A. de Saint-Germain

Sur une formule générale de la mesure des volumes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 291-293

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__291_1>

SUR UNE FORMULE GÉNÉRALE DE LA MESURE DES VOLUMES;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Une formule très générale et très simple

$$(1) \qquad V = \frac{H}{6}(B + B' + 4B'').$$

donne, comme on sait, le volume d'un solide S limité par deux faces parallèles à un plan P, lorsque l'expression $\varphi(z)$ de l'aire de la section faite dans S par un plan mené parallèlement à P, à la distance quelconque z, est un polynôme du deuxième ou du troisième degré en z : cette formule est-elle applicable avec d'autres formes de $\varphi(z)$ quand l'une, au moins, des bases de S peut être prise à une distance arbitraire de P? Je n'ai pas vu que la question ait été posée, mais il est facile d'y répondre négativement dans le cas très général où $\varphi(z)$ pourrait s'exprimer à l'aide d'une série ordonnée suivant les puissances positives de z.

Comptons z à partir de la face de S qui est donnée et soit $2h$ la hauteur du solide; supposons que $\varphi(z)$ soit donné par une série de la forme

$$\varphi(z) = A_0 + \sum_1^{\infty} A^n z^{\alpha_n},$$

α_1, α_2, ... étant des exposants positifs quelconques, mais croissants, et la série convergente tant que z est inférieur à une certaine limite qui n'atteint pas non plus $2h$. On devrait avoir

$$\int_0^{2h} \varphi(z)\,dz = \frac{h}{3}[\varphi(0) + \varphi(2h) + 4\varphi(h)],$$

ou, en développant $\varphi(z)$ et effectuant les calculs,

$$2A_0 h + \sum \frac{2^{\alpha_n+1}}{a_n+1} A_n h^{\alpha_n+1} = \frac{h}{3}\left[6A_0 + \sum A_n(2^{\alpha_n}+4)h^{\alpha_n}\right].$$

Les coefficients des mêmes puissances de h dans les deux membres doivent être égaux : cela a lieu pour les termes en h; mais, pour qu'il en soit de même des termes en h^{α_n+1}, par exemple, il faut, si A_n n'est pas nul, que l'exposant α_n satisfasse à une équation qu'on peut mettre sous la forme

$$F(x) = (5 - x)\,2^{x-2} - x - 1 = 0;$$

cette équation a pour racines réelles 1, 2 et 3, et elle ne saurait en avoir plus de trois, car $F''(x)$, égale à

$$\log 2[(5 - x)\log 2 - 2]\,e^{x-2},$$

ne s'annule que pour une valeur réelle et finie de x : donc $\varphi(z)$ se réduit nécessairement à la forme

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3.$$

On ne peut d'ailleurs considérer des solides dont les sections auraient des aires infinies.

J'indiquerai une démonstration très élémentaire de la formule (1) dans le cas, qui est le plus important, où $\varphi(z)$ n'est que du second degré. Imaginons un prisme T, dont les bases soient situées dans les plans des bases B, B′ de S et deux pyramides T′, T″ ayant, l'une sa base, l'autre son sommet dans le plan de B et inversement dans le plan de B′ : il est facile de déterminer les bases de T, T′, T″ de manière que la somme (algébrique) des aires des sections faites dans les trois solides par tout plan parallèle à P soit égale à l'aire de la section faite dans S. Le volume de S sera égal à la somme des volumes de T, T′, T″ et, comme la formule (1) est évidente pour le prisme et les pyramides, elle sera également vraie pour S.