NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. MICHEL

Transformation omaloïdale des quadriques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 192-224

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__192_0>

TRANSFORMATION OMALOÏDALE DES QUADRIQUES;

PAR M. P. MICHEL,
Lieutenant du Génie.

I. — TRANSFORMATION DE L'ELLIPSOÏDE.

1° *Définitions et résultats.*

1. Les surfaces *omaloïdes* ont été étudiées par Sylvester (*Cambridge and Dublin Math. Journal*, t. VI), et par Cremona (*Rendiconti del reale Istituto lombardo*, mai 1871). Après eux, M. Picart les a aussi considérées dans sa Thèse de Mathématiques (1877), où il les désigne sous le nom de surfaces *unicursales*.

Je rappellerai brièvement la définition élémentaire de ces surfaces :

Si l'on suppose qu'un point (x, y, z) quelconque d'une surface Σ puisse être représenté par les formules

$$(1) \qquad x = \frac{\varphi_1}{\varphi}, \qquad y = \frac{\varphi_2}{\varphi}, \qquad z = \frac{\varphi_3}{\varphi},$$

φ, φ_1, φ_2, φ_3 étant des fonctions entières de deux lettres t et θ, et qu'inversement on puisse déduire des formules précédentes,

$$(2) \qquad t = \frac{\psi_1}{\psi}, \qquad \theta = \frac{\psi_2}{\psi},$$

ψ, ψ_1 et ψ_2 étant des fonctions entières des lettres x, y, z, on dira que Σ est une surface *omaloïde*.

Les surfaces omaloïdes jouissent de la propriété de pouvoir être représentées point par point sur un plan.

En effet, si l'on imagine dans un plan deux axes ωt

et $\omega\theta$, les formules (1) montrent qu'à tout point (t, θ) du plan correspond un point (x, y, z) de la surface; inversement, les formules (2) indiquent qu'à un point (x, y, z) de la surface ne correspond qu'un seul point (t, θ) du plan considéré.

2. M. de Longchamps, dans son *Journal de Mathématiques spéciales* (1884), a montré que les quadriques à centre sont des surfaces omaloïdes; que l'on peut représenter les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

par les formules

$$\frac{x}{a} = \frac{1 - t^2 - \theta^2}{1 + t^2 + \theta^2}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{2t}{1 + t^2 + \theta^2}, \qquad \frac{z}{c} = \frac{2\theta}{1 - t^2 + \theta^2},$$

d'où l'on déduit les formules inverses

$$t = \frac{ay}{b(a + x)}, \qquad \theta = \frac{az}{c(a + x)}.$$

De même un point de l'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

peut être représenté par les formules

$$\frac{x}{a} = \frac{1 + t\theta}{1 - t\theta}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{t - \theta}{1 - t\theta}, \qquad \frac{z}{c} = \frac{t + \theta}{1 + t\theta},$$

desquelles on déduit

$$t = \frac{a(bz + cy)}{bc(a + x)}, \qquad \theta = \frac{a(bz - cy)}{bc(a + x)}.$$

Enfin, pour l'hyperboloïde à deux nappes, les formules analogues sont

$$\frac{x}{a} = \frac{1 - t^2 - \theta^2}{2\theta}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{t}{\theta}, \qquad \frac{z}{c} = \frac{1 + t^2 + \theta^2}{2\theta}.$$

M. de Longchamps a considéré principalement l'ellipsoïde dans son Étude. Il a montré qu'à la droite de l'infini du plan $t\omega\theta$ correspond le sommet A′ de l'ellipsoïde, qu'il a appelé *point central* de la transformation omaloïdale.

Il a fait voir qu'une transformation homographique permet de prendre pour *point central* de la transformation omaloïdale un point quelconque de la surface de l'ellipsoïde.

Les résultats principaux qu'il a énoncés sont les suivants :

1° *A toute droite du plan $t\omega\theta$ correspond une ellipse tracée sur l'ellipsoïde et passant par le sommet* A′.

2° *Si la droite du plan $t\omega\theta$ passe à l'origine ω, l'ellipse correspondante passe aux deux sommets* A *et* A′.

3° *A tout cercle du plan $t\omega\theta$ correspond une ellipse tracée sur l'ellipsoïde.*

4° *A deux droites parallèles du plan $t\omega\theta$ correspondent deux ellipses dont les plans ont pour traces, sur* YOZ, *deux droites parallèles.*

5° *A deux droites rectangulaires du plan $t\omega\theta$ correspondent deux ellipses dont les plans coupent* YOZ *suivant deux droites ayant des directions conjuguées, relativement à l'ellipse principale située dans ce plan.*

Le plan $t\omega\theta$ est appelé le *plan fondamental* de la transformation.

3. Je me propose de poursuivre cette étude; je ferai d'abord la remarque suivante :

A toute courbe C tracée sur l'ellipsoïde correspond une courbe Γ du plan fondamental.

La tangente en un point (t, θ) de la courbe Γ correspondra à une ellipse tracée sur l'ellipsoïde, passant par le sommet A′ et tangente à la courbe C au point (x, y, z) qui correspond au point (t, θ) du plan fondamental.

4. J'établirai aussi la propriété suivante :

Si l'on considère n points du plan fondamental (t_1, θ_1), (t_2, θ_2), ..., (t_n, θ_n), à chacun de ces points correspond un point de l'ellipsoïde dont les coordonnées sont données par les formules

$$x = a\frac{1 - t^2 - \theta^2}{1 + t^2 + \theta^2}, \qquad y = \frac{2bt}{1 + t^2 + \theta^2}, \qquad z = \frac{2c\theta}{1 + t^2 + \theta^2}.$$

Je joins les n points de l'ellipsoïde au sommet A′; les équations des droites ainsi déterminées seront respectivement

$$\frac{x + a}{a} = \frac{y}{bt_1} = \frac{z}{c\theta_1},$$
$$\frac{x + a}{a} = \frac{y}{bt_2} = \frac{z}{c\theta_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\frac{x + a}{a} = \frac{y}{bt_n} = \frac{z}{c\theta_n}.$$

Ces droites rencontrent le plan YOZ en des points ayant pour coordonnées

$$\begin{array}{llll} y = bt_1, & y = bt_2, & \ldots, & y = bt_n, \\ z = c\theta_1, & z = c\theta_2, & \ldots, & z = c\theta_n. \end{array}$$

Si l'on prend le centre des moyennes distances des n points du plan fondamental

$$t = \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}{n}, \qquad \theta = \frac{\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n}{n},$$

et qu'on joigne le point correspondant de l'ellipsoïde au sommet A′, on déterminera ainsi une droite qui rencontrera le plan YOZ en un point ayant pour coordonnées

$$y = b\,\frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}{n}, \qquad z = c\,\frac{\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n}{n},$$

et l'on voit que ce point est le centre des moyennes distances des n points qu'on a précédemment déterminés de la même manière sur le plan YOZ.

En particulier, si les n points du plan fondamental sont en ligne droite, les points correspondants de l'ellipsoïde sont sur une ellipse passant au sommet A′, et les points du plan YOZ sont, par conséquent, en ligne droite; la propriété établie plus haut s'applique, dans ce cas, et elle nous sera utile dans la suite de cette étude.

2° *Quartiques coniques.*

1. Je considère une conique du plan fondamental, ayant pour équation

$$(1) \qquad At^2 + 2Bt\theta + C\theta^2 + 2Dt + 2E\theta + F = 0,$$

et je cherche quelle est la courbe située sur l'ellipsoïde qui lui correspond; je remplace pour cela t et θ par leurs valeurs

$$t = \frac{ay}{b(a+x)}, \qquad \theta = \frac{az}{c(a+x)},$$

et il vient après réduction

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} & F\left(1 + \frac{x}{a}\right)^2 + A\frac{y^2}{b^2} + C\frac{z^2}{c^2} + 2B\frac{y}{b}\frac{z}{c} \\ & \qquad + 2\left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(E\frac{z}{c} + D\frac{y}{b}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation représente un cône du second ordre ayant son sommet au point A′$(-a, 0, 0)$ de l'ellipsoïde ; la courbe d'intersection des deux surfaces est une quartique gauche.

Donc :

Toute conique du plan fondamental correspond à une quartique gauche, intersection de l'ellipsoïde par un cône du second ordre ayant son sommet au point central de la transformation omaloïdale.

Inversement, si dans l'équation (2) d'un cône ayant son sommet en A' on remplace x, y et z par leurs valeurs

$$x = a\,\frac{1-t^2-\theta^2}{1+t^2+\theta^2}, \qquad y = \frac{2bt}{1+t^2-\theta^2}, \qquad z = \frac{2c\theta}{1+t^2+\theta^2},$$

on retrouve l'équation (1). On aura donc la propriété réciproque :

Tout cône du second ordre, ayant son sommet au point central de la transformation, coupe l'ellipsoïde suivant une quartique gauche qui se transforme en une conique.

Toutes les quartiques ainsi déterminées ont un point double réel ou isolé, au sommet A' de l'ellipsoïde ; je les désignerai sous le nom de *quartiques coniques* pour les distinguer des quartiques d'un autre genre que j'aurai à considérer dans la suite de ce travail.

2. Le centre de la conique (1) a pour coordonnées

$$t_1 = \frac{CD - BE}{B^2 - AC}, \qquad \theta_1 = \frac{AE - BD}{B^2 - AC}.$$

Je joins le point correspondant de l'ellipsoïde au sommet A' ; j'obtiens ainsi une droite ayant pour équations

$$\frac{x+a}{a} = \frac{y}{bt_1} = \frac{z}{c\theta_1} \tag{3}$$

et dont le plan diamétral dans le cône (2) est

$$F\frac{x}{a} + D\frac{y}{b} + E\frac{z}{c} + F + t_1\left(D\frac{x}{a} + A\frac{y}{b} + B\frac{z}{c} + D\right) + \theta_1\left(E\frac{x}{a} + B\frac{y}{b} + C\frac{z}{c} + E\right) = 0.$$

Si l'on remplace dans cette équation t_1 et θ_1 par les valeurs indiquées plus haut, il vient après simplification

$$x + a = 0.$$

Le plan diamétral de la droite (3) est donc parallèle au plan YOZ. Par conséquent :

Le centre de la conique (1) *correspond au point où le diamètre conjugué des plans parallèles à* YOZ *dans le cône* (2), *rencontre l'ellipsoïde.*

J'appellerai ce point *centre de la quartique conique.*

3. Si l'on coupe l'ellipse (1) du plan fondamental par une série de cordes parallèles à une direction (D), la quartique conique correspondante sera coupée par une série d'ellipse (Γ) passant au sommet A′ de l'ellipsoïde et dont les plans coupent YOZ suivant des droites parallèles à une certaine direction (γ).

Chacune des ellipses (Γ) rencontrera la quartique conique en deux points. D'après la propriété établie plus haut (I), le diamètre conjugué (D′) des cordes de direction (D) par rapport à la conique du plan fondamental correspondra à une ellipse (Γ′) dont le plan coupera YOZ suivant une droite dont la direction (γ′) sera conjuguée de (γ) par rapport à la conique (*e*) d'intersection du cône (2) par le plan YOZ.

Je désignerai cette ellipse (Γ′) sous le nom d'*ellipse diamétrale conjuguée de la direction* (Γ).

On peut immédiatement énoncer alors la propriété suivante :

Toutes les ellipses diamétrales d'une quartique conique passent par le centre de cette courbe.

En particulier, les deux axes de la conique (1) correspondent à deux ellipses passant au sommet A′ et dont les plans coupent YOZ suivant deux droites de directions conjuguées par rapport à l'ellipse principale de l'ellipsoïde située dans ce plan ; mais, d'après ce qui précède, ces deux directions sont aussi conjuguées par rapport à la conique (e) du cône (2). J'appellerai *ellipses principales de la quartique conique* celles qui correspondent aux deux axes de la conique (1).

Et l'on pourra dire que :

Si l'on considère un cône du deuxième degré ayant son sommet au sommet A′ *de l'ellipsoïde et qui détermine sur cette surface une quartique conique, les plans des deux ellipses principales de cette courbe gauche coupent le plan* YOZ *suivant deux directions conjuguées communes aux deux coniques déterminées par ce plan dans le cône et dans l'ellipsoïde.*

4. 1° Lorsque la conique (1) du plan fondamental est une ellipse, la quartique conique correspondante a un point double isolé : le point A′ sommet de l'ellipsoïde.

2° Si la conique (1) est une hyperbole, le point double A′ est réel : il correspond d'ailleurs aux deux points à l'infini de l'hyperbole. Les asymptotes, étant tangentes à l'hyperbole à l'infini, correspondent à deux ellipses passant en A′ et tangentes aux deux branches de la quartique conique; ces deux ellipses passent au centre de la quartique.

En particulier, pour une hyperbole équilatère, les plans des deux ellipses tangentes au point double A′ coupent le plan YOZ suivant deux directions conjuguées par rapport à l'ellipse principale de l'ellipsoïde située dans ce plan.

3° Enfin si la conique (1) est une parabole, les deux tangentes à l'infini sont confondues; la conique d'intersection du cône (2) par le plan YOZ est une parabole; ce cône a donc une génératrice parallèle à YOZ : la quartique conique correspondante a un point de rebroussement en A′. Dans ce cas, toutes les ellipses diamétrales de la quartique coupent YOZ suivant des droites parallèles.

5. On voit, d'après ce qui précède, que les quartiques coniques situées sur l'ellipsoïde sont tout à fait assimilables aux coniques du plan, et que, des nombreuses propriétés de celles-ci, on pourra déduire les propriétés de celles-là.

Une conique du plan étant déterminée par cinq points du plan :

Toute quartique conique est déterminée par cinq points de l'ellipsoïde.

Si l'on se donne quatre points du plan, on sait que le lieu des centres des coniques passant par ces points est une conique; donc :

Le lieu des centres des quartiques coniques passant par quatre points de l'ellipsoïde est une quartique conique.

A chaque propriété des coniques correspond donc une propriété des quartiques coniques; mon but n'est pas d'énoncer toutes ces propriétés, il suffit d'indiquer cette corrélation entre les deux espèces de courbes pour qu'on puisse en tirer toutes les conséquences logiques.

Je me bornerai à quelques remarques générales.

Remarques. — Lorsque la conique (1) passe à l'origine ω du plan fondamental, la quartique conique correspondante passe au sommet A de l'ellipsoïde; si la conique (1) a son centre en ω, la quartique a son centre en A.

Si la conique (1) a ses deux axes parallèles à ωt et $\omega\theta$, la quartique conique correspondante a deux ellipses principales dont les plans sont parallèles aux axes OY et OZ de l'ellipsoïde.

Quand le centre de la conique (1) se déplace sur une droite ou sur un cercle, le centre de la quartique correspondante décrit une ellipse, qui, dans le premier cas, passe au sommet A'.

Si la conique (1) reste tangente à une droite, à un cercle ou à une conique, la quartique conique aura pour enveloppe dans les cas correspondants : une ellipse passant en A', une ellipse ou une quartique conique.

6. La tangente et la normale en un point de la conique (1) ont pour correspondantes deux ellipses dont l'une est tangente à la quartique conique, qui passent en A' et qui coupent le plan YOZ suivant deux directions conjuguées par rapport à l'ellipse principale de l'ellipsoïde située dans ce plan. Je désignerai ces deux ellipses sous le nom d'*ellipse tangente*, et *ellipse normale* en un point de la quartique.

Le cercle osculateur en un point de la conique (1) est le transformé d'une *ellipse osculatrice* à la quartique conique au point correspondant. Le plan de cette ellipse osculatrice coupe YOZ suivant une droite parallèle à la droite d'intersection du plan de *l'ellipse tangente* avec YOZ.

Le centre de courbure de la conique (1) est le transformé d'un point situé sur l'*ellipse normale*, à l'intersection de cette ellipse avec la droite qui joint le point A′ au pôle du plan de l'ellipse osculatrice (*voir* G. DE LONGCHAMPS, *J. S.*, 1884).

7. A un cercle bitangent à la conique (1) correspond une ellipse bitangente à la quartique conique. Dans le cas où ce cercle se réduit à un point, c'est un foyer de la conique (1). De même, on appellera *foyer* d'une quartique conique, toute ellipse-point bitangente à cette quartique.

D'après cela, une quartique conique a quatre foyers situés deux à deux sur ses ellipses principales.

A un système de coniques homofocales du plan fondamental correspondra un système de quartiques coniques homofocales sur l'ellipsoïde. On pourra énoncer les propriétés suivantes :

Si l'on considère un système de quartiques coniques homofocales, par tout point de l'ellipsoïde passent deux quartiques du système.

L'une de ces quartiques a un point double isolé au point A′ ; *l'autre a un point double réel en ce point.*

En leurs points de rencontre, l'ellipse tangente à l'une de ces deux quartiques est l'ellipse normale à l'autre et vice versa.

3° *Quartiques gauches.*

1. Les quartiques coniques ne constituent qu'un cas particulier des quartiques gauches générales, obtenues

par l'intersection de l'ellipsoïde avec une surface du deuxième ordre quelconque.

Je vais donc chercher quelle est, sur le plan fondamental, la transformée de la quartique gauche d'intersection de l'ellipsoïde

$$(3)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

avec une quadrique quelconque

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & A\frac{x^2}{a^2} - A'\frac{y^2}{b^2} + A''\frac{z^2}{c^2} + 2B\frac{yz}{bc} + 2B'\frac{zx}{ca} + 2B''\frac{xy}{ab} \\ & \qquad\qquad + 2C\frac{x}{a} + 2C'\frac{y}{b} + 2C''\frac{z}{c} + D = 0. \end{aligned} \right.$$

Je n'ai qu'à remplacer, dans cette équation (4), x, y, z par leurs valeurs indiquées plus haut, et j'obtiens

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} & (A - 2C + D)(t^2 + \theta^2)^2 \\ & \quad - 4[(B'' - C') + (B' - C'')\theta](t^2 + \theta^2) \\ & \quad + (4A' - 2A + D)t^2 + 8Bt\theta + (4A'' - 2A + D)\theta^2 \\ & \qquad + 4(B'' - C')t + 4(B' - C'')\theta + A + 2C + D = 0, \end{aligned} \right.$$

équation d'une quartique plane bicirculaire ou cyclique plane.

Inversement, si l'on considère une cyclique plane

$$M(t^2 + \theta^2)^2 - 4(Nt - P\theta)(t^2 + \theta^2) + \varphi(t, \theta) = 0,$$

où $\varphi(t, \theta)$ est une fonction du deuxième degré, et qu'on remplace dans son équation t et θ par leurs valeurs

$$t = \frac{ay}{b(a + x)}, \qquad \theta = \frac{az}{c(a + x)},$$

il vient

$$M\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 - 4\left(N\frac{y}{b} - P\frac{z}{c}\right)\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)$$
$$+ \left(1 + \frac{x}{a}\right)^2 \psi(y, z) = 0.$$

où $\psi(y, z)$ est une fonction du deuxième degré; mais, d'après l'équation (3),

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}.$$

L'équation précédente s'écrira donc

$$M\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^2-4\left(N\frac{y}{b}+P\frac{z}{c}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)+\left(1+\frac{x}{a}\right)^2\psi(y,z)=0,$$

et, en supprimant le facteur $\left(1+\frac{x}{a}\right)^2$,

$$M\left(1-\frac{x}{a}\right)^2-4\left(N\frac{y}{b}+P\frac{z}{c}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)+\psi(y,z)=0,$$

équation d'une surface du second ordre.

On conclut donc de ce qui précède que :

Toute quartique gauche située sur l'ellipsoïde se transforme suivant une cyclique plane, et réciproquement.

2. L'équation (5) ne représente une cyclique plane que si l'expression $A-2C+D$ n'est pas nulle. Si $A-2C+D=0$, l'équation (5) représente une cubique circulaire; dans ce cas, si l'on cherche l'intersection de la quadrique (4) avec l'axe des x, on trouve la solution

$$x=-a.$$

La quadrique (4) passe donc au point A': par suite :

Toute quartique gauche de l'ellipsoïde, passant au pôle de la transformation omaloïdale, se transforme suivant une cubique circulaire du plan fondamental.

3. Je pose

$$(6)\qquad \alpha = \frac{B'' - C'}{A - 2C - D}, \qquad \beta = \frac{B' - C'}{A - 2C + D}.$$

L'équation (5) s'écrit alors

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &(t^2-\theta^2)^2 - 4(\alpha t + \beta\theta)(t^2+\theta^2) + \frac{4(A' - 2A + D)}{A - 2C + D}\,t^2 \\ &\quad + \frac{8B}{A - 2C - D}\,t\theta + \frac{4(A'' - 2A + D)}{A - 2C + D}\,\theta^2 \\ &\qquad\qquad + 4\alpha t + 4\beta\theta - \frac{A + 2C - D}{A - 2C + D} = 0 \end{aligned} \right.$$

et représente une cyclique ayant pour *centre* le point dont les coordonnées sont α et β (1).

J'appellerai *centre* de la quartique gauche le point qui, sur l'ellipsoïde, correspond au centre de la cyclique du plan fondamental. Voyons comment on peut déterminer ce *centre*. Pour cela, je considère le plan polaire du point A' par rapport à la quadrique (4) : ce plan a pour équation

$$(8)\qquad (C - A)\frac{x}{a} + (C' - B'')\frac{y}{b} + (C' - B')\frac{z}{c} + D - C = 0$$

et je cherche son pôle par rapport à l'ellipsoïde. Le plan polaire du point (x_0, y_0, z_0) par rapport à l'ellipsoïde a pour équation

$$(9)\qquad \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} - 1 = 0.$$

L'identification des équations (8) et (9) conduit aux

(1) Le mot *centre* est employé ici dans le sens que lui a donné M. Humbert dans son *Étude sur les cyclides* (*Journal de l'École Polytechnique*, LV^e Cahier 1885).

égalités

$$x_0 = -a\,\frac{C - A}{D - C},$$

$$y_0 = -b\,\frac{C' - B''}{D - C},$$

$$z_0 = -c\,\frac{C'' - B'}{D - C}.$$

La droite qui joint le sommet A′ de l'ellipsoïde au point (x_0, y_0, z_0) a pour équation

$$\frac{x + a}{a(A - 2C + D)} = \frac{y}{b(B'' - C')} = \frac{z}{c(B' - C'')},$$

ou, d'après les relations (6),

$$\frac{x + a}{a} = \frac{y}{b\alpha} = \frac{z}{c\beta}$$

et l'on voit qu'elle coïncide avec la droite qui joint le point A′ au centre de la quartique gauche. Donc :

Le centre d'une quartique gauche déterminée sur l'ellipsoïde par une quadrique Q s'obtient en joignant le sommet A′ au pôle, par rapport à l'ellipsoïde, du plan polaire du point A′ par rapport à la quadrique Q et en prenant le point d'intersection de la droite ainsi déterminée avec l'ellipsoïde.

4. L'équation (8) du plan polaire de A′ par rapport à la quadrique (4) peut s'écrire

$$\frac{C - A}{A - 2C + D}\,\frac{x}{a} - \alpha\frac{y}{b} - \beta\frac{z}{c} - \frac{D - C}{A - 2C - D} = 0.$$

Lorsque α et β sont fixes, on voit que ce plan coupe YOZ suivant une droite ayant une direction fixe. Donc :

Les plans polaires du sommet A′ par rapport à toutes les quadriques qui déterminent sur l'ellipsoïde des quartiques gauches de même centre coupent le *plan* YOZ *suivant des droites parallèles à une direction fixe.*

En particulier, si $\alpha = \beta = 0$, le plan polaire du sommet A' est parallèle au plan YOZ.

5. Je suppose que le centre (α, β) de la cyclique du plan fondamental se déplace sur une droite

$$mt + n\theta + p = 0.$$

On peut écrire l'équation (8)

$$\frac{C - A}{A - 2C + D}\left(\frac{x}{a} + 1\right) - \alpha\frac{y}{b} - \beta\frac{z}{c} + 1 = 0.$$

D'autre part on a

$$m\alpha + n\beta + p = 0;$$

par suite, l'équation précédente devient

$$\frac{C - A}{A - 2C + D}\left(\frac{x}{a} + 1\right) - \alpha\left(\frac{y}{b} + \frac{m}{p}\right) - \beta\left(\frac{z}{c} + \frac{n}{p}\right) = 0.$$

Le plan polaire du sommet A' passe donc par le point fixe $P\left(-a, \frac{-bm}{p}, \frac{-cn}{p}\right)$.

Mais, dans ce cas, le centre de la quartique gauche décrit une ellipse passant par A' et dont le plan a pour équation

$$m\frac{y}{b} + n\frac{z}{c} + p\left(1 + \frac{x}{a}\right) = 0,$$

et c'est justement le plan polaire du point P par rapport à l'ellipsoïde. Donc :

Lorsque des quadriques Q *déterminent sur l'ellipsoïde des quartiques gauches dont les centres sont sur une ellipse* E *passant par le sommet* A', *les plans polaires de ce point* A' *par rapport à toutes ces qua-*

driques passent par un point fixe P *qui est le pôle du plan de l'ellipse* E *par rapport à l'ellipsoïde.*

6. On pourra donc assimiler les quartiques gauches aux cycliques planes, et déduire leurs propriétés de celles de ces dernières courbes; l'énumération en serait trop longue.

Je me bornerai à citer les plus importantes :

On sait que le lieu des centres des coniques inscrites à une cyclique plane est une hyperbole que l'on nomme conique principale de la cyclique; *cette conique principale passe au centre de la cyclique* (¹).

De même :

Le lieu des centres des quartiques coniques inscrites à une quartique gauche est une quartique conique à point double réel, qui passe au centre de la quartique gauche. On la nommera quartique conique principale de la quartique gauche.

Enfin on peut imaginer pour les quartiques gauches sur l'ellipsoïde un mode de génération analogue à celui indiqué par Casey pour les cycliques planes :

Imaginons une ellipse fixe (E) *sur l'ellipsoïde, et une série d'autres ellipses* (*e*) *qui coupent* (E) *de façon que les plans des ellipses tangentes à* (*e*) *et* (E) *en leurs points de rencontre déterminent sur* YOZ *deux directions conjuguées par rapport à l'ellipse principale de l'ellipsoïde. Si nous supposons, de plus, que les centres des ellipses* (*e*) *sont sur une quartique conique* (Γ), *l'enveloppe des ellipses* (*e*) *sera une quartique gauche ayant pour centre le centre de* (Γ).

(¹) *Voir* mon étude : *Sur les cycliques planes* (*Journal de Mathématiques speciales*, de Longchamps, 1892-93).

Comme pour les cycliques planes, il y aura quatre modes de génération semblables pour les quartiques gauches ([1]).

Les quatre quartiques coniques (Γ) *sont homofocales.*

Enfin, si l'on définit toujours le *foyer* d'une quartique sur l'ellipsoïde comme on l'a fait plus haut, on pourra dire que :

A un système de cycliques homofocales du plan fondamental correspond un système de quartiques gauches homofocales sur l'ellipsoïde.

On pourra désigner les quatre ellipses (E) sous le nom d'*ellipses directrices de la quartique gauche;* et les quartiques coniques (Γ) sous le nom de *quartiques focales.*

De même que pour les cycliques planes on dira que :

Sur l'ellipsoïde une quartique gauche a seize foyers. Ces seize foyers sont situés sur quatre ellipses.

Ce théorème est analogue à celui du Dr Hart.

Si l'on appelle *pôles* de la quartique gauche les centres des ellipses directrices E, on pourra énoncer la propriété suivante :

Pour chacun des pôles d'une quartique gauche, on peut tracer deux ellipses passant par le sommet A' *et bitangentes à la quartique.*

Enfin l'on peut faire une classification des quartiques

([1]) Voir *Journal de Mathematiques speciales* de Longchamps, *loc. cit.*

gauches, analogue à celle des cycliques planes, en se basant sur la forme de leur quadrique principale [1].

7. Je terminerai cette étude en appliquant ce qui précède à la transformation des lignes de courbure de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

On sait que ces lignes sont déterminées par les intersections de cet ellipsoïde avec les surfaces homofocales de la série

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0,$$

où λ est un paramètre variable.

Des deux équations précédentes, on déduit

$$\frac{x^2}{a^2(a^2+\lambda)}+\frac{y^2}{b^2(b^2+\lambda)}+\frac{z^2}{c^2(c^2+\lambda)}=0,$$

et si l'on remplace x, y, z par leurs valeurs en fonction de t et θ, il vient

$$(10)\qquad \frac{(1-t^2-\theta^2)^2}{a^2+\lambda}+\frac{4t^2}{b^2+\lambda}+\frac{4\theta^2}{c^2+\lambda}=0,$$

équation qui représente des cycliques ayant pour centre l'origine ω du plan fondamental et pour axes de symétrie ωt et $\omega\theta$.

Les lignes de courbure de l'ellipsoïde ont donc leur *centre* au sommet A, et leur *quartique conique principale* se décompose en deux ellipses qui sont les sections principales de l'ellipsoïde situées dans les plans XOY et XOZ. Donc :

Les lignes de courbure de l'ellipsoïde se transfor-

---

[1] Voir *Journal de Mathematiques spéciales, loc. cit.*

ment suivant des cycliques planes à deux axes, ayant même centre et mêmes axes de symétrie.

La théorie des cycliques planes indique que l'origine ω est un pôle double des cycliques (10); les deux autres pôles sont à l'infini. Par suite :

Les lignes de courbure de l'ellipsoïde ont pour pôles doubles les sommets A *et* A' *de la surface.*

Les cycliques (10) ont pour cercles directeurs les deux axes ωt et $\omega\theta$ et les deux cercles

$$t^2 + \theta^2 = \pm 1.$$

En transformant cette propriété :

Les lignes de courbure ont pour coniques directrices les quatre ellipses déterminées sur l'ellipsoïde par les trois plans principaux de cette surface et par le plan de l'infini.

Enfin on verrait de même que :

Les quartiques focales des lignes de courbure sont les deux ellipses principales XOY *et* XOZ *de l'ellipsoïde et deux quartiques coniques.*

Ces deux quartiques coniques correspondent aux coniques focales des cycliques (10), qui ont respectivement pour équations

$$\frac{t^2}{\dfrac{a^2-b^2}{b^2+\lambda}} + \frac{\theta^2}{\dfrac{a^2-c^2}{c^2+\lambda}} + 1 = 0$$

et

$$\frac{t^2}{\dfrac{a^2+\lambda}{b^2+\lambda}} + \frac{\theta^2}{\dfrac{a^2+\lambda}{c^2+\lambda}} + 1 = 0.$$

Les lignes de courbure, étant des quartiques gauches, sont susceptibles d'un mode de génération analogue; il est facile de l'imaginer d'après ce qui précède.

II. — Transformation de l'hyperboloïde a une nappe.

1° *Sections planes.*

1. La considération des génératrices qui passent par un point de la surface, et dont les équations sont

$$(G)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{x}{a}-1\right)=t\left(\dfrac{z}{c}-\dfrac{y}{b}\right), \\ t\left(\dfrac{x}{a}+1\right)=\dfrac{z}{c}+\dfrac{y}{b} \end{cases}$$

et

$$(G')\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a}-1=\theta\left(\dfrac{z}{c}+\dfrac{y}{b}\right), \\ \theta\left(\dfrac{x}{a}+1\right)=\dfrac{z}{c}-\dfrac{y}{b}, \end{cases}$$

conduit aux formules de transformation citées plus haut

$$\frac{x}{a}=\frac{1+t\theta}{1-t\theta},\qquad \frac{y}{b}=\frac{t-\theta}{1-t\theta},\qquad \frac{z}{c}=\frac{t+\theta}{1-t\theta},$$

d'où l'on déduit les formules inverses

$$t=\frac{a(bz+cy)}{bc(x+a)},\qquad \theta=\frac{a(bz-cy)}{bc(x+a)}.$$

Ces formules montrent immédiatement que les génératrices du système (G) seront représentées sur le plan fondamental par des parallèles à l'axe ωt : celles du système (G′) par des parallèles à l'axe $\omega\theta$.

L'origine ω du plan fondamental correspond au sommet A de l'hyperboloïde; les deux axes ωt et $\omega\theta$ sont les droites transformées des deux génératrices passant en A. On peut donc énoncer la propriété suivante :

Si, par un point m du plan fondamental, on mène des parallèles aux axes ωt et $\omega\theta$, ces deux droites sont les transformées des deux génératrices de l'hyperboloïde qui passent au point M *correspondant au point m du plan fondamental.*

2. Je cherche la courbe transformée de la section de l'hyperboloïde par le plan

$$\alpha\frac{x}{a}+\beta\frac{y}{b}+\gamma\frac{z}{c}+\delta=0. \tag{1}$$

Les formules de transformation conduisent à l'équation

$$(\alpha-\delta)t\theta+(\beta+\gamma)t+(\gamma-\beta)\theta+\alpha+\delta=0; \tag{2}$$

elle représente une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes ωt et $\omega\theta$.

Le centre de cette hyperbole a pour coordonnées

$$t=\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\delta},\qquad \theta=\frac{\beta+\gamma}{\alpha-\delta},$$

et l'on vérifie aisément qu'il correspond au point de l'hyperboloïde obtenu en joignant le sommet A′ de cette surface au pôle du plan (1). Donc :

Toute section plane de l'hyperboloïde à une nappe se transforme suivant une hyperbole équilatère, dont les asymptotes sont parallèles aux axes ωt et $\omega\theta$.

J'ai supposé $\alpha-\delta\neq 0$; dans les cas où $\alpha-\delta=0$, la transformée devient une droite; alors le plan sécant a pour équation

$$\alpha\left(\frac{x}{a}+1\right)+\beta\frac{y}{b}+\gamma\frac{z}{c}=0.$$

Par suite :

Toute section plane passant au sommet A′ de l'hyperboloïde se transforme suivant une droite du plan fondamental.

3. On déduit immédiatement des formules de transformation les résultats suivants :

1° *Les sections principales de l'hyperboloïde sont représentées sur le plan fondamental comme suit :*

YOZ par l'hyperbole équilatère....	$t\theta+1=0$
ZOX par la droite................	$t+\theta=0$
XOY par la droite................	$t-\theta=0$

2° *Les sections parallèles à* YOZ *se transforment suivant des hyperboles équilatères ayant leur centre à l'origine.*

Les sections parallèles à $\left|\begin{matrix}\text{ZOX}\\ \text{XOY}\end{matrix}\right|$ *sont représentées par des hyperboles dont le centre est sur la bissectrice* $\left|\begin{matrix}t-\theta=0\\ t-\theta=0\end{matrix}\right|$ *et passant par deux points fixes* $\left|\begin{matrix}\text{réels}\\ \text{imaginaires}\end{matrix}\right|$ *situés sur la droite* $\left|\begin{matrix}t-\theta=0\\ t+\theta=0\end{matrix}\right|$.

3° *Enfin, toute section passant par l'axe* AA′ *de l'hyperboloïde se transforme suivant une droite passant à l'origine* ω.

On pourra, comme pour l'ellipsoïde, vérifier facilement les propriétés suivantes :

Deux droites parallèles correspondent à des sections passant par A′, *dont les plans coupent* YOZ *suivant deux droites parallèles.*

Deux droites rectangulaires, à des sections passant par A′, *dont les plans coupent* YOZ *suivant deux directions conjuguées par rapport à l'hyperbole principale située dans ce plan.*

4. Les formules de transformation montrent que, lorsque

$$(\mathrm{H}) \qquad t\theta - 1 = 0,$$

les coordonnées x, y, z deviennent infinies. Donc :

Les points à l'infini de l'hyperboloïde sont représentés sur le plan fondamental par l'hyperbole équilatère (H).

De là résultent les propriétés suivantes :

1° *Deux droites parallèles aux axes* ωt *et* $\omega\theta$ *et se coupant sur l'hyperbole* (H) *représentent deux génératrices parallèles de système différent sur l'hyperboloïde.*

2° *Toute courbe du plan fondamental rencontrant en un point* m *l'hyperbole* (H) *est la transformée d'une courbe de l'hyperboloïde ayant un point à l'infini sur cette surface. La direction asymptotique sera celle des deux génératrices parallèles dont les transformées passent au point* m.

3° *Toute courbe du plan fondamental tangente à l'hyperbole* (H) *est la transformée d'une courbe de l'hyperboloïde ayant une branche infinie parabolique.*

En appliquant ces deux derniers résultats aux sections planes on voit que la section sera *elliptique* si l'hyperbole (2) ne rencontre pas (H); *hyperbolique* si l'hyperbole (2) rencontre (H) en deux points distincts; *parabolique* si elle lui est tangente.

5. Je pose

$$t = k\theta$$

et je suppose que le point (t, θ) du plan fondamental s'éloigne à l'infini dans cette direction; les formules de transformation deviennent

$$\frac{x}{a} = \frac{1 + k\theta^2}{1 - k\theta^2}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{\theta(k-1)}{1 - k\theta^2}, \qquad \frac{z}{c} = \frac{\theta(k+1)}{1 - k\theta^2}$$

et, si θ croît au delà de toute limite, on a

$$\lim \frac{x}{a} = -1, \qquad \lim \frac{y}{b} = 0, \qquad \lim \frac{z}{c} = 0.$$

Il résulte de là que :

Au sommet A′ *de l'hyperboloïde correspond la droite de l'infini du plan fondamental.*

Or, si l'on considère les points à l'infini sur ωt et $\omega\theta$, ces points sont les transformés des points à l'infini des deux génératrices de l'hyperboloïde passant en A′, puisqu'ils sont situés sur l'hyperbole (H).

On peut donc dire que :

Aux deux génératrices de l'hyperboloïde passant au sommet A′ *correspondent les points à l'infini du plan fondamental, situés sur* ωt *et* $\omega\theta$.

6. Enfin, la propriété démontrée plus haut pour l'ellipsoïde, et relative au centre des moyennes distances de n points du plan fondamental, subsiste pour l'hyperboloïde à une nappe et se démontre de la même manière.

2° *Quartiques gauches.*

1. De même que pour l'ellipsoïde, à toute conique du plan fondamental

$$At^2 + 2Bt\theta + C\theta^2 + 2Dt + 2E\theta + F = 0$$

correspond une *quartique conique*, intersection de l'hyperboloïde avec un cône ayant son sommet au point A' et dont l'équation est

$$\begin{aligned} &A\left(\frac{z}{c}+\frac{y}{b}\right)^2 + 2B\left(\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}\right) + C\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right)^2 \\ &\quad + 2\left(1+\frac{x}{a}\right)\left[D\left(\frac{z}{c}+\frac{y}{b}\right) + E\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right)\right] + F\left(1+\frac{x}{a}\right)^2 = 0. \end{aligned}$$

On peut énoncer pour ces quartiques coniques les mêmes propriétés que pour celles qui sont situées sur l'ellipsoïde; je ne m'y arrêterai pas.

2. Si l'on cherche la transformée de la quartique d'intersection de l'hyperboloïde avec la quadrique

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &A\frac{x^2}{a^2} + A'\frac{y^2}{b^2} + A''\frac{z^2}{c^2} + 2B\frac{yz}{bc} + 2B'\frac{zx}{ca} \\ &\quad + 2B''\frac{xy}{ab} + 2C\frac{x}{a} + 2C'\frac{y}{b} + 2C''\frac{z}{c} + D = 0, \end{aligned} \right.$$

on trouve après réduction

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &(A - 2C + D)\,t^2\theta^2 \\ &\quad + 2(B' + B'' - C' - C'')\,t^2\theta + 2(B' - B'' + C' - C'') \\ &\quad + \theta^2 + (A' + A'' + 2B)\,t^2 + 2(A - A' + A'' - D)\,t\theta \\ &\quad + (A' + A'' - 2B)\,\theta^2 + 2(B' + B'' + C' + C'')\,t \\ &\qquad\qquad + 2(B' - B'' - C' + C'')\,\theta + A + 2C + D = 0. \end{aligned} \right.$$

En désignant par $\varphi(t\theta)$ l'ensemble des termes du deuxième degré, du premier degré et du terme constant; et en posant

$$B' - C'' = \alpha, \qquad B'' - C' = \beta,$$

l'équation précédente s'écrit

$$(A - 2C + D)t^2\theta^2 + [(\alpha + \beta)t + (\alpha - \beta)\theta]t\theta - \varphi(t\theta) = 0;$$

elle représente une quartique plane dont les directions asymptotiques sont parallèles aux axes ωt et $\omega\theta$; cette courbe a, en général, quatre points à l'infini sur ωt et $\omega\theta$; ces points correspondent aux points de l'hyperboloïde où la quartique gauche rencontre les deux génératrices passant par le sommet A'.

Donc :

Toute quartique gauche de l'hyperboloïde se transforme en une quartique plane dont les directions asymptotiques sont parallèles aux axes ωt et $\omega\theta$.

Dans le cas particulier où $A - 2C + D = 0$, la courbe du plan fondamental se réduit au troisième degré; il est facile de voir que la quadrique (2) passe alors au sommet A'; donc :

Toute quartique gauche de l'hyperboloïde passant au sommet A' se transforme suivant une cubique plane.

3. Les quartiques (3) jouissant des mêmes propriétés diamétrales que les cycliques planes, tout diamètre y est perpendiculaire à la direction des cordes correspondantes; tous les diamètres passent par un point fixe appelé *centre* qui a pour coordonnées

$$t = -\frac{\alpha + \beta}{A - 2C + D}, \qquad \theta = -\frac{\alpha - \beta}{A - 2C + D}.$$

On aura donc, à ce point de vue, pour les quartiques gauches de l'hyperboloïde des propriétés analogues à celles des quartiques situées sur l'ellipsoïde; il est inutile de les énoncer.

4. A chaque point d'intersection de la quartique (3) avec l'hyperbole équilatère (H), correspond un point à l'infini pour la quartique gauche de l'hyperboloïde. Or, si l'on combine les deux équations (3) et (H), on arrive à la suivante

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &(A'+A''+2B)\,t^2+(A'+A''-2B)\,\theta^2 \\ &\quad +4(B'+B'')\,t+4(B'-B'')\,\theta+4A-2A'+2A''=0, \end{aligned} \right.$$

qui représente une conique dont les axes sont parallèles à ωt et $\omega\theta$; et, c'est en cherchant les points d'intersection de cette conique avec l'hyperbole (H) que l'on aura les branches infinies de la quartique gauche. J'appellerai la conique (4) la *caractéristique* de la quartique gauche.

5. Si l'on coupe le cône asymptote de l'hyperboloïde par le plan YOZ, on obtient deux droites D et D′ représentées dans ce plan par l'équation

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Si l'on transporte le sommet du cône asymptote de la quadrique (Q) au centre O de l'hyperboloïde, l'intersection de ce cône par le plan YOZ sera composée des deux droites D_1 et D'_1 dont l'équation est

$$A'\frac{y^2}{b^2}-A''\frac{z^2}{c^2}-2B\frac{yz}{bc}=0.$$

Or, dans le cas où la caractéristique est une ellipse, on a

$$(A'+A''+2B)(A'+A''-2B)>0$$

et les droites D_1 et D'_1 sont comprises dans l'angle DOD′.

Si la caractéristique est une hyperbole,

$$(A' + A'' + 2B)(A' + A'' - 2B) < 0$$

et les directions D et D'_1 séparent les directions D et D'.

Si la caractéristique est une parabole, l'une des droites D_1 et D'_1 se confond avec D ou D'.

6. La considération de la caractéristique permet de faire une classification des quartiques gauches de l'hyperboloïde, relativement aux branches infinies de ces courbes :

1° La caractéristique rencontre l'hyperbole (H) en quatre points réels distincts; à ce cas correspondent *les quartiques gauches à quatre branches hyperboliques*.

2° Les quatre points d'intersection de la caractéristique avec l'hyperbole sont imaginaires : *quartiques gauches fermées*.

3° La caractéristique est tangente à l'hyperbole (H); les deux autres points de rencontre peuvent être réels ou imaginaires; d'où deux espèces de quartiques :

(α). *Quartiques gauches à branche parabolique et à deux branches hyperboliques;*

(β). *Quartiques gauches à branche parabolique.*

4° La caractéristique est bitangente à l'hyperbole (H). *Quartiques gauches à deux branches paraboliques.*

5° La caractéristique est osculatrice à l'hyperbole (H). *Quartiques gauches à deux branches hyperboliques, l'une de ces branches étant située d'un même côté de son asymptote :* c'est celle qui correspond au point d'osculation.

III. — Transformation de l'hyperboloide a deux nappes.

1° *Sections planes.*

1. Les résultats que l'on obtient par la transformation omaloïdale de l'hyperboloïde à deux nappes sont analogues à ceux obtenus dans celle de l'ellipsoïde; je m'attacherai donc à faire ressortir simplement les différences des deux transformations.

Pour l'hyperboloide à deux nappes, les formules de transformation sont

$$\frac{x}{a} = \frac{1 - t^2 - \theta^2}{2\theta}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{t}{\theta}, \qquad \frac{z}{c} = \frac{1 + t^2 + \theta^2}{2\theta};$$

on en déduit les formules inverses

$$\theta = \frac{ac}{az + cx}, \qquad t = \frac{acy}{b(az + cx)}.$$

De ces formules on peut tirer immédiatement les résultats suivants :

1° *Les sections principales de l'hyperboloïde se transforment comme il suit :*

YOZ en un cercle...............	$t^2 + \theta^2 = 1$
ZOX suivant l'axe $\omega\theta$............	$t = 0$
XOY en un cercle imaginaire....	$t^2 + \theta^2 = -1$

2° *Les sections parallèles à* $\left|\begin{matrix}\text{YOZ}\\ \text{XOY}\end{matrix}\right|$, *en des cercles ayant leur centre sur l'axe* $\omega\theta$ *et coupant l'axe* ωt *en deux points* $\left|\begin{matrix}\text{réels} & t = \pm 1\\ \text{imaginaires} & t = \pm i\end{matrix}\right|$. *Les sections parallèles à* ZOX, *en des droites passant à l'origine* ω.

2. *Toute section plane de l'hyperboloïde*

$$\alpha\frac{x}{a}+\beta\frac{y}{b}+\gamma\frac{z}{c}+\delta=0$$

se transforme en un cercle

$$(\gamma-\alpha)(t^2+\theta^2)+2\beta t-2\delta\theta+\alpha+\gamma=0.$$

Cependant, dans le cas où $\gamma-\alpha=0$, la transformée est une droite

$$2\beta t-2\delta\theta+2\alpha=0;$$

mais alors le plan de la section

$$\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\beta\frac{y}{b}+\delta=0$$

est parallèle à la droite

$$(\mathrm{D})\qquad\left\{\begin{aligned}y&=0,\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=0.\end{aligned}\right.$$

Ceci montre que, pour l'hyperboloïde à deux nappes :

Le pôle de la transformation omaloïdale est à l'infini sur la droite (D).

Enfin on voit facilement que :

1° *Toute section dont le plan passe par la droite* (D) *se transforme en une droite parallèle à* $\omega\theta$.

2° *Toute section parallèle au plan déterminé par la droite* (D) *et l'axe* OY *se transforme en une droite parallèle à* ωt.

3. A deux droites parallèles

$$\begin{aligned}At+B\theta+C&=0,\\ At+B\theta+C'&=0,\end{aligned}$$

correspondent des sections dont les plans sont

$$A\frac{y}{b}+B+C\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=0,$$

$$A\frac{y}{b}+B+C'\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=0.$$

et l'on voit que ces plans rencontrent l'axe OY au même point

$$y=-\frac{bB}{A}.$$

Deux droites parallèles correspondent à des sections parallèles à la droite (D) *et coupant l'axe* OY *au même point.*

On vérifiera de même la propriété suivante :

Deux droites rectangulaires correspondent à des sections parallèles à la droite (D) *et coupant l'axe* OY *en deux points m et n situés de part et d'autre de l'origine et tels que*

$$xm.on=b^2.$$

On peut déduire de tous ces résultats des propriétés analogues à celles que M. de Longchamps a démontrées pour l'ellipsoïde (*Journal de Math. spéciales, loc. cit.*).

4. On peut remarquer, d'après les formules inverses de la transformation, que si

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0,$$

t et θ sont infinis. Donc :

Au point à l'infini sur la droite (D) *correspond la droite de l'infini du plan fondamental.*

De même pour $\theta=0$, x, y et z sont infinis. Par suite :

Les points à l'infini de l'hyperboloïde à deux nappes sont représentés par l'axe ωt.

On aura donc les points à l'infini d'une courbe située sur l'hyperboloïde en cherchant les points d'intersection de sa transformée, avec l'axe ωt; à chacun de ces points correspondra une branche hyperbolique. Si la transformée est tangente à ωt, au point de contact correspondra une branche parabolique.

2° *Quartiques gauches.*

1. On démontre, comme plus haut, qu'à toute conique du plan fondamental correspond une quartique gauche de l'hyperboloïde, située sur un cylindre du deuxième degré dont les génératrices sont parallèles à la droite (D).

On obtient ainsi des *quartiques cylindriques* qui ont des propriétés analogues à celles des quartiques coniques.

2. Enfin, les formules de transformation montrent encore, que toute quartique gauche de l'hyperboloïde à deux nappes se transforme suivant une cyclique plane; toutes les déductions que l'on fera de ce résultat seront semblables à celles que l'on a faites dans le cas de l'ellipsoïde; tous les calculs sont identiques.

On pourra, de plus, classer les quartiques gauches de l'hyperboloïde à deux nappes, relativement à leurs branches infinies, en cherchant les points d'intersection de leurs transformées avec l'axe ωt du plan fondamental. Je n'insisterai pas sur tous ces résultats : il a suffi de montrer comment on peut les obtenir.