Nouvelles annales de mathématiques

Ch. Bioche

Sur les cubiques à point de rebroussement

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 294-296
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__294_0>

SUR LES CUBIQUES A POINT DE REBROUSSEMENT;

PAR M. CH. BIOCHE.

1. Dans les *Leçons de Géométrie* de CLEBSCH (trad. BENOIST, t. II, p. 345) on trouve la propriété suivante des courbes du troisième degré qui possèdent un point de rebroussement.

Si d'un point M_0 de la courbe on mène la tangente, si du point de contact M_1 de cette tangente on mène encore la tangente, et ainsi de suite, on obtient une série de points $M_0, M_1, \ldots, M_n$ tels que, lorsque n augmente indéfiniment, le point M_n tend vers une position limite, qui est celle du point d'inflexion.

Inversement, si l'on mène la tangente en M_0 elle coupe en un point M_{-1}; la tangente en M_{-1} coupe en M_{-2} et ainsi de suite. Le point M_{-n} tend vers le point de rebroussement.

2. Cette propriété peut se généraliser par la méthode même de Clebsch. Si l'on prend un triangle de référence formé par la droite qui joint les points d'inflexion et de rebroussement, et par les tangentes en ces points, la cubique peut se représenter par l'équation

$$x^2 z = y^3.$$

Si l'on pose $y = \lambda x$, à chaque valeur de λ correspond un point de la cubique. Les points d'intersection de la cubique avec une conique dont l'équation serait

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

sont déterminés par l'équation

$$A''\lambda^6 + 2B\lambda^4 + 2B'\lambda^3 + A'\lambda^2 + 2B''\lambda + A = 0.$$

On voit que dans une telle équation la somme des racines est toujours nulle. C'est ce qui permet d'établir facilement les résultats suivants.

3. Considérons une série de coniques dont chacune a avec la cubique un contact du quatrième ordre et telles que le point de contact de l'une soit le point d'intersection de la suivante. En partant d'un point de paramètre λ_0, on peut, comme dans le problème de Clebsch, déterminer deux suites de points,

$$\begin{array}{llllll} \lambda_0, & \lambda_1, & \ldots, & \lambda_n, & \ldots, \\ \lambda_0, & \lambda_{-1}, & \ldots, & \lambda_{-n}, & \ldots; \end{array}$$

on voit que

$$\lambda_n = (-\tfrac{1}{5})^n \lambda_0,$$

de sorte que le point λ_n a pour limite le point $\lambda = 0$, c'est-à-dire le point d'inflexion. De même

$$\lambda_{-n} = (-5)^n \lambda_0.$$

de sorte que le point λ_{-n} a pour limite le point $\lambda = \infty$, c'est-à-dire le point de rebroussement.

4. Si l'on considérait une suite analogue formée de coniques ayant chacune avec la cubique deux contacts, l'un du premier ordre et l'autre du troisième, on retomberait sur le problème de Clebsch ; car, dans ce cas, les coniques se réduiraient à des droites doubles. Je me borne à signaler ce fait, qui est facile à vérifier.

5. Si l'on considère des coniques ayant deux contacts du deuxième ordre, les paramètres des points de contact sont liés par l'équation

$$\lambda' + \lambda'' = 0.$$

Ces points ne forment donc plus une suite. Ils sont deux à deux sur des droites passant par le point d'inflexion; la corde qui les joint est divisée harmoniquement par le point d'inflexion et par le point où elle coupe la tangente au rebroussement.

6. On peut assujettir les coniques à passer par des points fixes de la cubique. La somme des paramètres des points variables n'est plus nulle en général, elle est toujours constante. On obtient alors des résultats du même genre que ceux qui précèdent; j'indiquerai seulement le suivant.

Si l'on considère une cubique circulaire à point de rebroussement, et une série de cercles osculateurs tels que le point de contact de chacun d'eux soit le point d'intersection du suivant avec la cubique, on a, comme précédemment, des suites de points

$$\begin{array}{lllll} \lambda_0, & \lambda_1, & \ldots, & \lambda_n, & \ldots, \\ \lambda_0, & \lambda_{-1}, & \ldots, & \lambda_{-n}, & \ldots : \end{array}$$

le point λ_{-n} tend vers le rebroussement, et le point λ_n vers le point où le cercle osculateur a avec la cubique un contact du troisième ordre. Ce point est distinct du point d'inflexion si celui-ci est à distance finie.