Nouvelles annales de mathématiques

H. Laurent

Démonstration d'une formule qui donne, sous forme explicite, la résultante de plusieurs équations algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 305-315

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__305_0>

DÉMONSTRATION D'UNE FORMULE QUI DONNE, SOUS FORME EXPLICITE, LA RÉSULTANTE DE PLUSIEURS ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. H. LAURENT.

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des polynômes entiers en x de degré m, choisis de telle sorte que les $\mu = m^n$ solutions

$$\begin{array}{cccc} x_{11}, & x_{21}, & \ldots, & x_{n1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ x_{1\mu}, & x_{2\mu}, & \ldots, & x_{\mu\mu} \end{array}$$

des équations

$$(1) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_n = 0$$

soient finies et distinctes.

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$, $n+1$ polynômes entiers en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et de degré m également. On pourra poser d'une infinité de manières

$$(2) \quad \varphi_i = \varphi_i(x_{1j}, x_{2j}, \ldots) + (x_1 - x_{1j})\varphi_{i1}^j + \ldots + (x_n - x_{nj})\varphi_{in}^j,$$

les φ_{ij}^k désignant des polynômes de degré $m-1$ par rapport aux x_i et aux x_{ij}; nous poserons encore

$$\theta(x_1, x_2, \ldots, x_{1i}, x_{2i}, \ldots) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_{11}^i & \ldots & \varphi_{1n}^i \\ \varphi_2 & \varphi_{21}^i & \ldots & \varphi_{2n}^i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{n+1} & \varphi_{n+1,1}^i & \ldots & \varphi_{n+1,n}^i \end{vmatrix} = \theta_{0i},$$

$$\theta(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{1j}, x_{2j}, \ldots) = \theta_{ij}$$

et il est clair que l'on peut supposer $\theta_{ij} = \theta_{ji}$, mais cela n'est pas nécessaire pour ce qui va suivre. Considérons le déterminant

$$\Theta = \Sigma \pm \theta_{11}\theta_{22} \ldots \theta_{\mu\mu}$$

et commençons par évaluer son degré par rapport à toutes les variables x_{ij} : le degré de θ_{ij} est évidemment

$$m + n(m - 1)$$

et celui de Θ est en apparence

$$\mu[m + n(m - 1)],$$

mais il est en réalité moindre; pour nous en assurer, remplaçons x_{ij} par $a_{ij} t_j$, les fonctions θ_{ij} prendront la forme $\varpi(t_i, t_j)$ et Θ deviendra

$$\Theta_1 = \Sigma \pm \varpi(t_1, t_1) \ldots \varpi(t_\mu, t_\mu).$$

Le degré de Θ_1 en t_1, t_2, ... est le degré de Θ par rapport aux x_{ij} et nous allons l'évaluer : à cet effet, posons

$$G(t) = (t - t_1)(t - t_2) \ldots (t - t_\mu),$$

$$\xi_i = \frac{G(t)}{(t - t_i)\, G'(t_i)}.$$

La formule d'interpolation de Lagrange donnera

$$\begin{array}{l} \varpi(t, t_1) = \varpi_{11}\xi_1 + \varpi_{21}\xi_2 + \ldots + \varpi_{\mu 1}\xi_\mu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varpi(t, t_\mu) = \varpi_{1\mu}\xi_1 + \varpi_{2\mu}\xi_2 + \ldots + \varpi_{\mu\mu}\xi_\mu; \end{array}$$

si dans ces formules on fait $t = a_1, a_2, \ldots, a_\mu$, a_1, ... désignant des arbitraires, on voit que

$$\begin{vmatrix} \varpi(a_1, t_1) & \varpi(a_2, t_1) & \ldots & \varpi(a_\mu, t_1) \\ \varpi(a_1, t_2) & \varpi(a_2, t_2) & \ldots & \varpi(a_\mu, t_2) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \varpi(a_1, t_\mu) & \varpi(a_2, t_\mu) & \ldots & \varpi(a_\mu, t_\mu) \end{vmatrix}$$

$$= \Theta_1 \Sigma \pm \frac{G(a_1)\, G(a_2) \ldots}{(t_1 - a_1)(t_2 - a_2) \ldots G'(t_1)\, G'(t_2) \ldots}$$

$$= \Theta_1 \frac{G(a_1)\, G(a_2) \ldots G(a_\mu)}{G'(t_1)\, G'(t_2) \ldots G'(t_\mu)} \frac{\Pi(t_i - t_j)\, \Pi(a_i - a_j)}{\Pi(a_i - a_j)}$$

$$= \pm \Theta_1 \frac{G(a_1) \ldots G(a_\mu)}{G'(t_1) \ldots G'(t_\mu)} \frac{\Pi(t_i - t_j)\, \Pi(a_i - a_j)}{G(a_1)\, G(a_2) \ldots G(a_\mu)}.$$

Remplaçons les membres extrêmes de cette suite d'égalités par leurs degrés relatifs aux t; en appelant δ le degré de Θ_1, nous aurons

$$\mu n(m-1)=\delta,$$

car $\Pi(t_i - t_j)$ est égal, à un facteur constant près, à $G'(t_1)G'(t_2)\ldots$

Ainsi Θ est de degré $\mu n(m-1)$.

Maintenant posons

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$
$$D_i = D(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}),$$

et considérons le quotient

$$\frac{\Theta}{D_1 D_2 \ldots D_\mu};$$

le numérateur et le dénominateur sont de même degré $\mu n(m-1)$, Θ s'annule quand les équations (1) ont une solution double, le dénominateur $D_1 D_2 \ldots$ aussi, Θ et $D_1 D_2 \ldots$ sont nuls en même temps : donc Θ est divisible par $D_1 D_2 \ldots$, donc le quotient considéré ne contient pas les x_{ij}. On peut donc évaluer sa valeur numérique en donnant aux x_{ij} des valeurs arbitraires solutions d'équations de degré m. Prenons alors les x_{ij} égaux aux solutions des équations

$$(3) \qquad \varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n = 0:$$

θ_{ij} se réduit alors à

$$\begin{vmatrix} 0 & \ldots \\ 0 & \ldots \\ . & \ldots \\ \varphi_{n+1}(x_{1i}, x_{2i}, \ldots) & \ldots \end{vmatrix} = \varphi_{n+1}(x_{1i}, x_{2i}, \ldots)\lambda_{ij},$$

λ_{ij} désignant une quantité indépendante des coefficients de φ_{n+1} ; on peut donc écrire

$$\Theta = \varphi_{n+1}(x_{11}, x_{21}, \ldots)\,\varphi_{n+1}(x_{12}, x_{22}, \ldots)\ldots\varphi_{n+1}(x_{1\mu}, x_{2\mu}, \ldots)\,\Lambda,$$

Λ ne dépendant pas de φ_{n+1} ; donc Θ, *qui est de degré* μ *par rapport aux coefficients de* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$, *s'annule quand les équations*

$$(4) \qquad \varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{n+1} = 0$$

ont une solution commune, et par suite

$$\Theta = 0$$

est la résultante des équations (1).

Il reste à prouver que Θ n'est pas identiquement nul ; mais, avant d'établir ce point, je ferai observer que dans la pratique on pourra supposer

$$\begin{aligned} f_1 &= (x_1 - x_{11})(x_1 - x_{12})\ldots(x_1 - x_{1m}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ f_n &= (x_n - x_{n1})(x_n - x_{n2})\ldots(x_n - x_{nm}); \end{aligned}$$

le tableau des x_{ij} sera alors

$$\begin{matrix} x_{11}, & x_{21}, & \ldots, & x_{n1}, \\ x_{11}, & x_{21}, & \ldots, & x_{n2}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{matrix}$$

Pour prouver que Θ n'est pas identiquement nul, il suffit de montrer que Λ n'est pas nul en général ; or Λ est un déterminant dont l'élément général est de la forme $\xi_i(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj})$, la valeur de ξ_i étant

$$\xi_i(x_1, x_2, \ldots) = \begin{vmatrix} \varphi'_{11} & \varphi'_{12} & \cdots & \varphi'_{1n} \\ \varphi'_{21} & \varphi'_{22} & \cdots & \varphi'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi'_{n1} & \varphi'_{n2} & \cdots & \varphi'_{nn} \end{vmatrix},$$

les x_{ij} étant censés solutions de (4). Or ξ_i est nul pour

$x_1 = x_{ij}$, $x_2 = x_{2j}$, ... excepté pour $i = j$ et alors il se réduit à

$$\left[\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right]_{x_1 = x_{1i}, \ldots} = \Delta_i :$$

le déterminant Λ est donc égal à $\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_\mu$ qui n'est pas nul en général.

Maintenant supposons la fonction φ_{n+1} remplacée par $\psi z + \varphi_{n+1}$, z désignant une arbitraire et ψ une fonction de degré m; dans ce cas Θ devient

$$\Theta + z\Theta_1 + \ldots + z^\mu \Theta_\mu,$$

et l'équation

$$\Theta + z\Theta_1 + \ldots - z^\mu \Theta_\mu = 0$$

a pour racines les diverses valeurs que prend $-\frac{\varphi_{n+1}}{\psi}$ quand on y remplace les x par une solution des équations (3). Les coefficients de cette équation divisés par Θ_μ font alors connaître des fonctions symétriques des solutions de (3) et en particulier, si l'on suppose $\psi = 1$, φ_{n+1} successivement égal à $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1^2, \ldots$. On peut ainsi se procurer très facilement ce que l'on appelle les *fonctions simples* et beaucoup d'autres.

On voit, en particulier, que les fonctions symétriques *entières* des solutions de (3) ne contiennent en dénominateur que Θ_μ et que leur numérateur est entier par rapport aux coefficients des φ. Or Θ_μ est la valeur que prend Θ quand on y fait $\varphi_{n+1} = 1$: c'est la quantité que nous avons désignée plus haut par Λ; elle est divisible par $D_1 D_2 \ldots D_\mu$. Rien n'empêche de supposer que l'on a enlevé ce facteur de Θ, mais alors Θ_μ est manifestement de poids nul et, pour l'évaluer, on peut supposer les fonctions φ réduites à leurs termes de degré m.

Il est bon d'observer que l'on peut déduire de la théorie précédente l'expression de ce que l'on appelle *les polynômes multiplicateurs;* il suffit pour cela de supposer une solution des équations $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots,$ $f_n = 0$ variable, en la désignant par $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et en supposant que $x_1 = x_{1\mu}$, $x_2 = x_{2\mu}$, ... par exemple; la quantité Θ sera alors fonction de $x_1, x_2, \ldots,$ x_n. Or on a, en désignant $\theta_{i\mu}$ par θ_i,

$$\Theta = \frac{\partial\Theta}{\partial\theta_1}\theta_1 + \frac{\partial\Theta}{\partial\theta_2}\theta_2 + \ldots + \frac{\partial\Theta}{\partial\theta_\mu}\theta_\mu,$$

et, en remplaçant $\theta_1, \theta_2, \ldots$ par leurs valeurs qui sont de la forme

$$\theta_i = \lambda_{i1}\varphi_1 + \lambda_{i2}\varphi_2 + \ldots,$$

on a

$$\Theta = \varphi_1\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\theta_1}\lambda_{11} + \frac{\partial\Theta}{\partial\theta_2}\lambda_{21} + \ldots\right) + \ldots.$$

Les coefficients de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ dans cette formule sont évidemment les polynômes multiplicateurs.

Supposons $\Theta = 0$, les équations (4) ont une solution commune, mais, le déterminant Θ étant nul, il doit exister une même relation linéaire entre les éléments d'une même rangée : on doit donc avoir des quantités ζ_1, $\zeta_2, \ldots$, satisfaisant aux relations

$$\begin{gathered}\theta_{11}\zeta_1 + \theta_{12}\zeta_2 + \ldots + \theta_{1\mu}\zeta_\mu = 0,\\ \theta_{21}\zeta_1 + \theta_{22}\zeta_2 + \ldots + \theta_{2\mu}\zeta_\mu = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{gathered}$$

quand les formules (4) ont une solution commune; dans le cas contraire, les premiers membres des équations précédentes ne sont pas nuls. On pourra prendre

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \begin{vmatrix}\theta_1 & \theta_2 & \ldots & \theta_\mu\\ \theta_{21} & \theta_{22} & \ldots & \theta_{2\mu}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \theta_{\mu1} & \theta_{\mu2} & \ldots & \theta_{\mu\mu}\end{vmatrix} : \Theta\\ &= \frac{1}{\Theta}\left(\theta_1\frac{\partial\Theta}{\partial\theta_{11}} + \theta_2\frac{\partial\Theta}{\partial\theta_{12}}\ldots\right), \qquad \zeta_2 = \ldots;\end{aligned}$$

les fonctions ζ jouiront alors de la propriété suivante :

1° ζ_i se réduira à un pour $x_1 = x_{1i}$, $x_2 = x_{2i}$, ...;

2° ζ_i sera nul pour $i \gtrless j$ si $x_1 = x_{1j}$, $x_2 = x_{2j}$, ..., et l'on aura

$$\begin{gathered}\theta_{11}\zeta_1 + \theta_{12}\zeta_2 + \ldots + \theta_{1\mu}\zeta_\mu = \theta_1,\\ \theta_{21}\zeta_1 + \theta_{22}\zeta_2 + \ldots + \theta_{2\mu}\zeta_\mu = \theta_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{gathered}$$

ces équations, quand $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$, ... font connaître les fonctions ζ de la solution commune aux équations (4).

Je ferai enfin observer que, si les mineurs de Θ sont nuls, les équations (4) ont une solution double; si les mineurs du second ordre de Θ sont nuls, elles ont une solution triple et ainsi de suite. On pourrait, en modifiant un peu cette méthode, indiquer le moyen de calculer la solution commune, mais les calculs théoriquement possibles ne seraient d'aucune utilité en pratique à cause de leur longueur.

La recherche de la résultante a jusqu'ici été subordonnée à la théorie des fonctions symétriques; dans ce qui précède je fais dépendre au contraire la théorie des fonctions symétriques de la théorie de l'élimination : le résultat est évidemment plus simple. Mais, même dans l'ancienne théorie, on n'était pas parvenu à mettre la résultante sous forme explicite; on peut combler cette lacune comme il suit :

Au point de vue pratique, le résultat que je vais indiquer n'a évidemment aucune valeur, car le calcul des fonctions symétriques restera toujours très laborieux; mais il peut avoir une certaine importance théorique; en tout cas, c'est l'expression d'une identité remarquable.

Supposons que

$$\begin{matrix} x_{11}, & x_{21}, & \ldots, & x_{n1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ x_{1\mu}, & x_{2\mu}, & \ldots, & x_{n\mu} \end{matrix}$$

soient les solutions des équations (4). Désignons par $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_\mu$ les différents termes du produit (en nombre μ)

$$(1 + x_1 + x_1^2 + \ldots + x_1^{m-1})(1 + x_2 + x_2^2 + \ldots + x_2^{m-1}) \ldots \\ \times (1 + x_n + x_n^2 + \ldots + x_n^{m-1})$$

et par ω_{ij} la valeur que prend ω_i quand on fait $x_1 = x_{1j}$, $x_2 = x_{2j}$, ... Désignons toujours par Δ le déterminant fonctionnel de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ et par Δ_j la valeur qu'il prend pour $x_1 = x_{1j}$, $x_2 = x_{2j}$, ... Le déterminant $\Sigma \pm \omega_{11}, \omega_{22}, \ldots, \omega_{\mu\mu}$ s'annule toutes les fois que deux solutions des équations (4) deviennent égales et il en est de même de $\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_\mu$; le carré du premier déterminant est de même degré : donc

$$(\Sigma \pm \omega_{11}\omega_{22} \ldots \omega_{\mu\mu})^2 = G \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_\mu,$$

G désignant une quantité indépendante des solutions de (4) et par suite ne dépendant que des coefficients des termes du degré le plus élevé dans les φ. Considérons alors les deux déterminants

$$\begin{vmatrix} \varphi_{n+1}^1 \dfrac{\omega_{11}}{\Delta_1} & \varphi_{n+1}^1 \dfrac{\omega_{21}}{\Delta_1} & \ldots & \varphi_{n+1}^1 \dfrac{\omega_{\mu 1}}{\Delta_1} \\ \varphi_{n+1}^2 \dfrac{\omega_{12}}{\Delta_2} & \varphi_{n+1}^2 \dfrac{\omega_{22}}{\Delta_2} & \ldots & \varphi_{n+1}^2 \dfrac{\omega_{\mu 2}}{\Delta_2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \dfrac{\varphi_{n+1}^\mu}{\Delta_\mu} \omega_{\mu 1} & \dfrac{\varphi_{n+1}^\mu}{\Delta_\mu} \omega_{\mu 2} & \ldots & \dfrac{\varphi_{n+1}^\mu}{\Delta_\mu} \omega_{\mu 2} \end{vmatrix},$$

dans lesquels φ_{n+1}^i désigne, pour abréger,

$$\varphi_{n+1}(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}) \quad \text{et} \quad \Sigma \pm \omega_{11}\omega_{22} \ldots \omega_{\mu\mu}$$

le premier est égal à

$$\frac{\varphi_{n+1}^1\,\varphi_{n+1}^2\ldots\varphi_{n+1}^\mu}{\Delta_1\,\Delta_2\ldots\Delta_n}\,\Sigma\pm\omega_{11}\,\omega_{22}\ldots\omega_{\mu\mu};$$

leur produit sera donc $\varphi_{n+1}^1\,\varphi_{n+1}^2\ldots\varphi_{n+1}^\mu$, à un facteur près, qui ne dépend que des termes du degré le plus élevé dans $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$; en égalant ce produit à zéro, on aura la résultante, qui est par conséquent

$$\begin{vmatrix} \sum\frac{\varphi_{n+1}\,\omega_1^2}{\Delta} & \sum\frac{\varphi_{n+1}\,\omega_1\,\omega_2}{\Delta} & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \sum\frac{\varphi_{n+1}\,\omega_\mu^2}{\Delta} \end{vmatrix} = 0.$$

Tous les termes du déterminant sont des fonctions symétriques, calculables par la méthode de Jacobi. Ce résultat montre comment on peut arriver de proche en proche à former la résultante en passant successivement par des systèmes à deux, trois, etc. inconnues.

Les fonctions symétriques de Jacobi $\sum\frac{F}{\Delta}$ sont en général difficiles à calculer; il en est cependant un certain nombre qui sont nulles, ce qui dispense d'en faire le calcul; il y en a un certain nombre d'autres que l'on peut encore calculer pratiquement en évitant la méthode de Jacobi que l'on ne peut pas matériellement employer.

Posons

$$\varphi_i = \varphi_i(x_{1j}, x_{2j}, \ldots) + (x_1 - x_{1j})\,\varphi_{i1}^j + \ldots + (x_n - x_{nj})\,\varphi_{in}^j,$$

$$\xi_i = \begin{vmatrix} \varphi_{11}^i & \varphi_{12}^i & \cdots & \varphi_{1n}^i \\ \varphi_{21}^i & \varphi_{22}^i & \cdots & \varphi_{2n}^i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1}^i & \varphi_{n2}^i & \cdots & \varphi_{nn}^i \end{vmatrix} : \Delta_i.$$

Si l'on désigne par F une fonction quelconque de x_1, $x_2, \ldots, x_n$, de degré inférieur à m et par F_i la valeur qu'elle prend pour $x_1 = x_{1i}$, $x_2 = x_{2i}$, ..., on aura

$$F = F_1\xi_1 + F_2\xi_2 + \ldots + F_\mu\xi_\mu,$$

en particulier

$$1 = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\mu.$$

Si l'on fait l'identification des deux membres de la formule précédente, on trouve des formules qui sont des cas particuliers de la formule de Jacobi.

On peut donner à la résultante des équations (4) ou plutôt aux éléments du déterminant Θ une forme qu'il est bon d'indiquer : soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un polynôme entier, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ des quantités quelconques. Posons

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \qquad f_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad \ldots,$$

$$F = \int_0^1 f(c_1 + t\,\overline{x_1 - c_1},\ c_2 + t\,\overline{x_2 - c_2},\ \ldots)\,\frac{dt}{t},$$

on aura

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \int_0^1 f_1(c_1 + t\,\overline{x_1 - c_1},\ c_2 + t\,\overline{x_2 - c_2},\ \ldots)\,dt,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \int_0^1 f_2(c_1 + t\,\overline{x_1 - t_1},\ c_2 + t\,\overline{x_2 - c_2},\ \ldots)\,dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on en conclut

$$\begin{aligned}(x_1 - c_1)\frac{\partial F}{\partial x_1} &+ (x_2 - c_2)\frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots \\ &= \int^1 \frac{\partial}{\partial t} f(c_1 + t\,\overline{x_1 - c_1},\ c_2 + t\,\overline{x_2 - c_2},\ \ldots)\,dt \\ &= f(x_1, x_2, \ldots) - f(c_1, c_2, \ldots).\end{aligned}$$

Il résulte de là que les fonctions que nous avons désignées par θ sont des déterminants fonctionnels, et si l'on fait

$$\Phi_{ij} = \int_0^1 \varphi_i(x_{1j} + t\,\overline{x_1 - x_{1j}},\ x_{2j} + t\,\overline{x_2 - x_{2j}},\ \ldots)\,\frac{dt}{t}$$
$$+ x_{n+1}\,\varphi_i(x_{1j},\ x_{2j},\ \ldots),$$

on aura

$$\theta_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial(\Phi_{1j}, \Phi_{2j}, \ldots, \Phi_{n+1\,j})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})}$$

au signe près.