H. LAURENT

Sur l'élimination

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 355-359

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__355_1>

SUR L'ÉLIMINATION;

PAR M. H. LAURENT.

Dans le Cahier du mois d'août, j'ai fait connaître, sous forme explicite, la résultante d'un nombre quelconque d'équations algébriques ; la démonstration que j'ai donnée peut être sujette à quelques objections : je vais la présenter sous une forme nouvelle et tout à fait rigoureuse. (Je signalerai une faute d'impression qui peut arrêter les lecteurs : au lieu de poser $x_{ij} = a_{ij} t_j$, il faut lire $x_{ij} = \alpha_i t_j$.)

Soient

$$\begin{array}{cccc} x_{11}, & x_{21}, & \ldots, & x_{n1}, \\ x_{12}, & x_{22}, & \ldots, & x_{n2}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ x_{1\mu}, & x_{2\mu}, & \ldots, & x_{n\mu} \end{array}$$

les solutions distinctes en nombre $\mu = m^n$ de n équations algébriques de degré m en $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad f_n = 0.$$

Soient

$$\begin{array}{cccc} y_{11}, & y_{21}, & \ldots, & y_{n1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ y_{1\mu}, & y_{2\mu}, & \ldots, & y_{n\mu} \end{array}$$

les solutions supposées distinctes de n autres équations algébriques de degré m, en $y_1, y_2, \ldots, y_n$,

$$g_1 = 0, \qquad g_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad g_n = 0.$$

Soient enfin

$$(1) \qquad \varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n = 0, \qquad \varphi_{n+1} = 0$$

$n+1$ équations algébriques de degré m en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On peut poser

$$\begin{aligned} \varphi_i = {} & \varphi_i(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}) \\ & + (x_1 - x_{1j})\varphi_{i1}^j + \ldots + (x_1 - x_{nj})\varphi_{in}^j, \end{aligned}$$

φ_{ik}^j désignant un polynôme entier de degré $m-1$ en $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}$ qui ne change pas quand on permute x_1 et x_{1j}, x_2 et x_{2j}, ... Posons

$$\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{1j}, x_{2j}, \ldots) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_{11}^j & \ldots & \varphi_{1n}^j \\ \varphi_2 & \varphi_{21}^j & \ldots & \varphi_{2n}^j \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{n+1} & \varphi_{n+1,1}^j & \ldots & \varphi_{n+1,n}^j \end{vmatrix};$$

il est facile de voir que le déterminant qui entre dans cette formule ne change pas quand on y remplace la première colonne, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ par $\varphi_1(x_{1j}, x_{2j}, \ldots)$, $\varphi_2(x_{1j}, x_{2j}, \ldots) \ldots$; il suffit pour cela de retrancher de la première colonne la deuxième multipliée par $x_1 - x_{1j}$, la troisième multipliée par $x_2 - x_{2j}$. .... Donc, si l'on pose

$$\theta_{ij} = \theta(y_{1i}, y_{2i}, \ldots, x_{1j}, x_{2j}, \ldots),$$

on aura

$$\theta_{ij} = \theta_{ji}.$$

Maintenant considérons le déterminant

$$(2) \qquad \Theta = \begin{vmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \ldots & \theta_{1n} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \ldots & \theta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta_{p1} & \theta_{p2} & \ldots & \theta_{pn} \end{vmatrix};$$

on peut évidemment lui donner la forme

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \theta_{11} & \Delta_1\theta_{11} & \Delta_2\theta_{11} & \ldots & \Delta_1^{m-1}\Delta_2^{m-1}\ldots\Delta_n^{m-1}\theta_{11} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta_{\mu 1} & \Delta_1\theta_{\mu 1} & \Delta_2\theta_{\mu 1} & \ldots & \Delta_1^{m-1}\Delta_2^{m-1}\ldots\Delta_n^{m-1}\theta_{\mu 1} \end{vmatrix},$$

Δ_1 désignant un signe de différentiation finie relatif à la variable x, Δ_2 un signe de différentiation finie relatif à la variable x_2, ... Les éléments d'une même ligne dans le déterminant sont les μ termes du produit symbolique

$$(1 + \Delta_1 + \Delta_1^2 + \ldots + \Delta_1^{m-1}) \\ \times (1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_2^{m-1}) \ldots (1 + \Delta_n + \ldots + \Delta_n^{m-1})\,\theta_{k1}.$$

$\Delta_1^\alpha \Delta_2^\beta \ldots \theta_{ki}$ est évidemment de degré

$$n(m-1) - \alpha - \beta \ldots$$

par rapport aux x_{ij} ou aux y_{ij}. Soient maintenant ω_1, ω_2, ..., ω_μ les μ termes du produit

$$(1 + y_1 + y_1^2 + \ldots + y_1^{m-1}) \\ \times (1 + y_2 + \ldots + y_2^{m-1}) \ldots (1 + y_n + \ldots + y_n^{m-1})$$

et ω_{ij} la valeur de ω_i pour $y_1 = y_{1j}$, $y_2 = y_{2j}$, ... Soit

$$D(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)},$$

$$D_i = D(y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{ni});$$

multiplions le déterminant (3) par le suivant

$$
(4)\qquad
\begin{vmatrix}
\frac{\omega_{11}}{D_1} & \frac{\omega_{12}}{D_2} & \dots & \frac{\omega_{1\mu}}{D_\mu} \\
\frac{\omega_{21}}{D_1} & \frac{\omega_{22}}{D_2} & \dots & \frac{\omega_{2\mu}}{D_\mu} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{\omega_{\mu 1}}{D_1} & \frac{\omega_{\mu 2}}{D_2} & \dots & \frac{\omega_{\mu\mu}}{D_\mu}
\end{vmatrix}
= \frac{\Omega}{D_1 D_2 \dots D_\mu} = \frac{\Sigma \pm \omega_{11}\dots\omega_{\mu\mu}}{D_1 D_2 \dots D_\mu},
$$

nous aurons

$$
\frac{\theta\Omega}{D_1 D_2 \dots D_\mu} =
\begin{vmatrix}
\sum \frac{\theta_{i1}\omega_{1i}}{D_i} & \sum \frac{\Delta_1 \theta_{i1}\omega_{1i}}{D_i} & \dots & \sum \frac{\Delta_1^{m-1}\Delta_2^{m-1}\dots\theta_{i1}\omega_{1i}}{D_i} \\
\sum \frac{\theta_{i1}\omega_{2i}}{D_i} & \sum \frac{\Delta_1 \theta_{i1}\omega_{2i}}{D_i} & \dots & \sum \frac{\Delta_1^{m-1}\Delta_2^{m-1}\dots\theta_{i1}\omega_{2i}}{D_i} \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{vmatrix}.
$$

En vertu d'un théorème connu de Jacobi, les éléments de ce déterminant situés à gauche de la diagonale qui descend de gauche à droite sont nuls, les éléments de la diagonale ne dépendent que des termes du degré le plus élevé dans les g; donc

$$\frac{\theta\Omega}{D_1 D_2 \dots D_\mu}$$

ne dépend que des coefficients des termes du degré le plus élevé dans les g. De même, si l'on désigne par Ω' ce que devient Ω quand on y remplace les y_{ij} par les x_{ij}, par D'_1, D'_2, ... ce que deviennent D_1, D_2, ... dans la même hypothèse, on voit que

$$\frac{\theta\Omega\Omega'}{\Pi D_i \Pi D'_i}$$

ne dépendra que des coefficients des termes du degré le plus élevé dans les f et les g; si l'on suppose les g égaux aux f, on voit que

$$\frac{\theta\Omega^2}{(\Pi D_i)^2}$$

ne dépendra que des coefficients des termes du degré le plus élevé dans les f, et, comme il en est ainsi de $\frac{\Omega^2}{\Pi D_i}$, $\frac{\Theta}{\Pi D_i}$ ne dépendra non plus que des termes du degré le plus élevé des f. Faisons varier ces termes sans faire varier les x_{ij}, cela revient à remplacer les f par des fonctions linéaires à coefficients constants des f. Dans ces conditions, D est multiplié par un facteur constant ΠD_i aussi; donc quand on suppose que les x_{ij} varient, $\frac{\Theta}{\Pi D_i}$ reste déterminé à un facteur près indépendant de ces x_{ij}. On pourra donc déterminer $\frac{\Theta}{\Pi D_i}$ en supposant $f_1 = \varphi_1$, $f_2 = \varphi_2$, ..., $f_n = \varphi_n$; alors θ_{ij} se réduit au signe près à

$$\varphi_{n+1}(x_{1j}, x_{2j}, \ldots) \begin{vmatrix} \varphi'_{11} & \varphi'_{12} & \cdots & \varphi'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi'_{n1} & \varphi'_{n2} & \cdots & \varphi'_{nn} \end{vmatrix}$$

pour $x_1 = x_{1i}$, $x_2 = x_{2i}$, ...

On voit que θ_{ij} est nul si $i \gtrless j$ et qu'il est égal à 1

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})} \qquad \text{si } i = j.$$

On a donc

$$\frac{\Theta}{\Pi D_i} = \Pi \varphi_{n+1}(x_{1j}, x_{2j}, \ldots),$$

à un facteur près indépendant de la forme de la fonction φ_{n+1}; $\Theta = 0$ (ou l'on suppose $x_{ij} = y_{ij}$) est donc bien la résultante des équations

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{n+1} = 0,$$

et Θ est un déterminant symétrique.

Je souhaite de tout mon cœur qu'un géomètre plus habile que moi simplifie cette démonstration.