NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CARVALLO

Sur les forces centrales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 228-231

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__228_1>

SUR LES FORCES CENTRALES;

PAR M. E. CARVALLO,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

1. Quand un mobile parcourt sa trajectoire conformément à la loi des aires, il est classique de démontrer d'abord qu'il subit de l'origine des aires une accélération fonction de la distance seule. On calcule ensuite, et en s'appuyant sur ce premier résultat, la *grandeur* de la *vitesse* et celle de l'*accélération* en fonction des coordonnées polaires (r, θ) du point mobile et des

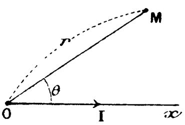
quantités $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{d^2 r}{d\theta^2}$ qui définissent la forme de sa trajectoire au point (r, θ). La méthode consiste à éliminer le temps en le remplaçant, dans certaines expressions de la vitesse et de l'accélération, par sa valeur tirée de l'équation des aires

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = k.$$

Par la même méthode de substitution, la Géométrie vectorielle permet de calculer en outre les *positions* de ces vecteurs, *vitesse* et *accélération*, et aussi celles des accélérations des divers ordres. Ce calcul est plus intuitif que le calcul classique ; de plus le résultat établit directement que l'accélération est centrale, sans qu'il soit nécessaire de donner de ce fait une démonstration spéciale.

2. Soient :

M le vecteur qui va du centre fixe O au point mobile M de coordonnées (r, θ);



I le vecteur unité qui est pris pour origine des angles θ;
i le symbole imaginaire [1];
e la base des logarithmes népériens.

---

[1] Dans la méthode des équipollences, cet opérateur a pour effet d'imprimer une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ à tout vecteur qu'il multiplie.

Le vecteur M est représenté, dans la méthode vectorielle, par la formule

$$\text{(1)} \qquad M = r\mathrm{I}e^{i\theta}.$$

D'après cela, la vitesse du point M est

$$V = \frac{dM}{dt} = \frac{dM}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{dr}{d\theta} + ri\right)\mathrm{I}\,e^{i\theta}\,\frac{d\theta}{dt},$$

et, en remplaçant $\frac{d\theta}{dt}$ par sa valeur $\frac{k}{r^2}$ tirée de l'équation des aires,

$$V = k\left(\frac{1}{r^2}\,\frac{dr}{d\theta} + \frac{1}{r}\,i\right)\mathrm{I}\,e^{i\theta}.$$

Cette formule s'écrit un peu plus simplement, si l'on représente par

$$\frac{1}{r} = f(\theta)$$

l'équation de la trajectoire. Il vient alors

$$\text{(I)} \qquad V = k[-f'(\theta) + if(\theta)]\,\mathrm{I}\,e^{i\theta}.$$

L'accélération Γ se déduit de V par la même méthode :

$$\Gamma = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{k}{r^2}\,\frac{dV}{d\theta},$$

et, en remplaçant $\frac{dV}{d\theta}$ par sa valeur déduite de (I),

$$\text{(II)} \qquad \Gamma = -\frac{k^2}{r^2}\,[f''(\theta) + f(\theta)]\,\mathrm{I}\,e^{i\theta}.$$

On calculerait de même les accélérations des divers ordres $\frac{d\Gamma}{dt}$, $\frac{d^2\Gamma}{dt^2}$, ...

Des formules (I) et (II) on déduit les conséquences connues :

1° La formule (I) montre que la vitesse a pour composantes $-kf'(\theta)$ suivant OM, et $+kf(\theta)$ suivant la perpendiculaire à OM. La grandeur de la vitesse est donc

$$v = k\sqrt{f^2(\theta)+f'^2(\theta)};$$

2° La formule (II) montre que l'accélération est dirigée suivant OM. L'*accélération est centrale.* La grandeur de cette accélération, comptée positivement de O vers M, est

$$\gamma = -\frac{k^2}{r^2}[f''(\theta)+f(\theta)].$$

Voilà, parmi tant d'autres, un exemple où la méthode du calcul géométrique peut rendre service à l'enseignement.