NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. GODEFROY

Démonstrations d'un théorème de Steiner et d'un théorème de Newton

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 137-141

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__137_0>

DÉMONSTRATIONS D'UN THÉORÈME DE STEINER ET D'UN THÉORÈME DE NEWTON;

Par M. R. GODEFROY,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

I. Le théorème de Steiner est le suivant :

Le point de concours des hauteurs de tout triangle circonscrit à la parabole est sur la directrice.

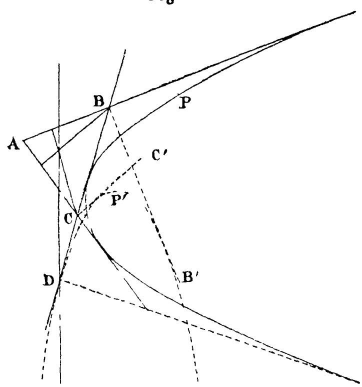
La démonstration que nous allons en donner repose sur ces deux propositions connues :

1° *Si par chaque point d'une tangente à une parabole* P, *on mène la perpendiculaire à la deuxième tangente issue de ce point, toutes ces perpendiculaires et la tangente elle-même enveloppent une parabole* P'. *Les axes de* P *et* P' *sont rectangulaires.*

2° *Un triangle étant circonscrit à une parabole, le diamètre correspondant au point de contact d'un côté et les parallèles menées de ses extrémités aux côtés opposés du triangle sont concourantes.*

Voici cette démonstration : le triangle ABC (*fig.* 1) étant circonscrit à une parabole P, la parabole P', dont il est parlé ci-dessus, qui touche les perpendiculaires BB', CC' à AB, AC est tangente à BC au point D, où la tangente de P perpendiculaire à BC rencontre cette droite. Le diamètre de P' issu de ce point, étant parallèle à l'axe de P' est perpendiculaire à l'axe de P; mais, il passe par le sommet d'un angle droit circonscrit à P : c'est donc la directrice de cette courbe. Cette droite doit passer au point de rencontre des parallèles menées de B et C aux tangentes BB′, CC′ de P′. Ces parallèles étant deux des hauteurs du triangle ABC, il est démontré que

Fig. 1.



le point de concours des hauteurs du triangle est sur la directrice de la parabole.

Nous ne donnons ici cette démonstration qu'en raison de sa nouveauté; elle n'a pas, il faut l'avouer, une grande simplicité. Il n'en est pas de même des résultats qui suivent.

II. Ces deux théorèmes :

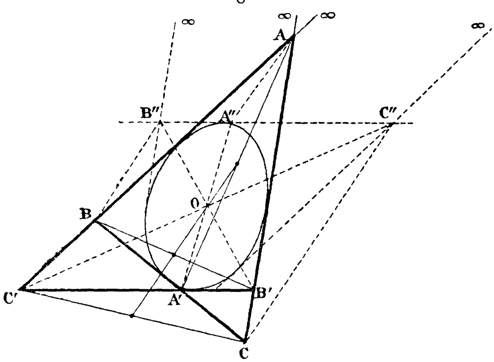
Le centre de toute conique inscrite à un quadrilatère est sur la droite qui joint les milieux des diagonales (Newton);

Les hauteurs de tout triangle circonscrit à la parabole se coupent sur la directrice (Steiner)

peuvent se déduire l'un de l'autre. Nous allons d'abord établir cette relation, donner ensuite du théorème de Newton une démonstration directe, et énoncer en terminant une propriété projective des sections coniques qui aura déjà naturellement apparu parmi les résultats que nous allons d'abord obtenir.

Partons du théorème de Steiner. Nous projetons la parabole suivant une conique dont le centre O (*fig.* 2) est la projection du foyer de la parabole. La directrice se projette suivant une droite à l'infini et le triangle circonscrit à la parabole suivant le triangle ABC circonscrit

Fig. 2.



à la conique. La tangente au sommet de la parabole et la droite de l'infini de son plan se projettent respectivement suivant les tangentes parallèles A′B′C′, A″B″C″ de la conique. Les rayons focaux des points où cette tangente au sommet rencontre les côtés du triangle donnent dans la projection les droites OA′, OB′, OC′. Les hauteurs du triangle sont parallèles à ces rayons : leurs transformées seront les droites AA″, BB″, CC″ passant aux points où OA′, OB′, OC′ rencontrent la tangente A″B″C″. Les hauteurs se rencontrant sur la directrice, les droites AA″, BB″, CC″ se rencontrent sur une droite à l'infini, autrement dit, sont parallèles. Ce résultat équivaut au théorème de Newton. On en déduit, en effet (en considérant les triangles AA′A″, BB′B″, CC′C″ dans lesquels O est le milieu commun des trois côtés A′A″, B′B″, C′C″), qu'une même droite contient le centre de la conique et les milieux des diagonales du quadrilatère circonscrit ABCA'B'C'.

M. John.-C Moore a donné du théorème de Steiner une démonstration remarquable qui permet de le regarder comme une conséquence immédiate du théorème de Brianchon (voir SALMON, *Sections coniques*, Ch. XIV, p. 414). Ce procédé, ne faisant usage que de propriétés projectives, est applicable au théorème de Newton. Nous avons ainsi la démonstration suivante.

Soit le quadrilatère ABCA'B'C' (*fig.* 2) circonscrit a une conique. Les droites qui joignent chaque point de rencontre de deux côtés au point de rencontre des tangentes parallèles aux deux autres sont parallèles. Ainsi BB'', CC'' sont parallèles en vertu duthéorème de Brianchon appliqué à l'hexagone ∞ BC ∞ B''C''∞ formé par les six tangentes issues des points B, C, B'', C''. Les trois droites BB'', CC'', $\infty\infty$ sont concourantes, autrement dit BB'', CC'' sont parallèles : même démonstration pour la droite AA'' associée à l'une des précédentes.

Ceci établi, le théorème de Newton s'en déduit de suite comme ci-dessus.

On peut même éviter d'invoquer le théorème de Brianchon, en procédant de la manière suivante.

Les droites BB'', CC'' (*fig.* 2) engendrent, lorsque B''C'' roule sur la conique, des faisceaux homographiques où trois couples sont formés de rayons parallèles (pour les positions ou B''C'' coincide avec un côté du triangle ABC); par suite, BB'', CC'' sont parallèles, d'où se conclut immédiatement le théorème de Newton.

Ces deux dernières démonstrations, et surtout la seconde, se développent, comme on le voit, en quelques lignes : elle sont d'une simplicité qui ne laisse rien a désirer.

Ce fait que les droites AA'', BB'', CC'' sont parallèles n'est en définitive qu'une forme projective spéciale du théorème de Newton. On en déduit de suite, par projection, le théorème suivant :

Deux quadrilatères $ABCA'B'C'$, $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$ *étant circonscrits à une conique ; si les points de rencontre des côtés homologues sont en ligne droite, cette même droite contient le point de concours des six droites* $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$, $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$,

et son corrélatif que nous n'énonçons pas.

Ces deux théorèmes sont susceptibles d'être présentés sous une forme différente ; on peut dire en effet :

Deux triangles homologiques étant circonscrits à une conique, les droites qui joignent les sommets de l'un aux points où une tangente quelconque coupe les côtés correspondants de l'autre concourent sur l'axe d'homologie,

et corrélativement :

Deux triangles homologiques étant inscrits à une conique, les rayons menés d'un point quelconque de la conique aux sommets de l'un rencontrent les côtés correspondants de l'autre en trois points en ligne droite avec le centre d'homologie.

Ces théorèmes se démontrent directement, de la manière la plus simple, au moyen des théorèmes de Brianchon et de Pascal. Il n'expriment pas autre chose, du reste, que ces propriétés fondamentales, mais appliquées à des systèmes de tangentes et de points, combinés de manière à présenter à l'esprit une image différente.