin{vmatrix} \lambda & \dfrac{1}{\mu} & 1 \\ \lambda_1 & \dfrac{1}{\mu_1} & 1 \\ \lambda_2 & \dfrac{1}{\mu_2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

13. *Condition pour que deux droites soient parallèles.* — Soient les deux droites

$$X(\lambda\mu\nu),\quad X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1).$$

Elles seront parallèles si elles sont concourantes avec la droite (111) à l'infini, ce qui exige que

$$(22)\qquad \begin{vmatrix} \lambda & \dfrac{1}{\mu} & 1 \\ \lambda_1 & \dfrac{1}{\mu_1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut remarquer que, si deux droites $X(\lambda\mu\nu)$ et $X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$ sont parallèles, la droite qui joint les points

$$O\left(-\frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\mu}, -\frac{1}{\nu}\right),\qquad O_1\left(-\frac{1}{\lambda_1}, -\frac{1}{\mu_1}, -\frac{1}{\nu_1}\right)$$

passe par le centre de gravité.

14. Pour abréger, nous admettrons que la même lettre λ, qui représente le rapport des segments en lesquels un point L divise BC, représente ce point lui-même. Ainsi la droite $X(\lambda\mu\nu)$ est celle qui coupe les côtés de ABC en λ, μ, ν ; le point $O(\alpha\beta\gamma)$ sera celui dont les rayons OA, OB, OC coupent les mêmes côtés

en α, β, γ. De cette manière les lettres L, M, N disparaîtront, ainsi que les lettres I, H, K.

15. Si les droites $\mu\nu$, $\mu_1\nu_1$ se coupent en O et les droites $\mu\nu_1$, $\mu_1\nu$ en O_1, AO et AO_1 divisent l'angle BAC harmoniquement.

Soient α et α_1 les points de rencontre des droites AO, AO_1 avec BC.

On a (8)

$$\alpha = \frac{\nu_1 - \nu}{\nu\nu_1(\mu - \mu_1)}, \qquad \alpha_1 = \frac{\nu - \nu_1}{\nu\nu_1(\mu - \mu_1)};$$

d'où

$$\alpha + \alpha_1 = 0,$$

où le faisceau $(A : BC\alpha\alpha_1)$ est harmonique.

16. Les droites qui joignent les points

$$O(\beta\gamma) \quad \text{et} \quad O_1(\beta_1\gamma_1), \quad \omega(\beta\gamma_1) \quad \text{et} \quad \omega_1(\beta_1\gamma).$$

divisent BC harmoniquement.

Soient λ et λ_1 les points de rencontre des droites OO_1 et $\omega\omega_1$ avec BC.

On a (10)

$$\lambda = \frac{\beta - \beta_1}{\beta\beta_1(\gamma - \gamma_1)}, \qquad \lambda_1 = \frac{\beta - \beta_1}{\beta\beta_1(\gamma_1 - \gamma)};$$

d'où

$$\lambda + \lambda_1 = 0,$$

ou λ et λ_1 divisent BC harmoniquement.

17. Soient deux triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ inscrits dans ABC.

Posons

$$P = \alpha\beta\gamma\,\alpha_1\beta_1\gamma_1,$$

et désignons par

L, M, N les points

$$(\beta\gamma,\ \beta_1\gamma), \quad (\alpha\gamma,\ \alpha_1\gamma_1). \quad (\alpha\beta,\ \alpha_1\beta_1),$$

L_1, M_1, N_1 les points

$$(\beta\gamma_1, \beta_1\gamma), \quad (\alpha\gamma_1, \alpha_1\gamma), \quad (\alpha\beta_1, \alpha_1\beta),$$

λ, μ, ν les coordonnées des droites

$$AL, \quad BM, \quad CN,$$

λ_1, μ_1, ν_1 les coordonnées des droites

$$AL_1, \quad BM_1, \quad CN_1.$$

On aura (8)

$$\lambda = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma\gamma_1(\beta - \beta_1)}, \qquad \mu = \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha\alpha_1(\gamma - \gamma_1)}, \qquad \nu = \frac{\beta_1 - \beta}{\beta\beta_1(\alpha - \alpha_1)};$$

avec (15)

$$\lambda + \lambda_1 = 0, \qquad \mu + \mu_1 = 0, \qquad \nu + \nu_1 = 0.$$

En multipliant membre à membre les trois premières égalités, on a

$$P \times \lambda\mu\nu = -1,$$

et en tenant compte des trois autres

$$P \times \lambda_1\mu_1\nu_1 = +1.$$

Si $P = +1$, ou si l'hexagone $\alpha\alpha_1\,\beta\beta_1\,\gamma\gamma_1$ est de Pascal, les points λ, μ, ν forment une division centrale, et les points conjugués λ_1, μ_1, ν_1 une division rectiligne.

Le contraire a lieu avec $P = -1$.

18. Si $P = -1$, les trois points

$$O\left(\frac{1}{\beta\gamma_1}, \frac{1}{\alpha_1\gamma}, \frac{1}{\alpha\beta_1}\right),$$

$$O_1\left(\frac{1}{\beta_1\gamma}, \frac{1}{\alpha\gamma_1}, \frac{1}{\alpha_1\beta}\right),$$

$$O_2(\lambda_1\mu_1\nu_1)$$

sont en ligne droite, car la condition (20), qui devient ici

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha-\alpha_1 & \beta-\beta_1 & \gamma-\gamma_1 \end{vmatrix} = 0,$$

est évidemment remplie.

19. On coupe le triangle ABC par une sécante $X(\lambda\mu\nu)$, sur laquelle on marque un point $P(\alpha\beta\gamma)$. Si l'on prend les conjugués harmoniques I, H, K de P sur les segments $\mu\nu$, $\lambda\nu$, $\lambda\mu$, et si $A_1B_1C_1$ est le triangle des droites AI, BH, CK, les droites AA_1, BB_1, CC_1 seront concourantes en P.

On a, en effet,

$$A_1(\alpha, -\beta, -\gamma),$$
$$B_1(-\alpha, \beta, -\gamma),$$
$$C_1(-\alpha, -\beta, \gamma)$$

et par suite les droites AA_1, BB_1, CC_1 sont concourantes au point $P(\alpha\beta\gamma)$.

Si le point P est à l'infini sur X, les points I, H, K seront les milieux des segments $\mu\nu$, $\lambda\nu$, $\lambda\mu$, et les droites AA_1, BB_1, CC_1 deviendront parallèles à X.

20. Mener par un point $O(\alpha\beta\gamma)$ une parallèle à une droite $X(\lambda\mu\nu)$.

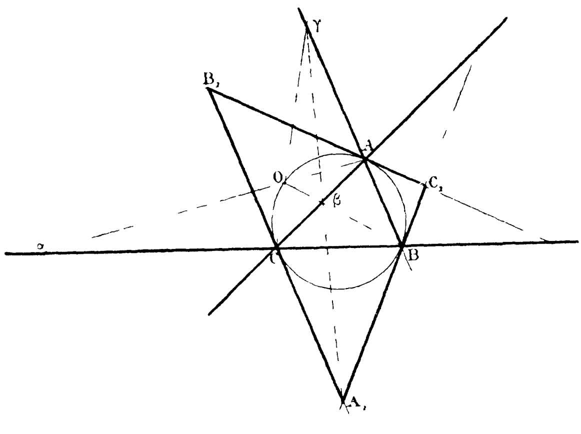
Soit $X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$ cette parallèle. On aura ses coordonnées par les équations

$$\lambda_1\mu_1\nu_1 = +1, \qquad \frac{\lambda_1}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu_1} = 1, \qquad \begin{vmatrix} \lambda & \frac{1}{\mu} & 1 \\ \lambda_1 & \frac{1}{\mu_1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

21. *Equations du cercle circonscrit au triangle de référence.* — Soit $O(\alpha\beta\gamma)$ un point de la circonférence ABC (*fig.* 5).

Si $A_1 B_1 C_1$ est le triangle des tangentes en A, B, C,

Fig 5



les trois points A_1, β, γ, appartenant à la polaire de α par rapport au cercle, sont en ligne droite.

Or les coordonnées de A_1 sont

$$-\frac{c^2}{b^2},\quad \frac{a^2}{c^2},\quad \frac{b^2}{a^2},$$

et celles de $\beta\gamma$,

$$-\alpha,\quad \beta,\quad \gamma.$$

On aura donc les équations du cercle circonscrit en écrivant (4) que A_1 appartient à $\beta\gamma$, ce qui donne

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} a^2 &= c^2\beta + \frac{b^2}{\gamma}, \\ b^2 &= a^2\gamma + \frac{c^2}{\alpha}, \\ c^2 &= b^2\alpha + \frac{a^2}{\beta}. \end{aligned}\right.$$

Ces équations deviennent, en coordonnées angulaires,

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} &a + \frac{c}{\beta_1} + b\gamma_1 = 0,\\ &b + \frac{a}{\gamma_1} + c\alpha_1 = 0,\\ &c + \frac{b}{\alpha_1} + a\beta_1 = 0,\end{aligned}\right.$$

et se réduisent, en coordonnées normales, à la seule

$$(25)\qquad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0.$$

Chacune des équations (24) revient à la suivante

$$a \sin \widehat{OBA} + b \sin \widehat{OCB} + c \sin \widehat{OBC} = 0,$$

qui exprime une propriété connue du quadrangle cyclique OABC.

22. Condition pour que deux droites issues de A soient perpendiculaires.

Menons par le sommet A deux droites $A\alpha$ et $A\alpha_1$ coupant le cercle circonscrit aux points P et P_1.

On aura (23) pour les coordonnées de ces points

$$\begin{array}{lll} P, & \alpha, & \dfrac{a^2}{c^2 - b^2\alpha}, \quad \dfrac{b^2\alpha - c^2}{a^2\alpha},\\ P_1, & \alpha_1, & \dfrac{a^2}{c^2 - b^2\alpha_1}, \quad \dfrac{b^2\alpha_1 - c^2}{a^2\alpha_1}.\end{array}$$

Les coordonnées du centre ω de ce cercle sont d'ailleurs

$$\omega, \quad \frac{-c\cos C}{b\cos B}, \quad \frac{-a\cos A}{c\cos C}, \quad \frac{-b\cos B}{a\cos A}.$$

Pour que les droites $A\alpha$ et $A\alpha_1$ soient perpendiculaires, il faut et il suffit que les trois points P, P_1 et ω

soient en ligne droite, ou (11) que l'on ait

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{-c\cos C}{a\cos A} & \dfrac{-b\cos B}{a\cos A} \\ 1 & \dfrac{c^2-b^2\alpha}{a^2} & \dfrac{b^2\alpha-c^2}{a^2\alpha} \\ 1 & \dfrac{c^2-b^2\alpha_1}{a^2} & \dfrac{b^2\alpha_1-c^2}{a^2\alpha_1} \end{vmatrix} = 0.$$

En développant, on trouve

$$-(\alpha+\alpha_1)a^2+(\alpha+\alpha_1-2\alpha\alpha_1)b^2+(\alpha+\alpha_1-2)c^2=0,$$

ou

$$(26)\qquad (\alpha+\alpha_1)bc\cos A-\alpha\alpha_1 b^2-c^2=0,$$

pour la condition de perpendicularité.

23. Conditions pour que deux droites quelconques soient perpendiculaires.

Soient les droites $X(\lambda\mu\nu)$ et $X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$. Menons $A\alpha$ et $A\alpha_1$ parallèles à X et X_1.

Si ces dernières sont perpendiculaires, la relation (26) aura lieu, et comme (9),

$$\alpha=\frac{1-\nu}{\nu(\mu-1)},\qquad \alpha_1=\frac{1-\nu_1}{\nu_1(\mu_1-1)},$$

on aura, en remplaçant et transformant,

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{a}{\mu\mu_1}(\mu c\cos B+\lambda\mu b\cos C-a)\\ &\quad+b\lambda\lambda_1(\nu a\cos C-\mu\nu c\cos A-b)\\ &\qquad+c(\lambda b\cos A-\lambda\nu a\cos B-c)=0,\end{aligned}\right.$$

ou encore

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} &(1-\lambda)(1-\lambda_1)\cot A\\ &\quad+\frac{1}{\mu\mu_1}(1-\mu)(1-\mu_1)\cot B\\ &\quad+\lambda\lambda_1(1-\nu)(1-\nu_1)\cot C=0.\end{aligned}\right.$$

Cette condition se réduit à une identité si l'une des droites est à l'infini.

24. Condition pour qu'une droite $X(\lambda\mu\nu)$ soit perpendiculaire à l'un des côtés de ABC.

Supposons que la droite X_1 se confonde avec BC. On aura

$$\mu_1 = 0,$$

et, d'après (27),

$$c \cos B + \lambda b \cos C = \frac{a}{\mu}.$$

De même une perpendiculaire à AC doit satisfaire à la condition

$$a \cos C + \mu c \cos A = \frac{b}{\nu},$$

et une perpendiculaire à AB, à la suivante

$$b \cos A + \nu a \cos B = \frac{c}{\lambda}.$$

Si une droite satisfaisait à deux de ces conditions, on aurait

$$\lambda = \mu = \nu = 1$$

ou l'un des angles A, B, C serait nul.

25. Mener par un point $O(\alpha\beta\gamma)$ une perpendiculaire à BC.

Soit $X(\lambda\mu\nu)$ cette perpendiculaire. On doit avoir

$$\frac{\lambda}{\alpha} - \frac{\beta}{\mu} = 1, \qquad c \cos B + \lambda b \cos C = \frac{a}{\mu};$$

d'où

$$\lambda = \frac{\frac{\alpha}{\beta} - c \cos B}{b \cos C - \gamma a}.$$

On trouverait de même, pour une perpendiculaire abaissée de O sur AC,

$$\mu = \frac{\frac{b}{\gamma} - a\cos C}{c\cos A - \alpha b},$$

et pour une perpendiculaire à AB,

$$\nu = \frac{\frac{c}{\alpha} - b\cos A}{a\cos B - \beta c}.$$

26. Supposons les points λ, μ, ν en ligne droite. On aura

$$\lambda\mu\nu = +1,$$

ou, en remplaçant,

$$\begin{aligned}
&2abc(1 + \cos A\cos B\cos C)\\
&\quad - \frac{a}{\alpha}(\alpha^2 b^2 + c^2)(\cos A + \cos B\cos C)\\
&\quad - \frac{b}{\beta}(\beta^2 c^2 + a^2)(\cos B + \cos A\cos C)\\
&\quad - \frac{c}{\gamma}(\gamma^2 a^2 + b^2)(\cos C + \cos A\cos B) = 0,
\end{aligned}$$

ou, en vertu des relations

$$\cos A + \cos B\cos C = \sin B\sin C = \frac{bc}{4R^2},$$

$$\cos B + \cos A\cos C = \sin A\sin C = \frac{ac}{4R^2},$$

$$\cos C + \cos A\cos B = \sin A\sin B = \frac{ab}{4R^2},$$

$$1 + \cos A\cos B\cos C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8R^2},$$

R étant le rayon du cercle circonscrit,

$$\left(c^2\beta + \frac{b^2}{\gamma} - a^2\right) + \left(a^2\gamma + \frac{c^2}{\alpha} - b^2\right) + \left(b^2\alpha + \frac{a^2}{\beta} - c^2\right) = 0$$

ou

$$(29) \qquad \left(1 - \frac{1}{\beta} - \gamma\right)\left(a^2 - \frac{b^2}{\gamma} - \beta c^2\right) = 0.$$

Le lieu du point $O(\alpha\beta\gamma)$ est donc (5) la droite à l'infini

$$\gamma + \frac{1}{\beta} = 1,$$

ou (21) le cercle circonscrit

$$a^2 = \beta c^2 + \frac{b^2}{\gamma},$$

et $\lambda\mu\nu$ serait alors la droite à l'infini ou la droite de Simson.

27. Si l'on veut que les droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$ soient concourantes, on aura

$$\lambda\mu\nu = -1,$$

ou, en remplaçant,

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{a}{\alpha}(\alpha^2 b^2 - c^2)(\cos A - \cos B \cos C) \\ &\quad + \frac{b}{\beta}(\beta^2 c^2 - a^2)(\cos B - \cos A \cos C) \\ &\quad + \frac{c}{\gamma}(\gamma^2 a^2 - b^2)(\cos C - \cos A \cos B) = 0. \end{aligned}\right.$$

Ce lieu du point O est une cubique, étudiée par M. Dewulf (*Nouvelles Annales,* question **1207**. Année 1876, p. 550).

28. Lieu géométrique des points tels qu'en joignant chacun d'eux aux sommets du triangle ABC, les perpendiculaires à ces droites, menées par ces sommets, soient concourantes.

Soit $\omega(\alpha\beta\gamma)$ un point du lieu.

Les perpendiculaires aux droites ωA, ωB, ωC, menées par A, B, C, ont pour coordonnées (22)

$$(31)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{c(c - \alpha b \cos A)}{b(c \cos A - \alpha b)}, \\ \beta_1 = \dfrac{a(a - \beta c \cos B)}{c(a \cos B - \beta c)}, \\ \gamma_1 = \dfrac{b(b - \gamma a \cos C)}{a(b \cos C - \gamma a)}, \end{cases}$$

et, comme l'on veut qu'elles soient concourantes,

$$\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 = -1,$$

ou l'équation (29). Le lieu du point ω est donc la droite à l'infini ou le cercle circonscrit.

29. En écrivant que les points α_1, β_1, γ_1 sont en ligne droite, on retrouvera la cubique (30) pour le lieu du point ω.

30. Mener par l'orthocentre $O(\alpha\beta\gamma)$ du triangle ABC une perpendiculaire à une droite $X(\lambda\mu\nu)$.

Soit $X_1(\lambda_1 \mu_1 \nu_1)$ cette perpendiculaire.

On aura ses coordonnées par la formule (27) et les équations

$$\lambda_1 \mu_1 \nu_1 = 1, \qquad \frac{\lambda_1}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu_1} = 1.$$

On trouve ainsi

$$(32)\quad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{\alpha\nu(\mu - 1)}{1 - \nu}, \\ \mu_1 = \dfrac{\beta\lambda(\nu - 1)}{1 - \lambda}, \\ \nu_1 = \dfrac{\gamma\mu(\lambda - 1)}{1 - \mu}. \end{cases}$$

On voit par là que X_1 est indéterminé si X est à l'infini.

31. Les perpendiculaires abaissées de l'orthocentre

$O(\alpha\beta\gamma)$ sur les droites O_1A, O_1B, O_1C qui joignent un point quelconque $O_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ aux sommets de ABC, coupent les côtés correspondants en trois points en ligne droite.

Si λ, μ, ν sont ces points, on trouve, en effet,

$$\lambda = \frac{\alpha}{\alpha_1}, \qquad \mu = \frac{\beta}{\beta_1}, \qquad \nu = \frac{\gamma}{\gamma_1};$$

d'où

$$\lambda\mu\nu = +1.$$

32. *Équation de la conique.* — Soit $O(xyz)$ un point d'une conique Q, coupant les côtés ABC en λ et λ_1, μ et μ_1, ν et ν_1.

On a

$$(33) \qquad xyz = -1, \qquad \lambda\mu\nu\lambda_1\mu_1\nu_1 = +1.$$

Pour que le point O appartienne à la conique Q, il faut et il suffit que les côtés opposés de l'hexagone

$$\mu\mu_1 O \nu_1 \nu\lambda$$

se coupent en trois points en ligne droite. Ces points sont

$$\text{A, I, H} \quad \text{ou} \quad (\mu\mu_1,\ \nu\nu_1), \quad (\lambda\nu,\ \mu_1 O), \quad (\lambda\mu,\ \nu_1 O).$$

Les coordonnées des droites AI et AH sont (8)

$$\frac{\lambda[\nu(\mu_1 - y)x - 1]}{\lambda\mu_1\nu - 1}, \qquad \frac{1 - \lambda\mu\nu_1}{(\nu_1 - z)y - \mu\nu_1},$$

et, puisque ces droites doivent se superposer, on a

$$\frac{\lambda[\nu(\mu_1 - y)x - 1]}{\lambda\mu_1\nu - 1} = \frac{1 - \lambda\mu\nu_1}{(\nu_1 - z)y - \mu\nu_1}.$$

Telle est, en coordonnées segmentaires, l'équation de la conique Q.

Elle peut s'écrire

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda\lambda_1\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{z}\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{y}\right)\\ &\qquad\qquad -\frac{y}{\mu\mu_1}\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu_1}-\frac{1}{z}\right)=0\end{aligned}\right.$$

ou encore

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{z^2}+\left[(\mu+\mu_1)x-\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu_1}\right)\right]\frac{1}{z}\\ &\qquad +\mu\mu_1(x-\lambda)(x-\lambda_1)=0.\end{aligned}\right.$$

33. Avec $\lambda\mu\nu=1$, $\lambda_1\mu_1\nu_1=1$, cette dernière équation se décompose en les deux suivantes

$$\frac{\lambda}{x}+\frac{y}{\mu}=1,\qquad \frac{\lambda_1}{x}+\frac{y}{\mu_1}=1,$$

et la conique Q se réduit au système des deux droites

$$X(\lambda\mu\nu)\quad \text{et}\quad X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1).$$

Si l'on avait de plus

$$x=\frac{\nu_1-\nu}{\nu\nu_1(\mu-\mu_1)},$$

les racines de cette équation seraient égales à

$$\frac{1}{z}=\frac{\mu\mu_1(\lambda-\lambda_1)}{\mu_1-\mu}$$

et ces valeurs de x et de $\frac{1}{z}$ appartiendraient au point XX_1, comme on l'a vu (8).

34. Pour que la conique soit un cercle, il faut que

$$\frac{a^2}{(1-\lambda)(1-\lambda_1)}=\frac{\mu\mu_1 b^2}{(1-\mu)(1-\mu_1)}=\frac{c^2}{\lambda\lambda_1(1-\nu)(1-\nu_1)},$$

et ces conditions sont remplies par les coordonnées du centre de gravité et de l'orthocentre.

35. *Cercle des neuf points.* — On aura son équation en remplaçant dans (35) λ, μ, ν par les coordonnées du centre de gravité et λ_1, μ_1, ν_1 par celle de l'orthocentre.

On trouve ainsi

$$(36)\qquad \left\{\begin{array}{l} bc\cos A\left(\frac{1}{z}\right)^2-(b^2x-c^2)\frac{1}{z} \\ \quad + a(b\cos C\, x^2+ax+c\cos B)=0. \end{array}\right.$$

36. *Conique inscrite dans le triangle de référence.* — Soit une conique touchant les côtés de ABC en λ, μ, ν.

On a ici

$$\lambda=\lambda_1,\qquad \mu=\mu_1,\qquad \nu=\nu_1,$$

et, par suite,

$$\lambda\mu\nu=-1,$$

ou les droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$ sont concourantes, et l'équation (35) devient

$$(37)\qquad \frac{1}{z}=-\mu(\sqrt{\lambda}\pm\sqrt{x})^2.$$

37. *Centre de la conique inscrite.* — Ce centre O est le point de rencontre des droites joignant les sommets de ABC aux milieux I, H, K des côtés de $\lambda\mu\nu$.

Il a pour coordonnées

$$\frac{1-\nu}{\nu(1-\mu)},\quad \frac{1-\lambda}{\lambda(1-\nu)},\quad \frac{1-\mu}{\mu(1-\lambda)}.$$

38. *Cas de la parabole.* — Les droites AI et BH seront parallèles (13) si

$$(38)\qquad \lambda+\frac{1}{\mu}=1$$

et alors le centre O est rejeté à l'infini, ou la conique se transforme en une parabole.

On arriverait au même résultat en écrivant que la droite à l'infini $\frac{1}{z} = 1 - x$ est tangente à la conique.

39. *Tangente à la conique inscrite.* — Soit la conique inscrite

$$\frac{1}{z} = -\mu(\lambda + x \pm 2\sqrt{\lambda x}),$$

coupée par la sécante $\chi_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ ayant pour équation

$$\frac{\nu_1}{z} + \frac{x}{\lambda_1} = 1.$$

En éliminant $\frac{1}{z}$ on trouve l'équation

$$(\mu \quad \mu_1)x \pm 2\mu\sqrt{\lambda}\sqrt{x} + (\lambda\mu + \lambda_1\mu_1) = 0,$$

dont les racines appartiennent aux points de rencontre de la sécante avec la conique.

Cette sécante devient tangente si

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\mu} = 1, \tag{39}$$

et cette condition exprime que le point $(A\lambda_1, B\mu_1)$, soit R, appartient à $\lambda\mu$.

Si donc on appelle P et Q les points $(B\mu_1, C\nu_1)$ et $(A\lambda_1, C\nu_1)$ le triangle diagonal PQR du quadrilatère circonscrit à la conique est inscrit dans le triangle $\lambda\mu\nu$.

Soit $T(x, y, z)$ le point de contact.

On a

$$x = \frac{\lambda\mu^2}{\mu - \mu_1}$$

ou (form. 39)

$$x = \frac{\lambda_1^2}{\lambda}.$$

Les coordonnées de T sont donc

$$\frac{\lambda_1^2}{\lambda}, \quad \frac{\mu_1^2}{\mu}, \quad \frac{\nu_1^2}{\nu}.$$

De plus, les droites λP, μQ, νR passent par T. La droite λP, par exemple, qui a pour coordonnées

$$\lambda, \quad \frac{1}{\nu_1(\lambda+\lambda_1)}, \quad \frac{\nu_1(\lambda+\lambda_1)}{\lambda};$$

coupe χ_1 au point

$$\frac{\lambda_1^2}{\lambda}, \quad \frac{\mu_1^2}{\mu}, \quad \frac{\nu_1^2}{\nu},$$

c'est-à-dire en T.

40. Si la conique est une parabole, elle admet pour tangente la droite à l'infini, et cette droite forme avec les côtés de ABC un quadrilatère circonscrit qui doit jouir des propriétés précédentes.

On aura le triangle PQR en menant par les sommets de ABC des parallèles aux côtés opposés, et les coordonnées du point de contact T seront

$$\frac{1}{\lambda}, \quad \frac{1}{\mu}, \quad \frac{1}{\nu}.$$

Si donc λ_1, μ_1, ν_1 sont les symétriques des points λ, μ, ν par rapport aux milieux des côtés de ABC, les six droites

$$A\lambda_1, \quad B\mu_1, \quad C\nu_1, \quad P\lambda, \quad Q\mu, \quad C\nu$$

seront parallèles à l'axe de la parabole.

Les milieux des trois diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite et, si ce quadrilatère est circonscriptible à un cercle, cette droite passe par le centre O.

Coupons le triangle ABC par la sécante $\chi_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$.

Il faut prouver que les milieux I, H, K des diagonales $A\lambda_1$, $B\mu_1$, $C\nu_1$ du quadrilatère des quatre droites sont en ligne droite.

En effet, les cordonnées des points I, H, K, qui sont

$$\begin{cases} \text{I}\ldots\ldots\ldots & \lambda_1 & \dfrac{1-\lambda_1}{\lambda_1} & \dfrac{1}{\lambda_1-1} \\ \text{H}\ldots\ldots & \dfrac{1}{\mu_1-1} & \mu_1 & \dfrac{1-\mu_1}{\mu_1} \\ \text{K}\ldots\ldots & \dfrac{1-\nu_1}{\nu_1} & \dfrac{1}{\nu_1-1} & \nu_1 \end{cases}$$

satisfont à la condition (20).

Soit

$$\text{O}: -\frac{c}{b}, \quad -\frac{a}{c}, \quad -\frac{b}{a}$$

le centre du cercle inscrit dans ABC.

Les trois points O, I, H seront en ligne droite s'ils satisfont à la condition (20), ou si l'on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda_1 & \lambda_1 \\ \mu_1-1 & \mu_1 & 1 \\ -b & -a & c \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(p-b)+\lambda_1(p-c)+\lambda_1\mu_1(p-a)=0,$$

ce qui est précisément la condition (39), puisque ici

$$\lambda=-\left(\frac{p-b}{p-c}\right), \qquad \mu=-\left(\frac{p-c}{p-a}\right), \qquad \nu=-\left(\frac{p-a}{p-b}\right).$$

La droite IHK ne passera donc par le centre O qu'autant que χ_1 sera une tangente à ce cercle O.

On sait que OIH est la droite de Newton.

41. *Conique circonscrite à* ABC. — Coupons le triangle ABC par la droite $\chi(\lambda, \mu, \nu)$. La pascale

AABBCC,

ou X, montre qu'il existe une conique tangente en A, B, C aux droites Aλ, Bμ, Cν. L'équation de cette conique, devant être du second degré, sera, dans le système segmentaire, l'une des suivantes

$$(40) \qquad \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta} = 1, \qquad \frac{\beta}{\mu} + \frac{\nu}{\gamma} = 1, \qquad \frac{\gamma}{\nu} + \frac{\lambda}{\alpha} = 1,$$

car si un point O(α, β, γ) parcourt la courbe, on aura, à ses passages aux sommets A, B, C,

$$\beta = \infty, \qquad \gamma = \infty, \qquad \alpha = \infty$$

et, par suite (éq. 40),

$$\alpha = \lambda, \qquad \beta = \mu, \qquad \gamma = \nu,$$

c'est-à-dire les tangentes en A, B, C.

On voit l'analogie de ces équations avec celles de la droite ou du point. Elles se réduisent d'ailleurs en coordonnées normales à la seule

$$(41) \qquad \frac{1}{axx'} + \frac{1}{byy'} + \frac{1}{czz'} = 0,$$

et redonnent celles du cercle circonscrit, en y remplaçant λ, μ, ν par

$$\frac{c^2}{b^2}, \quad \frac{a^2}{c^2}, \quad \frac{b^2}{a^2}.$$

Il est évident que la nature de la conique doit dépendre de la position occupée par la droite X.

42. Les équations (40), mises sous la forme

$$\frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha}} + \frac{\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\mu}} = 1, \qquad \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\beta}} + \frac{\frac{1}{\gamma}}{\frac{1}{\nu}} = 1, \qquad \frac{\frac{1}{\nu}}{\frac{1}{\gamma}} + \frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\lambda}} = 1,$$

expriment que quand le point O(α, β, γ) décrit la conique (40), le point $O_1\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right)$, isotomique de O par rapport au triangle ABC, se déplace sur la droite $\chi_1\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}\right)$, isotomique de $\chi(\lambda, \mu, \nu)$. D'ailleurs, quand le point O passe par les sommets A, B, C, le point O_1 traverse les côtés opposés a, b, c.

43. *Équations (tangentielles) de la conique inscrite à* ABC. — Soit le point $O(\alpha, \beta, \gamma)$. Le brianchon

$$aabbcc,$$

ou O, montre qu'il existe une conique tangente aux côtés de ABC en α, β, γ.

Si une droite $\chi(\lambda, \mu, \nu)$ se meut tangentiellement à cette conique, ses coordonnées variables λ, μ, ν satisferont aux équations (40), car lorsque cette droite χ se superpose aux côtés a, b, c, on a

$$\mu = 0, \qquad \nu = 0, \qquad \lambda = 0,$$

et, par suite (éq. 40),

$$\lambda = \alpha, \qquad \mu = \beta, \qquad \nu = \lambda,$$

On peut donc regarder ces équations comme étant les équations *tangentielles* de la conique inscrite.

La parabole sera d'ailleurs caractérisée par l'égalité

$$\alpha + \frac{1}{-} = 1,$$

exprimant qu'elle admet pour tangente la droite à l'infini (1, 1, 1).

L'ellipse tangente aux milieux des côtés de ABC a pour équation

$$\frac{1}{\lambda} + \mu + 1 = 0.$$

Les équations (40) deviennent, en coordonnées angulaires,

$$(42) \quad \frac{\lambda'}{\alpha'} + \frac{\beta'}{\mu'} = 1, \qquad \frac{\mu'}{\beta'} + \frac{\gamma'}{\nu'} = 1, \qquad \frac{\nu'}{\gamma'} + \frac{\alpha'}{\lambda'} = 1,$$

et se réduisent à (41), en coordonnées normales.

44. Les équations (40), mises sous leur seconde forme (n° **42**), montrent que quand la droite $\chi(\lambda, \mu, \nu)$ se meut tangentiellement à la conique inscrite, la droite $\chi_1\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}\right)$, isotomique de χ par rapport à ABC, tourne autour du point *fixe* $O_1\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right)$, isotomique de $O(\alpha, \beta, \gamma)$. D'ailleurs, lorsque cette droite χ se superpose aux côtés a, b, c, la droite χ_1 passe par les sommets A, B, C. (*A suivre.*)