NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. RÉVEILLE

Des figures semblablement variables ayant un centre permanent de similitude, et dont une courbe passe par un point fixe

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 297-300

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__297_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

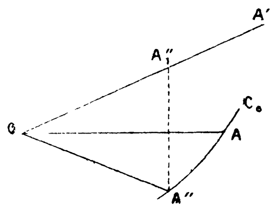
NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DES FIGURES SEMBLABLEMENT VARIABLES AYANT UN CENTRE PERMANENT DE SIMILITUDE, ET DONT UNE COURBE PASSE PAR UN POINT FIXE;

PAR M. J. RÉVEILLE.

I. Soit C une courbe liée à une figure semblablement variable dont le point O est un centre permanent de similitude. Je suppose que la courbe C passe par le point fixe A; soit C_0 une certaine position de la courbe C; je vais chercher la ligne décrite par le point A considéré comme appartenant à la figure variable.



Soit A′ la position de ce point quand la figure a tourné de l'angle α, et soit A″ le point de la courbe C_0 qui vient en A après cette rotation.

On a les relations

$$\alpha = \widehat{A''OA} = \widehat{AOA'}; \qquad \frac{OA''}{OA} = \frac{OA}{OA'} \quad \text{ou} \quad \overline{OA}^2 = OA' \times OA''.$$

Le point A''_1 symétrique du point A″ par rapport à la droite OA se trouve sur OA′; il est aussi sur la courbe C_1 symétrique de C_0 par rapport à cette droite OA; et la relation $\overline{OA}^2 = OA''_1 \times OA'$ montre que le point A′

appartient à la courbe Γ_1 inverse de C_1. Tous les autres points de la figure décrivent des courbes Γ semblables à Γ_1.

Projetons maintenant le centre O au point ω sur une droite D de la figure semblablement variable; ce point ω décrit une courbe Γ, et l'enveloppe de D est alors la podaire négative de Γ, c'est-à-dire une courbe semblable à la polaire réciproque de C_1, le cercle directeur ayant son centre au point O.

Si la courbe C est anallagmatique, les courbes Γ et C sont semblables; si la courbe C est égale à sa polaire réciproque, la droite D enveloppe une courbe semblable à la courbe C.

II. Supposons maintenant que la courbe C, au lieu de passer par un point fixe, touche une droite fixe A.

Transformons la figure par la méthode des polaires réciproques en prenant un cercle directeur de centre O. Nous obtiendrons une figure semblablement variable, dont une courbe K passe par un point fixe.

D'après ce qui précède, une droite de cette dernière figure enveloppe une courbe semblable à la polaire réciproque de la courbe K, c'est-à-dire semblable à la courbe C.

Donc un point de la figure donnée décrit une courbe semblable à la courbe K, c'est-à-dire à la polaire réciproque de la courbe C. Quant à une droite de cette figure, on voit sans peine qu'elle enveloppe une courbe semblable à la podaire négative de la polaire réciproque de la courbe C.

III. Étant parti d'une figure semblablement variable, dont une courbe passe par un point fixe, nous sommes arrivé, par la méthode de transformation des polaires réciproques, à une figure dont une courbe touche une droite fixe.

La méthode d'inversion conduit maintenant à une figure semblablement variable, dont une courbe touche une circonférence fixe passant par le centre permanent de similitude.

Une nouvelle transformation par les polaires réciproques amène à une figure, toujours semblablement variable, dont une courbe est tangente à une parabole ayant le centre permanent de similitude pour foyer; et ainsi de suite. On pourra alterner indéfiniment ces deux méthodes de transformation.

IV. Par suite de ces transformations successives la courbe C et le point fixe A, par lequel elle passe, se transforment indéfiniment. Mais il n'en est pas de même des courbes décrites par les points, ou enveloppées par les droites des figures semblablement variables successivement obtenues.

En effet, nous avons vu que, dans le premier cas, un point de la figure décrit la courbe réciproque de la courbe C, et une droite enveloppe la polaire réciproque de cette courbe C.

Par suite de la première transformation par polaires réciproques, un point de la nouvelle figure décrit la courbe primitive C, et une droite enveloppe la podaire négative de C ou la polaire de son inverse.

Une inversion donne maintenant une troisième figure, dont un point décrit l'inverse de la courbe C, et dont une droite enveloppe la polaire réciproque de cette courbe C.

Nous sommes ainsi ramené aux résultats du premier cas, et les résultats suivants se reproduisent périodiquement.

V. Les considérations qui précèdent permettent de résoudre immédiatement un assez grand nombre de problèmes, parmi lesquels j'énoncerai les suivants, la plupart très connus, et qu'on pourrait d'ailleurs multiplier indéfiniment.

Le lieu des centres des hyperboles équilatères ayant un foyer commun et passant par un point fixe est un limaçon de Pascal; l'enveloppe de chaque asymptote est un cercle.

Le lieu des foyers des hyperboles équilatères concentriques et passant par un point fixe est une lemniscate; l'enveloppe des directrices est une hyperbole équilatère.

Le lieu du foyer d'une parabole dont le sommet est fixe et qui passe par un autre point fixe est une cissoïde; l'enveloppe de la directrice est une parabole.

Le lieu des sommets des ellipses concentriques et semblables qui passent par un point fixe est la courbe inverse de l'ellipse qui a ce point fixe pour sommet; les directrices enveloppent une ellipse.

Le lieu des centres des cercles tangents à une cardioïde et passant par le point de rebroussement est un cercle.

Étant donnés deux cercles égaux et tangents extérieurement, si une lemniscate a son point double au point de contact, et si elle est tangente aux deux cercles, le lieu de ses sommets est une lemniscate.

L'enveloppe de l'asymptote d'une cissoïde qui est tangente à un cercle fixe passant par son point de rebroussement est une parabole.