NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LUCIEN LÉVY

Quelques observations sur une « première leçon d'algèbre »

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 225-228

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__225_0>

QUELQUES OBSERVATIONS SUR UNE « PREMIÈRE LEÇON D'ALGÈBRE »;

PAR M. LUCIEN LÉVY.

La très intéressante *Première leçon d'Algèbre* que vient de publier, dans les *Nouvelles Annales*, M. Fouché, m'a suggéré quelques observations que je voudrais soumettre à vos lecteurs.

D'abord, d'après M. Fouché, la plupart des mathématiciens seraient d'accord pour reconnaître que « la différence essentielle entre l'Algèbre et l'Arithmétique consiste dans l'introduction des nombres négatifs ». Je lui concède que telle paraît être l'opinion du jury d'Agrégation ([1]). Voici cependant un excellent Ouvrage d'Arithmétique que vient de publier M. E. Humbert, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand, avec Préface approbative de M. Jules Tannery, et où figurent les nombres entiers négatifs dès la page 29; M. Tannery limite même le domaine de l'Algèbre à la théorie des fonctions entières d'une ou de plusieurs variables.

De mon côté, pour me conformer à l'usage français qui veut qu'une science soit définie au début et non quand on en a achevé l'étude, j'ai depuis longtemps adopté la définition suivante ([2]) :

« L'Algèbre a pour objet : 1° d'étudier les propriétés

([1]) Il semble aussi que ce soit l'opinion la plus répandue en Allemagne : ainsi un très petit Traité d'Arithmétique et d'Algèbre du Dr Kambly (26e édition en 1881) prononce le mot *algébrique* pour la première fois en introduisant les nombres positifs et négatifs, p. 26.

([2]) Je partage entièrement les idées de M. Lévy et, depuis 1868, de certains signes opératoires, abstraction faite de la signification des objets sur lesquels portent les opérations indiquées par ces signes; 2° d'envisager en particulier ce que deviennent ces propriétés dans le cas où les objets d'opération sont des nombres entiers. »

M. Fouché dit fort bien qu'il faudra definir l'égalité; j'ajoute qu'il faudra définir le signe zéro dans chaque nouvelle espèce de quantités.

Dans l'addition et la multiplication, M. Fouché prend comme définitions les deux propriétés qu'ont ces opérations de permettre l'interversion de l'ordre des deux

---

je dicte à mes eleves, au debut du cours d'Algebre, les lignes suivantes

Definition de l Algebre

1 On a vu, *en Arithmetique*, quelle etait l'utilite des signes comme moyen d'abreviation et quelle etait l'utilite des lettres comme moyen de generalisation L'emploi des signes rend evidemment les mêmes services en Mathematiques que la stenographie dans l'ecriture ordinaire, et l'emploi des lettres permet d etablir, sans confusion, les proprietés des nombres qui sont independantes de la valeur qu'on leur attribue Ce n'est donc ni dans l'emploi des signes comme moyen d'abreviation, ni dans l'emploi des lettres comme moyen de generalisation que consiste l'*Algebre*

Quand, dans la solution d'un probleme, on cherche a determiner une inconnue qui n'existe peut être pas, on est conduit a la soumettre a des operations et a lui appliquer des regles qui n'ont éte demontrees que pour les nombres que l'Arithmetique considere On est donc amene graduellement a l'idee de combiner des lettres depourvues de tout sens au point de vue de la quantite, conformement a des regles qu on s'impose et qu'on aurait pu fixer d'une maniere arbitraire Mais, pour pouvoir utiliser les resultats auxquels on parvient ainsi, dans le cas ou les lettres seraient la représentation de nombres, on fixe les regles auxquelles on soumet leurs combinaisons de maniere a satisfaire a cette consideration fondamentale *Que si ces combinaisons prennent un sens arithmetique, le resultat soit arithmetiquement vrai*

L ensemble des resultats obtenus en combinant ainsi des lettres, abstraction faite de toute idee de valeur ou de quantite, constitue l *Algebre proprement dite* Ch B objets ou des deux derniers sur trois objets. Il me semble préférable de respecter le choix fait par ceux qui ont déjà écrit sur ce sujet, Bourget, Hoüel (pour ne parler que des Français), et d'introduire, au lieu de la dernière propriété, la suivante, qui lui équivaut d'ailleurs :

$$a + (b + c) = a + b + c \quad \text{pour l'addition,}$$
$$a \times (b \times c) = a \times b \times c \quad \text{pour la multiplication.}$$

En d'autres termes, on apprend à ajouter une somme, à multiplier par un produit et à multiplier par une somme, et tous les théorèmes sur les opérations n'auront pas d'autre but que d'apprendre à combiner ces opérations : retrancher une somme, ajouter une différence, multiplier par un quotient, etc.

Enfin il est nécessaire, pour définir l'addition algébrique, ou plutôt la soustraction, de dire : si

$$a + b = a + b',$$

il en résulte

$$b = b';$$

et, pour définir la multiplication algébrique, ou plutôt la division : si

$$a \times b = a \times b',$$

il en résulte

$$b = b'.$$

C'est-à-dire la soustraction algébrique et la division algébrique n'ont chacune qu'une solution.

Nous possédons maintenant un ensemble d'opérations auxquelles pourront être soumis les nombres entiers, les nombres fractionnaires et tous les objets, nouveaux ou non, qu'il nous plaira d'introduire.

Définition des quantités négatives ou positives. — J'appelle *quantité positive* le binôme $0 + a$ que j'écris pour abréger $+a$, quantité négative le binôme o — a que j'écris $-a$. Il est facile alors de vérifier que

$$\begin{aligned} b+(+a) &= b+a, \\ b+(-a) &= b-a, \\ b-(+a) &= b-a, \\ b-(-a) &= b+a, \\ (+a)\times(+b) &= +ab, \end{aligned}$$

et ainsi pour toutes les règles des signes.

Si a désigne un nombre, la quantité positive ou négative est dite *nombre positif* ou *négatif*, et l'Arithmétique a à voir si l'emploi de ce symbole lui est utile.

Si a désigne une longueur, la quantité positive ou négative est dite *segment*, et la Géométrie a à voir si l'emploi de ce symbole lui est utile.

P. S. — Je m'aperçois que j'ai seulement signalé ce qui me sépare de M. Fouché. L'approbation de tout le reste en résulte évidemment.