NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

S. MANGEOT

Sur les plans tangents à certaines surfaces algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 185-188

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__185_1>

SUR LES PLANS TANGENTS A CERTAINES SURFACES ALGÉBRIQUES;

PAR M. S. MANGEOT,
Docteur ès Sciences.

Je considère une surface algébrique S, d'ordre n, représentée par l'équation entière $f(x, y, z) = 0$. On peut, d'une infinité de manières, mettre cette équation sous la forme

$$\varphi(x, y, z) + \psi(x, y, z) = 0,$$

φ et ψ désignant deux fonctions entières. La détermination du plan tangent T en tout point M de la surface S peut être ramenée à celle des plans polaires ϖ, ϖ' de ce point M par rapport aux deux surfaces σ, σ' qui correspondent aux équations

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad \psi(x, y, z) = 0.$$

En effet, soient m et $m - p$ $(p \gtreqless 0)$ les degrés respectifs de φ et ψ; m est égal ou supérieur à n. On voit, en formant son équation, que le plan T passe par l'intersection du plan ϖ avec le plan P qui a pour équation

$$x \frac{\partial \psi}{\partial x'} + y \frac{\partial \psi}{\partial y'} + z \frac{\partial \psi}{\partial z'} - \frac{\partial \psi}{\partial t'} + p\psi(x', y', z') = 0, \qquad (t' = 1),$$

x', y', z' étant les coordonnées de M. Or le plan P coïncide avec le plan homothétique P′ de ϖ' par rapport à M, le rapport d'homothétie étant $\frac{m-p}{m}$ (si ϖ' n'est pas confondu avec P′, il doit être placé entre P′ et M).

D'après cela, si l'on sait construire géométriquement les deux plans ϖ et ϖ', on aura là un mode particulier de construction géométrique du plan tangent T.

Il peut arriver que, pour une décomposition convenable de f en une somme telle que $\varphi + \psi$, les surfaces correspondantes σ, σ' soient telles que l'on sache déterminer les plans polaires ϖ, ϖ' en partant uniquement de leur définition géométrique. Dans ce cas, on saura construire le plan T avec la règle et le compas, sans le secours d'aucun calcul. Il en serait ainsi, par exemple, à l'égard de la surface représentée, en coordonnées rectangulaires, par l'équation

$$\begin{aligned} y^4 + y^2 z^2 + 4 z^2 x^2 + x^2 y^2 - 4 a^2 x^2 - 4 b^2 z^2 \\ + (3c^2 - 4a^2 - 4b^2) y^2 + 4 a^2 b^2 = 0, \end{aligned}$$

où a, b, c désignent trois longueurs connues, et ceci résulte de ce que son premier membre est la somme des deux expressions

$$4(x^2 + y^2 - b^2)(y^2 + z^2 - a^2), \qquad -3y^2(x^2 + y^2 + z^2 - c^2).$$

Il en serait également de même si la surface S était le lieu d'un point tel que ses distances à des plans donnés, ou puissances par rapport à des sphères données, fournissent un produit constant quand on les multiplie entre elles après les avoir élevées à des puissances entières positives ou négatives.

Que l'on suppose nulle la coordonnée z, et les résultats indiqués ci-dessus deviennent des conclusions relatives aux courbes planes algébriques : il suffit de remplacer, dans les énoncés, les plans et les surfaces par des droites et des courbes.

Ainsi considérons une courbe plane C faisant partie de celles qui sont constructibles par la méthode dite *des régions*, les lignes séparatrices étant supposées être des droites ou coniques dont on sache construire un point quelconque par la règle et le compas : en sorte que l'on a pu mettre son équation sous une forme

$$\varphi(x, y) + \psi(x, y) = 0$$

telle que les courbes γ et γ' correspondant aux équations entières $\varphi = 0$, $\psi = 0$ soient formées uniquement par des lignes de ces deux sortes. On saura déterminer, avec la règle et le compas, les positions des deux droites polaires d'un point quelconque M de la courbe C par rapport aux courbes γ et γ' : ces deux droites feront connaître (d'après la manière correspondante à celle indiquée au sujet des surfaces) la tangente à la courbe C, au point M [1].

---

[1] J'indique ici, en axes rectangulaires, quelques exemples simples de courbes algébriques C dont les tangentes peuvent être construites géométriquement par ce procédé :

$$x^5 + a(x^2 + y^2 - b^2)^2 = 0,$$
$$(x^2 \pm y^2)^2 + a^2 x^3 y^3 = 0,$$
$$x(x - \alpha)(y^2 - b^2) - y(y - \beta)(x^2 - a^2) = 0,$$
$$x(y - \beta)(y^2 - b^2) - y(x - \alpha)(x^2 - a^2) = 0,$$
$$x^q(x^2 + y^2 - a^2)^r = y^q(x^2 + y^2 - b^2)^r,$$
$$(x^2 + y^2 + ax)^q(x^2 + y^2 + by)^r = \alpha^{2q+2r-q'-r'} x^{q'} y^{r'};$$

a, b, α, β désignent des longueurs connues et q, r', q', r des nombres entiers positifs donnés. Ces équations ont la forme même qui se prête à l'application de la méthode, et l'on voit de suite, dans chaque exemple, quelles sont les courbes γ, γ', et quelle est la valeur du rapport $\dfrac{m-p}{m}$ du degré de γ' à celui de γ.

Dans tous ces exemples, les courbes γ et γ' sont formées de droites ou cercles que l'on sait immédiatement tracer, de sorte que les constructions à effectuer n'exigeront aucun calcul préparatoire, si l'on se reporte à la définition géométrique de la droite polaire.

Un exemple remarquable des courbes C auxquelles ce procédé s'applique est celui d'une courbe U, d'ordre n, ayant un point multiple d'ordre $n - 1$. Supposons que l'on connaisse géométriquement les $n - 1$ tangentes de la courbe U en ce point, ainsi que ses n directions asymptotiques. Nous prendrons pour la courbe γ le système des parallèles à ces directions, menées par le point multiple : la courbe γ' sera formée des $n - 1$ tangentes précédentes, et nous saurons ici, sans recourir à aucun calcul, tracer la tangente en un point quelconque de la courbe U, par l'emploi de la règle et du compas.