E.-N. BARISIEN

École navale (concours de 1893). Solution de la question de géométrie analytique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 330-336
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__330_1>

ECOLE NAVALE (CONCOURS DE 1895).
SOLUTION DE LA QUESTION DE GÉOMETRIE ANALYTIQUE;

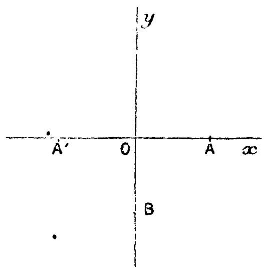
PAR M. E.-N. BARISIEN.

Oxy étant deux axes rectangulaires, et A, A′, B trois points situés sur ces axes à une même distance de l'origine, disposés comme l'indique la figure

$$OA = OA' = OB = R$$

1° *Équation des paraboles circonscrites au triangle* AA′B, *en prenant comme paramètre variable le coefficient angulaire m de l'axe*

Fig. 1.



Par chaque point du plan passent deux de ces paraboles : distinguer les régions du plan pour lesquelles ces deux paraboles sont réelles.

Le lieu des points pour lesquels les axes de ces deux paraboles sont rectangulaires est une circonférence (C).

Construire en coordonnées polaires le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine O *sur les axes de toutes les paraboles circonscrites au triangle* ABA′.

2° *Lorsqu'un point* M *décrit la circonférence* (C), *le point de rencontre des axes des deux paraboles passant par ce point décrit également une circonférence.*

3° *L'hyperbole équilatère, circonscrite au triangle* ABA′ *et dont les axes sont parallèles aux axes des deux paraboles passant par un point* M *de la circonrence* (C), *passe par ce point* M.

L'équation générale des paraboles, ayant un axe de coefficient angulaire m, est

$$(y - mx + \lambda)^2 = \rho(x + my + \mu)$$

ou, en développant,

$$(y - mx)^2 + (2\lambda - \rho m)y - (2\lambda m + \rho)x + \lambda^2 - \rho\mu = 0.$$

Exprimons que cette parabole passe par les points A et A′ : on trouve, en faisant $y = 0$, les deux relations

$$(1) \qquad 2\lambda m + \rho = 0,$$

$$(2) \qquad \lambda^2 - \rho\mu = - m^2 R^2.$$

On trouve de même, en exprimant que la parabole passe par B′, la relation

$$(3) \qquad R^2 - R(2\lambda - \rho m) + \lambda^2 - \rho\mu = 0,$$

ou, d'après (3),

$$(4) \qquad 2\lambda - \rho m = R(1 - m^2).$$

Les relations (1), (2) et (4) permettent de déterminer λ, ρ et μ en fonction de m.

La valeur de λ seule nous intéresse : elle a pour expression

$$\lambda = \frac{(1 - m^2) R}{2(1 + m^2)}.$$

En tenant compte de (1), (2) et (4), l'équation générale des paraboles devient

$$(5) \qquad (y - mx)^2 + (1 - m^2) Ry - m^2 R^2 = 0.$$

Cette équation s'écrit, en l'ordonnant par rapport à m,

$$(6) \qquad m^2(x^2 - Ry - R^2) \quad 2mxy + y^2 + Ry = 0.$$

Donc, par un point (x, y) du plan, il passe deux paraboles répondant aux deux valeurs de m fournies par (6). Les deux paraboles seront réelles si l'on a

$$x^2y^2 - (y^2 + Ry)(x^2 - Ry - R^2) \geqq 0$$

ou

$$y(y + x + R)(y - x + R) \geqq 0.$$

On voit donc que si le point est à l'intérieur du triangle ABA' ou dans le prolongement des angles de ce triangle, les paraboles sont imaginaires. Lorsque le point est dans le reste du plan, les paraboles sont réelles.

Lieu des points pour lesquels les axes des deux paraboles sont rectangulaires. — Si m' et m'' sont les racines de (6), on doit avoir

$$m'm'' = -1$$

et, par conséquent,

$$\frac{y^2 + Ry}{x^2 - Ry - R^2} = -1$$

ou

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Le lieu de ces points est donc le cercle de centre O et de rayon R.

Lieu de la projection du point O sur les axes des paraboles. — L'axe d'une des paraboles a pour équation

$$y - mx + \lambda = 0$$

c'est-à-dire

$$(7) \qquad y - mx + \frac{(1 - m^2)R}{2(1 + m^2)} = 0.$$

La perpendiculaire abaissée de O sur cet axe a pour équation

$$(8) \qquad my + x = 0.$$

En éliminant m entre (7) et (8), on trouve l'équation

$$2(x^2 + y^2)^2 + Ry(y^2 - x^2) = 0.$$

C'est une quartique dont l'équation en coordonnées polaires est

$$r = \frac{R}{2} \sin\theta \cos 2\theta.$$

Cette courbe fermée a pour axe de symétrie l'axe des y : le point O est un point triple ([1]). C'est un trifolium dont le rayon maximum de la plus grande boucle est $\frac{R}{2}$ et le rayon maximum des deux autres boucles est $\frac{R}{3\sqrt{6}}$.

2° Soient x_1 et y_1 les coordonnées d'un point M de la circonférence (C). On a donc

$$x_1^2 + y_1^2 = R^2. \tag{9}$$

L'équation (6) devient alors

$$m^2(x_1^2 - Ry_1 - R^2) - 2mx_1y_1 + y_1^2 + Ry_1 = 0$$

ou, en tenant compte de (9),

$$m^2(y_1 + R) + 2mx_1 - (y_1 + R) = 0. \tag{10}$$

Si m' et m'' sont les deux racines de (10), les équations des axes des deux paraboles passant par M sont

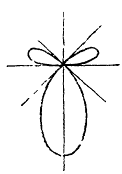
$$y - m'x + \frac{(1 - m'^2)R}{2(1 + m'^2)} = 0. \tag{11}$$

$$y - m''x + \frac{(1 - m''^2)R}{2(1 + m''^2)} = 0. \tag{12}$$

L'équation (10) fournirait m' et m'' en fonction de x_1 et y_1, et il resterait à éliminer x_1 et y_1 entre (9), (11) et (12). On évitera cette élimination laborieuse en remar-

---

([1]) Ce trifolium offre en outre la propriété remarquable d'avoir



son aire équivalente au $\frac{1}{32}$ de l'aire du cercle de rayon R.

quant que l'équation

$$(13)\qquad y - mx + \frac{(1 - m^2)R}{2(1 + m^2)} = 0$$

doit admettre les racines m' et m'' de (10). Cette équation (13) peut s'écrire

$$(14)\qquad 2m^3x - (2y - R)m^2 + 2mx - (2y + R) = 0.$$

Si m''' est la troisième racine de (14), on a

$$(15)\qquad (m' + m'') + m''' = \frac{2y - R}{2x},$$

$$(16)\qquad (m' + m'')m''' + m'm'' = 1,$$

$$(17)\qquad (m'm'')m''' = \frac{2y + R}{2x}.$$

Mais, d'après (10),

$$m' + m'' = -\frac{2x_1}{y_1 + R}, \qquad m'm'' = -1.$$

Les équations (15), (16) et (17) deviennent alors

$$(15)'\qquad \frac{-2x_1}{y_1 + R} + m''' = \frac{2y - R}{2x},$$

$$(16)'\qquad m''' = -\frac{y_1 + R}{x_1},$$

$$(17)'\qquad m''' = -\frac{2y + R}{2x}.$$

En portant la valeur $(17)'$ de m''' dans $(15)'$, il vient

$$(18)\qquad \frac{x_1}{y_1 + R} = -\frac{y}{x}.$$

En comparant $(16)'$ et $(17)'$, on a

$$(19)\qquad \frac{y_1 + R}{x_1} = \frac{2y + R}{2x}.$$

En multipliant membre à membre (18) et (19), on trouve

$$x^2 + y^2 + \frac{Ry}{2} = 0.$$

C'est un cercle de rayon $\frac{R}{4}$, tangent à l'origine.

3° L'équation générale des hyperboles équilatères circonscrites au triangle AA'B a pour équation

$$x^2 - y^2 + 2Bxy - 2Ry - R^2 = 0. \tag{20}$$

L'équation aux coefficients angulaires des axes de cette hyperbole est

$$m^2 + \frac{2m}{B} - 1 = 0; \tag{21}$$

d'où

$$B = \frac{2m}{1 - m^2}.$$

Par conséquent l'équation (20) devient

$$x^2 - y^2 + \frac{4mxy}{1 - m^2} - 2Ry - R^2 = 0. \tag{22}$$

Cette hyperbole équilatère a ses axes parallèles à ceux de la parabole (5).

Or, si l'on fait $x^2 = R^2 - y^2$ dans les équations (22) et (5), on trouve qu'elles sont identiques. Donc, si la parabole (5) passe par un point de la circonférence (C), l'hyperbole (22) passe par le même point.