A. DE SAINT-GERMAIN

Solution du problème de mécanique proposé au concours d'agrégation de 1893

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 325-330

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__325_1>

SOLUTION DU PROBLÈME DE MÉCANIQUE PROPOSÉ AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1893;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Je vais, comme je le fais depuis plusieurs années, présenter à quelques lecteurs des *Nouvelles Annales* une solution du problème de Mécanique proposé au dernier concours d'agrégation des Mathématiques : elle s'obtient bien facilement. Résumons l'énoncé.

Le périmètre ABC d'une plaque pesante contient un segment rectiligne AB assujetti à rester sur un plan fixe horizontal P, sur lequel il peut glisser sans frottement : la plaque, d'abord immobile, est abandonnée à l'action de son poids. On demande la condition nécessaire et suffisante pour que la droite AB reste parallèle à elle-même. Cette condition est satisfaite pour une plaque homogène ayant la forme d'un demi-cercle dont AB serait le diamètre limite : en supposant AB égal à 2^m et l'angle initial de la plaque avec l'horizon égal à 30°, on demande une limite inférieure et une limite supérieure du temps que la plaque met pour arriver en coïncidence avec le plan P.

Dans le plan de la plaque et par son centre de gravité, menons deux axes Gx, Gy, le premier parallèle, l'autre perpendiculaire à AB; la direction positive de Gy est telle que l'ordonnée des divers points de AB ait une valeur négative $-h$. Soient M la masse de la plaque, m celle d'un de ses éléments dont le centre de gravité a pour coordonnées x, y; nous poserons

$$A = \Sigma\, my^2, \qquad B = \Sigma\, mx^2, \qquad F = \Sigma\, mxy.$$

Soient OX, OY, OZ trois axes rectangulaires fixes dont les deux premiers sont dans le plan P; GX_1, GY_1, GZ_1 des axes parallèles aux premiers, menés par le centre de gravité de la plaque : la position de celle-ci peut être déterminée par l'angle θ que fait son plan avec GX_1Y_1 ou avec le plan P, l'angle ψ de Gx avec GX_1, enfin par les coordonnées ξ, η, ζ du point G par rapport aux axes fixes; ζ est égal à $h \sin\theta$.

On obtient la condition demandée en considérant le mouvement relatif de la plaque par rapport aux axes GX_1, GY_1, GZ_1 : relativement à GZ_1, le poids et les réactions exercées le long de AB ont des moments nuls; la somme μ des moments des quantités de mouvement relatif autour de GZ_1 doit être constante.

Si AB conserve une direction fixe, ψ sera constant et nous pouvons le supposer nul; on a alors, pour les coordonnées de l'élément m,

$$X_1 = x, \qquad Y_1 = y\cos\theta, \qquad Z_1 = y \sin\theta,$$

d'où

$$\mu = \Sigma\, m\left(X_1 \frac{dY_1}{dt} - Y_1 \frac{dX_1}{dt}\right) = - F \sin\theta \frac{d\theta}{dt};$$

à l'instant initial, μ est nul : il restera donc égal à zéro. Or $\frac{d\theta}{dt}$ ne peut être constamment nul que si la plaque est en équilibre et cela exige évidemment que θ soit d'abord égal à $\pm \frac{\pi}{2}$; à cette condition, AB restera immobile, quelle que soit la constitution de la plaque. On peut, à un certain point de vue, supposer que $\sin\theta$ reste nul, la plaque restant couchée sur le plan fixe; c'est une position d'équilibre possible, à condition, toutefois, de supposer que toute la plaque, et non pas seulement la droite AB, puisse être retenue par le plan P. En mettant à part ces deux cas exceptionnels d'équilibre, la condition générale pour que μ reste nul et ψ constant, c'est que F, ou Σmxy, soit nul, c'est-à-dire que Gx et Gy soient les axes principaux de la plaque en son centre de gravité.

On peut retrouver cette condition, s'assurer qu'elle est suffisante et, en outre, déterminer le mouvement de la plaque au moyen des équations de Lagrange, toujours si précieuses. La force vive de la plaque est, d'après le théorème de Kœnig,

$$2T = M(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + \Sigma m(X_1'^2 + Y_1'^2 + Z_1'^2);$$

or on a, ψ étant quelconque,

$$\begin{aligned} X_1 &= x\cos\psi - y\cos\theta\sin\psi, \\ Y_1 &= x\sin\psi + y\cos\theta\cos\psi, \\ Z_1 &= y\sin\theta; \end{aligned}$$

d'où, par un calcul des plus faciles,

$$\begin{aligned} 2T = {} & M(\xi'^2 + \eta'^2 + h^2\theta'^2\cos^2\theta) \\ & + A(\theta'^2 + \psi'^2\cos^2\theta) + B\psi'^2 - 2F\theta'\psi'\sin\theta. \end{aligned}$$

Le travail virtuel, pour un déplacement compatible avec les liaisons, des forces agissant sur la plaque est $-Mgh\cos\theta\,\delta\theta$ et les équations de Lagrange prennent la forme

$$(1) \qquad \frac{d\xi'}{dt} = 0, \qquad \frac{d\eta'}{dt} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}(A\psi'\cos^2\theta + B\psi' - F\theta'\sin\theta) = 0,$$

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} & (A + Mh^2\cos^2\theta)\,\theta'' - Mh^2\theta'^2\sin\theta\cos\theta \\ & \qquad - F\psi''\sin\theta + A\psi'^2\sin\theta\cos\theta = -Mgh\cos\theta. \end{aligned} \right.$$

Pour que ψ' soit constamment nul, l'équation (2) montre que $F\theta'\sin\theta$ doit être constant et, par suite, nul d'après les conditions initiales : c'est le résultat que nous avons obtenu et interprété tout à l'heure. D'ailleurs, avec $\psi' = 0$, les équations de Lagrange et les conditions initiales peuvent être satisfaites pour des valeurs de ξ, η, θ que nous trouverons bientôt; le mouvement dans lequel AB garderait une direction fixe est donc possible : suivant l'un des principes de la Dynamique, il aura certainement lieu.

Les équations (1), avec la condition que ξ'_0 et η'_0 soient nuls, montrent que le centre de gravité G reste sur une même verticale, fait aisé à voir directement. En supposant ψ' nul, les deux membres de l'équation (3), multipliés par $2\theta'$, sont des dérivées exactes : intégrant et se rappelant que θ'_0 est nul, on trouve

$$(4) \qquad (A + M h^2 \cos^2\theta)\,\theta'^2 = 2Mgh(\sin\theta_0 - \sin\theta);$$

cette équation, qui se déduirait de l'intégrale des forces vives, permet d'obtenir t par une quadrature en fonction de θ.

Dans le cas d'une plaque semi-circulaire homogène, l'axe de symétrie Gy est visiblement axe principal pour tous ses points et le mouvement considéré aura lieu. Le rayon du demi-cercle étant égal à l'unité, on sait, ou l'on trouve aisément, que h est égal à $\frac{4}{3\pi}$ et le rayon de giration autour de AB, à $\frac{1}{2}$; d'où, par une relation bien connue,

$$A = M\left(\frac{1}{4} - h^2\right) = \frac{M}{4}\left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\right).$$

Divisant tous les termes de l'équation (4) par M et faisant $\sin\theta_0$ égal à $\frac{1}{2}$, on trouve

$$\left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\sin^2\theta\right)\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{16g}{3\pi}(1 - 2\sin\theta);$$

résolvons par rapport à dt et intégrons en faisant varier θ de $\frac{\pi}{6}$ à o : si nous représentons $\frac{16}{9\pi^2}$ par h^2, nous aurons, pour le temps que la plaque met à tomber sur le plan P,

$$(5) \qquad t_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{g}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{0} - \frac{\sqrt{1 - 4h^2 \sin^2\theta}}{\sqrt{1 - 2\sin\theta}}\, d\theta.$$

On demande enfin une limite inférieure et une limite supérieure de t_1 : la question est embarrassante en ce sens qu'elle comporte une infinité de réponses. On peut donner pour limites de t_1 zéro et l'infini ; ce sont au moins les plus faciles à trouver. Voici, toutefois, comment on en peut obtenir de plus rapprochées. Transformons l'intégrale (5) en posant $\sin\theta = \frac{1}{2}\cos\varphi$: on a

$$d\theta = -\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{2\sqrt{1 - \frac{1}{4}\cos^2\varphi}}, \qquad 1 - 2\sin\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\varphi.$$

Quand θ varie de $\frac{\pi}{6}$ à o, φ croît de o à $\frac{\pi}{2}$ et l'on trouve

$$(6) \qquad t_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{2g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - h^2\cos^2\varphi}{1 - \frac{1}{4}\cos^2\varphi}} \cos\frac{1}{2}\varphi\, d\varphi.$$

On reconnaît aisément que la valeur du radical croît avec celle de $\cos^2\varphi$; elle est donc comprise entre 1 et $\sqrt{\frac{4}{3}(1 - h^2)}$, soit environ 1,04554. Comme on a d'ailleurs

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{1}{2}\varphi\, d\varphi = \sqrt{2},$$

il en résulte que t_1 est compris entre $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{g}}$ et le produit de cette quantité par $\sqrt{\frac{4}{3}(1-h^2)}$. On peut avoir des limites plus rapprochées si l'on remarque que le radical de l'intégrale (6) est compris entre $1+a\cos^2\varphi$ et $1+b\cos^2\varphi$, où l'on a posé

$$a=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-h^2\right),\qquad b=\sqrt{\frac{4}{3}(1-h^2)}-1;$$

ces inégalités se démontrent sans peine en considérant les carrés des quantités que l'on compare : comme on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi\,d\varphi=\frac{8}{15}\sqrt{2},$$

t_1 est compris entre les produits de $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{g}}$ par $1+\frac{8}{15}a$ et par $1+\frac{8}{15}b$, soit environ par 1,01863 et 1,02429. On pourrait obtenir une infinité de systèmes de limites, aussi resserrées que l'on voudrait. On peut remarquer que si le point G tombait comme un point pesant libre, le temps de sa chute serait $\frac{2}{3\pi}\sqrt{\frac{3\pi}{g}}$; il est moindre que la première des limites inférieures données pour t_1.