Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 148-151

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__148_1>

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre adressée à M. Rouché.

Je me permettrai de vous soumettre quelques remarques sur le curieux article de M. Lemoine, relatif à la simplicité des constructions. Il semble donner prise à une grave objection.

Supposons que dans une épure, où la direction des lignes de rappel est connue, on en ait à tracer 22 : c'est une opération qui demande environ deux minutes. Appliquons les conventions et les résultats de M. Lemoine. La simplicité (je dirais plutôt, ce me semble, la complication) du tracé d'une parallèle étant représentée par 9, celle de notre construction serait 9×22, ou 198. Elle serait donc supérieure à celle du tracé des huit cercles tangents à trois cercles donnés, par la méthode de M. Mannheim. Il résulte de cet exemple que les conclusions de M. Lemoine, très intéressantes au point de vue *théorique* spécial qu'il a choisi, ne correspondent pas à la complication plus ou moins grande des tracés dans le sens que l'on donne à ce mot en pratique.

La raison de cette différence, c'est que M. Lemoine ne fait aucun usage de l'équerre; or, si elle ne doit pas être employée à la construction des perpendiculaires, elle s'applique d'une façon très simple et très exacte à celle des parallèles. Pour rétablir la concordance, il semble qu'il faudrait ajouter aux opérations élémentaires les deux suivantes : 1° appliquer la règle contre l'équerre; 2° faire passer le bord de l'équerre par un point donné. L'opération de tracer la ligne suivant le bord de l'équerre ne diffère pas de l'opération analogue pour la règle; il n'y a pas lieu de lui affecter un symbole spécial.

On voit ainsi disparaître la différence énorme que M. Lemoine trouve entre la solution de Gergonne et celle de M. Mannheim, différence qui l'a, dit-il, bien surpris lui-même. Il suffit, pour s'en rendre compte, de remarquer que la solution de M. Mannheim n'exige aucun tracé de parallèle, et que c'est pour ce tracé qu'il y a désaccord entre la théorie de M. Lemoine et la pratique. Ainsi, la construction classique des quatre axes de similitude a pour coefficient de complication 37; celle qui est proposée comme plus avantageuse a 42.

Il semble, en outre, que dans l'énoncé de la construction de Gergonne M. Lemoine fasse quelques constructions inutiles. Il n'est pas nécessaire de déterminer les douze pôles : il suffit d'un seul pour chaque axe, en abaissant du centre radical une perpendiculaire sur cet axe de similitude. J'ai fait un tracé dont le coefficient de complication est 200. Ce résultat placerait la solution de Gergonne bien près de celle de M. Mannheim au point de vue de la simplicité; mais, comme M. Lemoine le fait observer, quand on commence à appliquer cette méthode, on n'y apporte pas toujours toutes les simplifications possibles; il se peut donc que le chiffre de 200 doive encore être abaissé; d'autant plus que j'ai fait la construction telle qu'elle se présente, sans réfléchir longuement aux moyens de la réduire.

R. SOUDÉE,
Professeur au lycée d'Angoulême.

Extrait d'une lettre à M. Rouché.

M. Émile Lemoine fait une discussion très intéressante de la valeur pratique des solutions de Viète, de Bobillier et Gergonne, de M. Fouché et de M. Mannheim. L'avantage reste à la méthode de M. Mannheim.

Or il est à remarquer que, au point de vue théorique, les trois dernières solutions se ramènent facilement à la même idée. Prenant la figure de M. Fouche (*Nouvelles Annales*, juin 1892, p. 235) on reconnaît qu'elle contient à la fois les trois solutions. Les couples de points que M. Lemoine appelle $a_2 a'_2$, $\alpha_2 \alpha'_2$ (p. 470) sont appelés MN, $M_1 N_1$ par M. Fouché. Au lieu de KK' on a la droite PR.

La démonstration est évidente. Partant d'un point M, M. Mannheim construit les antihomologues M' et M''; puis il prend l'antihomologue N'' de M' relativement aux cercles O' et O''.

Ainsi les deux points a_2, a'_2 de la solution de M. Mannheim ne sont autre chose que les deux points où un cercle isogonal coupe un des cercles donnés. M. Fouché indique donc précisément la construction de M. Mannheim à la fin de sa *Remarque II* (p. 237) pour le cas où l'axe de similitude, ou simplement le point H, est en dehors des limites de l'épure.

La construction de M. Fouché s'appliquant au cas d'un cercle, une droite et un point (p. 241), il me semble que l'on doit pouvoir appliquer aussi à ce cas la méthode de M. Mannheim.

Pour terminer, je vous envoie à tout hasard une solution (peut-être déjà connue) du problème d'élémentaires de l'agrégation de 1886, que j'ai trouvée de mon côté lors de la lecture de l'article de M. Fouché.

On donne un cercle et deux points P et Q sur un diamètre; on joint PA, QB et l'on demande le lieu de M qui est un cercle, Q et P étant les deux centres de similitude. On demandait comme troisième partie du problème : 3° A' et B' étant les deuxièmes points d'intersection des droites MA et MB, de trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle MA'B'.

Or, passant par A' et M, le cercle est isogonal du groupe correspondant au centre de similitude extrême P; passant par B' et M, il appartient aussi au groupe du centre Q. Appartenant aux deux groupes, ce cercle coupe orthogonalement le cercle donné O, de sorte que son centre est l'intersection des tangentes en A' et B' au cercle O.

L'ensemble des cercles circonscrits à A'B'M est donc le faisceau des cercles coupant orthogonalement le cercle donné et le cercle lieu de M. C'est le faisceau bien connu étudié par Poncelet, composé de cercles admettant PQ comme axe radical, faisceau réciproque de celui défini par le cercle O et le cercle lieu de M. Le lieu du centre est une droite, etc.

E. Marchant,
Professeur au lycée de Versailles.