NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE FOUCHÉ

Sur l'introduction des nombres négatifs

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 164-179

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__164_1>

SUR L'INTRODUCTION DES NOMBRES NÉGATIFS;

PAR M. MAURICE FOUCHÉ,
Agrégé de l'Université,
Professeur de Mathématiques élémentaires à Sainte-Barbe.

La plupart des mathématiciens sont aujourd'hui d'accord pour reconnaître que la différence essentielle entre l'Algèbre et l'Arithmétique consiste dans l'introduction des nombres négatifs. Cet accord paraît suffisamment prouvé par ce fait que dans le programme d'agrégation pour l'année 1893 figure pour la première fois une leçon intitulée : « Première leçon d'Algèbre. — Introduction des nombres négatifs. » Cette circonstance nous a déterminé à publier la leçon par laquelle, depuis plusieurs années, nous ouvrons notre cours d'Algèbre à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

Il y a deux manières d'envisager l'introduction des nombres négatifs. La première, qui est la plus ancienne, car elle a été élucidée au XVII^e siècle par Descartes, consiste à les considérer comme fournis par la nécessité de représenter des grandeurs comptées dans deux sens différents, tels que les segments portés sur une droite indéfinie de part et d'autre d'une origine fixe. La seconde, plus abstraite, consiste à les considérer d'emblée comme généralisation de l'idée de quantité. Cette seconde méthode fait partie de tout un ensemble de doctrines qui ont été établies dans ces dernières années par plusieurs géomètres célèbres et qui ont conduit M. Tannery à ce résultat de haute portée philosophique que toute l'Analyse algébrique n'exige d'autre postulatum que la conception si simple du nombre entier. Ce remarquable caractère de simplicité dans le point de départ nous a fait adopter le second point de vue qui conserve à l'Analyse algébrique toute son indépendance vis-à-vis de la Géométrie et des vérités d'ordre expérimental.

Nous avons cru devoir rappeler, au début de la leçon, les principes sur lesquels doit reposer la généralisation de l'idée de quantité, quoique, à vrai dire, ces principes devraient être expliqués dès l'introduction des fractions ou, au plus tard, des nombres incommensurables, car ceux-ci appartiennent bien à l'Arithmétique et leur étude devrait, à notre sens, précéder celle des nombres négatifs. Mais la théorie des nombres incommensurables est incomparablement plus difficile que celle des nombres négatifs, et dès lors des raisons d'ordre pédagogique la font rejeter beaucoup plus loin, à tel point qu'on a cru récemment devoir la supprimer du programme d'admission à l'École Polytechnique. Malgré cela, dans la rédaction de ce qui suit, j'ai supposé cette théorie déjà faite, sans cependant y chercher aucun appui. Mon but était simplement de rédiger la leçon de telle sorte qu'on pût, sans aucun inconvénient, la placer soit avant, soit après la théorie des nombres incommensurables, et dans tous les cas, si on la place avant, profiter des résultats établis pour les appliquer sans aucune modification aux nombres incommensurables *négatifs, le jour où l'on voudra* faire la théorie de ces importantes quantités.

Première leçon d'Algèbre.

Introduction des nombres négatifs.

L'Algèbre a pour objet la généralisation des théories de l'Arithmétique et l'établissement de formules qui permettent de traiter d'une manière uniforme tous les problèmes de la même nature, et de règles qui s'appliquent dans tous les cas sans aucune exception. On y est arrivé par l'emploi simultané de deux procédés.

1° On représente les nombres par des lettres et les opérations par des signes. Cette méthode, quoiqu'elle donne aux raisonnements une allure particulière, ne constitue en réalité qu'une abréviation de langage et ne saurait à elle seule distinguer l'Algèbre de l'Arithmétique.

C'est pourquoi la signification des symboles d'opérations est expliquée en Arithmétique, et l'emploi des lettres et des signes est d'un usage fréquent en Arithmétique même.

Par exemple, dire qu'*un produit de deux facteurs ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs*, ou écrire

$$a \times b = b \times a,$$

c'est exactement la même chose.

2° On étend le sens des opérations de l'Arithmétique et l'on applique ces opérations à des objets qui ne sont plus des nombres tels qu'on les considère en Arithmétique. C'est là ce qui distingue essentiellement l'Algèbre de l'Arithmétique. La nécessité de généraliser le sens et les objets des opérations s'introduit par la nécessité de les rendre toutes possibles, afin d'éviter les exceptions et les discussions plus ou moins pénibles qui en sont la conséquence.

La théorie de la soustraction en fournit le premier exemple.

Supposons qu'au nombre 27 nous voulions ajouter la différence 7 — 3. En Arithmétique on peut retrancher 3 de 7 et ajouter ensuite la différence à 27, ou bien on peut ajouter 7 à 27 puis retrancher 3, ou encore retrancher d'abord 3 de 27 puis ajouter 7 au résultat.

Le fait que les trois systèmes d'opérations conduisent au même résultat s'exprime par les égalités

$$27 + (7 - 3) = 27 + 7 - 3 = 27 - 3 + 7.$$

Si au contraire on veut faire la suite des opérations

$$3 + (5 - 4),$$

on pourra bien la remplacer par

$$3 + 5 - 4,$$

mais non par

$$3 - 4 + 5,$$

car la première soustraction $3 - 4$ est impossible.

On ne peut donc pas énoncer un théorème général sur l'équivalence des trois systèmes d'opérations, et les égalités

$$a + (b - c) = a + b - c = a - c + b$$

ne sont vraies qu'autant que les trois nombres a, b, c remplissent certaines conditions.

C'est pour faire disparaître les difficultés qui résultent de cette absence de généralité qu'on a inventé les nombres négatifs.

On appelle *quantité* tout ce qu'on soumet aux opérations. En Arithmétique, on ne connaît d'autres quantités que les nombres entiers, fractionnaires et incommensurables. On peut donc dire que la notion propre à l'Algèbre et qui la distingue de l'Arithmétique, c'est la généralisation plus étendue de l'idée de quantité.

Quand on généralise l'idée de quantité, les nouvelles définitions des opérations ne sont pas arbitraires. Il faut en effet réaliser les conditions suivantes :

1° Il faut que les quantités plus générales que l'on vient de définir comprennent les anciennes comme cas particuliers. Par exemple, en Arithmétique même, les fractions comprennent les nombres entiers comme cas particuliers, et les nombres incommensurables comprennent les entiers et les fractions comme cas particuliers;

2° *Principe de la permanence du sens des opérations.* — Il faut que les opérations appliquées aux nouvelles quantités reproduisent les anciennes opérations de même nom, dans le cas où les nouvelles quantités se retrouvent être les mêmes que les anciennes. Par exemple, en Arithmétique, la multiplication des fractions n'a pas le même sens que la multiplication des entiers, mais si les fractions se réduisent à des nombres entiers, la définition de la multiplication des fractions reproduit celle des nombres entiers.

Ainsi

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{2 \times 5}{3 \times 6}$$

et

$$\frac{2}{1} \times \frac{5}{1} = \frac{2 \times 5}{1};$$

3° *Principe de la permanence des règles de calcul.* — Il faut que les nouvelles opérations jouissent des mêmes propriétés que les anciennes pour qu'on puisse leur appliquer les théorèmes de l'Arithmétique.

Propriétés des opérations. — L'étude de ces propriétés constitue la première et la plus importante partie de l'Arithmétique, mais il semble que toutes ces théories cessent d'être applicables dès qu'on n'opère plus sur les nombres considérés en Arithmétique.

Cependant les propriétés des opérations dépendent exclusivement d'un petit nombre d'entre elles que nous appellerons les *propriétés fondamentales,* de telle sorte que si une opération généralisée jouit des propriétés fondamentales de l'opération arithmétique de même nom, elle jouira aussi de toutes les autres propriétés démontrées en Arithmétique. Quand nous introduirons une nouvelle espèce de quantité, nous aurons donc seulement à nous assurer que les opérations faites sur ces nouvelles quantités possèdent les propriétés fondamentales. Il convient alors de rappeler quelles sont les propriétés fondamentales des opérations. J'y joindrai la propriété fondamentale de l'égalité, quoique l'égalité ne soit pas une opération.

Propriétés fondamentales des opérations.

Egalité. — Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles. Toutes les fois qu'on inventera une nouvelle espèce de quantité, il faudra en définir l'égalité, et vérifier que cette propriété s'applique à la nouvelle définition.

Addition. — Toutes les propriétés de l'addition dépendent des trois suivantes

$$a + 0 = a, \tag{1}$$

$$a + b = b + a, \tag{2}$$

$$a + b + c = a + c + b. \tag{3}$$

On pourra donc appeler *addition* toute opération jouissant de ces trois propriétés, et l'addition ainsi définie jouira de toutes les propriétés de l'áddition arithmétique.

Soustraction. — Elle a pour objet de trouver une quantité qui ajoutée à une quantité donnée en reproduise une autre également donnée. Elle est donc définie en même temps que l'addition et ses propriétés dépendent exclusivement de celles de l'addition. Il faudra seulement vérifier que la soustraction n'admet qu'une solution.

Multiplication. — Toutes les propriétés de la multiplication dépendent des cinq suivantes

$$a \times 0 = 0,$$
$$a \times 1 = a,$$
$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c,$$
$$a \times b = b \times a,$$
$$a \times b \times c = a \times c \times b.$$

Si ces cinq propriétés sont vérifiées, toutes les autres le seront.

Division. — Elle a pour objet de trouver une quantité qui multipliée par une quantité donnée en reproduise une autre également donnée. Elle est définie en même temps que la multiplication et ses propriétés sont des conséquences de celles de la multiplication. Il faudra donc seulement vérifier que la division n'admet qu'une solution.

Élévation aux puissances. — C'est une suite de multiplications.

Extraction des racines. — C'est l'inverse de l'élévation aux puissances.

Nombres algébriques.

L'espèce nouvelle de quantité qu'on introduit en Algèbre est l'assemblage d'un nombre et du signe + ou — qu'on place devant, et qui jusqu'à nouvel ordre ne doit être considéré que comme un symbole de distinction et doit être provisoirement dépouillé de sa signification relative à l'addition ou à la soustraction. Nous appellerons ces quantités des *nombres algébriques*. Les nombres précédés du signe + seront dits *positifs*; ceux qui sont précédés du signe —, *négatifs*. Le nombre arithmétique qui figure dans le nombre algébrique en est la *valeur absolue*. Ainsi $+\frac{2}{3}$ est un nombre positif dont la valeur absolue est $\frac{2}{3}$; $-\frac{3}{4}$ est un nombre négatif dont la valeur absolue est $\frac{3}{4}$. Il faut comprendre parmi les nombres algébriques le nombre o qui a le signe qu'on veut et une valeur absolue nulle. Si l'on convient de faire précéder tous les nombres considérés en Arithmétique du signe $+$, on voit que les nombres algébriques comprennent les nombres arithmétiques qui deviennent les nombres positifs, ce qui vérifie la première condition générale.

Égalité. — Deux nombres algébriques sont égaux quand ils ont même valeur absolue et même signe. L'égalité ainsi définie des nombres algébriques jouit évidemment de la propriété fondamentale.

Addition. — Elle est définie par la règle suivante : 1° *Pour ajouter deux nombres de même signe on ajoute leurs valeurs absolues et l'on conserve leur signe commun.* 2° *Pour ajouter deux nombres de signes différents on retranche leurs valeurs absolues et l'on donne au résultat le signe du nombre qui avait la plus grande valeur absolue.*

Il résulte d'abord de cette règle que l'addition n'a qu'une solution et que l'addition des nombres positifs reproduit l'addition arithmétique, ce qui est la seconde condition générale.

On remarquera que la somme de deux nombres égaux en valeur absolue mais de signes contraires est o.

Il faut vérifier que les propriétés fondamentales de l'addition sont conservées

1° $$a + 0 = a.$$

Les deux membres ont évidemment même valeur absolue et même signe

2° $$a + b = b + a.$$

Dans la définition on ne distingue pas l'ordre des termes. Cette deuxième propriété est donc vraie.

3° $$a + b + c = a + c + b.$$

Si l'on change le signe des trois nombres a, b, c, on change le signe de la somme $a + b$ et le signe de la somme $a + b + c$. Si l'égalité était vraie avant le changement, elle l'est donc encore après. Il peut se présenter deux cas : ou bien les trois nombres sont de même signe ou bien il y en a deux d'un certain signe et l'autre du signe contraire. D'après ce qui précède, on peut toujours supposer que le signe le plus fréquent est le signe $+$.

Si l'on désigne par α, β, γ les valeurs absolues de a, b, c, on n'aura donc à examiner que les quatre cas suivants

1° $(+\alpha)+(+\beta)+(+\gamma)=(+\alpha)+(+\gamma)+(+\beta)$,

2° $(+\alpha)+(+\beta)+(-\gamma)=(+\alpha)+(-\gamma)+(+\beta)$,

3° $(+\alpha)+(-\beta)+(+\gamma)=(+\alpha)+(+\gamma)+(-\beta)$,

4° $(-\alpha)+(-\beta)+(+\gamma)=(-\alpha)+(+\gamma)+(-\beta)$.

La première égalité où tous les nombres sont positifs revient à l'Arithmétique; la troisième égalité est identique à la deuxième lue en sens inverse : elles correspondent toutes deux aux cas où les deux derniers nombres ont des signes contraires. Il suffit donc de démontrer la deuxième et la quatrième.

Je vais démontrer que

$$(+\alpha)+(+\beta)+(-\gamma)=(+\alpha)+(-\gamma)+(+\beta).$$

Je suppose d'abord $\gamma < \alpha$ et $\alpha = \gamma + x$.

Le premier membre revient à

$$[+(\gamma + x)] + (+\beta) + (-\gamma),$$

qui d'après la règle donne $+(x+\beta)$.

Le deuxième membre donne aussi $+(x+\beta)$.

Maintenant je suppose $\gamma > \alpha$ et $\gamma = \alpha + x$; le premier membre revient à

$$+(\alpha+\beta) + [-(\alpha + x)],$$

c'est-à-dire

$$+(\beta - x) \quad \text{si} \quad \beta > x$$

et

$$-(x - \beta) \quad \text{si} \quad \beta < x.$$

Le deuxième devient

$$(-x) + (+\beta),$$

ce qui donne aussi

$$+(\beta - x) \quad \text{ou} \quad -(x-\beta),$$

suivant les cas.

Enfin démontrons que

$$(-\alpha) + (+\beta) + (+\gamma) = (-\alpha) + (+\gamma) + (+\beta).$$

Le premier membre peut s'écrire successivement, soit en changeant l'ordre des deux premiers termes, soit en changeant l'ordre des deux derniers quand ils sont de signe contraire, ce qui est le cas précédent.

$$\begin{aligned} &(+\beta) + (-\alpha) + (+\gamma) \\ =&(+\beta) + (+\gamma) + (-\alpha) \\ =&(+\gamma) + (+\beta) + (-\alpha) \\ =&(+\gamma) + (-\alpha) + (+\beta) \\ =&(-\alpha) + (+\gamma) + (+\beta). \end{aligned}$$

L'égalité est donc démontrée et les propriétés relatives à l'addition sont démontrées.

Soustraction. — Puisque l'addition est définie, la soustraction l'est aussi.

Retrancher b de a, c'est trouver un nombre c tel que $b + c = a$. Par conséquent les deux égalités

$$a - b = c \qquad \text{et} \qquad a = b + c$$

veulent dire la même chose par définition.

Je dis que la soustraction peut s'effectuer par la règle suivante :

Pour soustraire un nombre algébrique d'un autre, on ajoute le nombre qu'on veut retrancher après en avoir changé le signe.

En effet, soit b à retrancher de a et b' le nombre obtenu en changeant le signe de b.

D'après la règle, la différence sera

$$a + b .$$

Il faut donc démontrer que

$$a + b + b = 0,$$

Or

$$a + b' + b = b' + b + a \qquad \text{et} \qquad b' + b = 0.$$

On remarquera que la soustraction n'a qu'une solution, car, s'il y avait deux différences inégales, en leur ajoutant le deuxieme terme de la soustraction, on ne retrouverait pas deux résultats égaux.

On voit aussi que, dans le cas où les deux nombres sont positifs, et le second plus petit que le premier en valeur absolue, la soustraction des nombres algébriques reproduit la soustraction arithmétique.

Multiplication. — Elle est définie par la règle suivante :

Pour multiplier deux nombres algébriques on mul-

tiplie leurs valeurs absolues et l'on donne au produit le signe $+$ si les deux facteurs sont de même signe et le signe $-$ si les deux facteurs sont de signes contraires.

Il peut se présenter quatre cas compris dans le Tableau suivant

$$(+\alpha)\times(+\beta)=+\alpha\beta,$$
$$(+\alpha)\times(-\beta)=-\alpha\beta,$$
$$(-\alpha)\times(+\beta)=-\alpha\beta,$$
$$(-\alpha)\times(-\beta)=+\alpha\beta.$$

On peut encore dire que le produit a le signe du multiplicande si le multiplicateur est positif, et le signe contraire à celui du multiplicande, si le multiplicateur est négatif.

On remarquera que la multiplication n'a qu'une solution et que la multiplication des nombres positifs reproduit la multiplication arithmétique.

Il faut démontrer qu'ainsi définie la multiplication jouit des propriétés fondamentales.

Ces propriétés sont

$$a\times 0=0,$$
$$a\times 1=a,$$
$$a\times b=b\times a,$$
$$a\times b\times c=a\times c\times b,$$
$$(a+b)c=ac+bc.$$

La première est évidente par définition.

Dans la deuxième le nombre 1 est positif, il convient de le remplacer par $+1$. Or on a

$$a\times(+1)=a,$$

d'après la règle.

La troisième propriété est démontrée, car dans la règle on ne spécifie pas l'ordre des facteurs.

La quatrième égalité est vraie en valeur absolue.

Pour faire voir qu'elle est vraie en signe, il suffit de remarquer que d'après la règle des signes le produit de plusieurs facteurs est positif si le nombre des facteurs négatifs est nul ou pair, et négatif si le nombre des facteurs négatifs est impair. Donc le signe du produit ne dépend pas de l'ordre des facteurs.

Reste la cinquième égalité.

Si l'on change le signe de c, on change à la fois le signe du premier membre et le signe de chaque terme du second membre. On change donc aussi le signe du deuxième membre.

Donc si l'égalité est vraie avant, elle l'est encore après. On peut donc supposer c positif.

On fera la même remarque si l'on change à la fois le signe de a et le signe de b.

Si donc a et b sont de même signe, on pourra les supposer positifs et l'on retombe dans l'Arithmétique. Si a et b sont de signes contraires, je supposerai positif le plus grand en valeur absolue :

$$a = +\alpha, \qquad b = -\beta, \qquad \alpha > \beta.$$

Il faut démontrer que

$$[(+\alpha)+(-\beta)](+\gamma) = (+\alpha)(+\gamma)+(-\beta)(-\gamma);$$

le premier membre donne

$$\begin{aligned}&[+(\alpha-\beta)](+\gamma)\\ &\quad = +(\alpha-\beta)(\gamma) = (\alpha\gamma - \beta\gamma) = +\alpha\gamma + (-\beta\gamma),\end{aligned}$$

comme le second membre. C. Q. F. D.

Division. — La division est définie en même temps que la multiplication.

Diviser a par b, c'est trouver un nombre c tel que

$$b \times c = a,$$

les deux égalités

$$\frac{a}{b} = c \qquad \text{et} \qquad a = bc$$

veulent dire la même chose par définition.

Il en résulte que la valeur absolue du quotient multipliée par celle du diviseur doit reproduire celle du multiplicande. Elle est donc le quotient des valeurs absolues des deux termes. Quant au signe, il résulte de la règle de multiplication que, si le diviseur est positif, le quotient aura le signe du dividende, et si le diviseur est négatif, le quotient aura le signe contraire à celui du dividende.

On a donc les quatre cas

$$\frac{+\alpha}{+\beta} = +\frac{\alpha}{\beta},$$

$$\frac{+\alpha}{-\beta} = -\frac{\alpha}{\beta},$$

$$\frac{-\alpha}{+\beta} = -\frac{\alpha}{\beta},$$

$$\frac{-\alpha}{-\beta} = +\frac{\alpha}{\beta},$$

compris dans la règle suivante :

Règle. — *Pour diviser deux nombres algébriques, on divise leurs valeurs absolues et l'on donne au quotient le signe + si les deux nombres sont de même signe, le signe — si les deux nombres sont de signes contraires.*

Il résulte de ce qui précède que la division n'admet qu'une solution.

Nombres inverses. — On dit que deux nombres sont inverses quand leur produit est + 1. Ils ont donc forcément le même signe. Au lieu de diviser un nombre par un autre, on peut le multiplier par l'inverse du diviseur. Si a et a' sont inverses

$$\frac{N}{a} = N \times a',$$

car

$$Na' \times a = Naa' = N \times 1 = 1.$$

Élévation aux puissances. — C'est une suite de multiplications.

Pour élever un nombre algébrique à une puissance quelconque, on élève sa valeur absolue à cette puissance et l'on donne au résultat le signe $+$ si le nombre donné était positif ou bien si, le nombre donné étant négatif, l'exposant est pair. On donne au résultat le signe $-$ si le nombre donné est négatif et l'exposant impair.

Toutes les opérations que nous venons d'examiner sont toujours possibles et n'admettent qu'une solution. Il n'en est pas de même de la suivante.

Extraction des racines. — Extraire la racine m^{ieme} d'un nombre a, c'est trouver un nombre x qui élevé à la puissance m reproduise a. Par conséquent les égalités

$$x = \sqrt[m]{a}$$

et

$$x^m = a$$

veulent dire la même chose.

On démontre en Arithmétique que tout nombre a une racine m^{ieme} et une seule. En Algèbre cette remarque détermine la valeur absolue de la racine. Il reste à déterminer le signe.

Si m est impair x^m aura le signe de x. Il faudra donc que x et a soient de même signe; tout nombre algébrique a donc une racine d'un ordre impair déterminé et une seule, laquelle est du même signe que lui.

Ainsi

$$\sqrt[3]{27} = 3, \qquad \sqrt[3]{-27} = -3.$$

Si au contraire m est pair x^m est toujours positif quel que soit le signe de x. Si alors a est positif, il y aura deux racines égales en valeur absolue et de signe contraire; mais, si a est négatif, il n'y aura aucun nombre positif ou négatif qui soit racine $m^{\text{ième}}$ du nombre donné.

Ainsi $\sqrt[4]{16}$ est $+2$ ou -2, mais $\sqrt[4]{-16}$ ne représente aucun nombre positif ou négatif. C'est une opération impossible.

Cette impossibilité est l'origine d'une nouvelle généralisation de l'idée de quantité qui a conduit à l'invention des quantités appelées *imaginaires*.