Nouvelles annales de mathématiques

R. Godefroy

Théorèmes sur les coniques (applications de la méthode des polaires réciproques)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 106-116

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__106_1>

THÉORÈMES SUR LES CONIQUES.

(APPLICATIONS DE LA MÉTHODE DES POLAIRES RÉCIPROQUES);

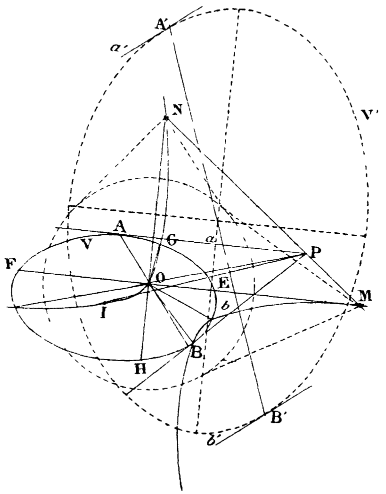
PAR M. R. GODEFROY,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Il est question, dans ce qui suit, de diverses applications de la méthode des polaires réciproques. Nous étudierons la transformation d'une conique quelconque en prenant un cercle pour conique auxiliaire et supposant le centre du cercle d'abord en dehors du périmètre de la conique puis sur la courbe. Les résultats obtenus conduiront à d'élégants théorèmes sur les sections coniques.

I. Soient V une conique quelconque, et V′ sa polaire réciproque, le centre O du cercle auxiliaire n'étant pas sur la conique V. Nous nous proposons de chercher la solution du problème suivant :

Déterminer les points du plan de la conique V *auxquels correspondent les axes de la conique* V′.

Aux extrémités A′, B′ d'un diamètre de V′ correspondent deux tangentes a, b de V. Leurs points de contact A et B, correspondant aux tangentes parallèles a', b' de V′, sont sur une droite passant par O. Le point de rencontre P de a, b correspond à la droite A′B′. Si cette droite est un axe de V′, le diamètre A′ B′ est perpendiculaire aux tangentes a', b' en ses extrémités; par suite, la droite AB sera perpendiculaire au rayon OP. Soit I le centre de la conique V; le point M correspondant à un axe de V′ se trouve à l'intersection d'un diamètre



IM et d'une perpendiculaire OM, issue du point fixe O, au diamètre conjugué de IM. Le point M est par suite sur l'hyperbole d'Apollonius relative à la conique V et au point O (Chasles, *Traité des sections coniques*, p. 142). Il appartient du reste à la polaire de O par rapport à V. Donc :

Les axes de la polaire réciproque d'une conique correspondent aux points où la polaire de l'origine coupe l'hyperbole d'Apollonius relative à ce point.

La polaire de l'origine correspond naturellement au centre de la polaire réciproque.

Soient M et N les deux points correspondant aux axes. OM, ON sont les directions axiales de V′. Ces droites correspondent aux points à l'infini sur les axes de V′. Si E, F, G, H sont leurs points de rencontre avec V, les axes de V′ sont proportionnels à

$$\frac{1}{\mathrm{OE}}+\frac{1}{\mathrm{OF}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mathrm{OG}}+\frac{1}{\mathrm{OH}}.$$

Voici, en outre, quelques remarques intéressantes.

L'angle droit MON est inscrit à l'hyperbole d'Apollonius : cette hyperbole étant équilatère, il résulte du théorème de Frégier que la droite MN est parallèle à la normale en O à cette courbe. On retrouve ainsi cette propriété.

L'hyperbole d'Apollonius, relative à une conique V *et à un point* O, *a sa normale en* O *parallèle à la polaire de* O *par rapport à la conique* V.

Nous avons uniquement supposé jusqu'ici que le point O n'était pas sur la conique V ; si, en particulier, il se trouve à l'extérieur du périmètre de V, les points M et N correspondant aux axes de V′ sont les points d'intersection de la polaire de O avec les bissectrices des angles formés par le système des tangentes issues de O. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Les polaires d'un point fixe par rapport à une série de coniques homothétiques sont divisées harmoniquement par ces courbes et leur hyperbole d'Apollonius relative au point fixe.

Considérons [1] une conique V′ et un point fixe O.

[1] Le lecteur est prié de faire les figures relatives au reste de la Note.

Appelons P′ l'hyperbole d'Apollonius relative à ce point. Elle passe par les points suivants : le point O, le centre I′ de V′, les pieds A′, B′, C′, D′ des normales à V′ issues de O et les points M′, N′ correspondant aux axes de V, polaire réciproque de V′ par rapport au point O. Dans la transformation, l'hyperbole équilatère P′ passant par l'origine correspond à une parabole P dont les tangentes issues de O sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole, c'est-à-dire aux axes de V′. Les points I′, A′, B′, C′, D′, M′, N′ correspondent à d'autres tangentes de cette parabole. Ce sont, respectivement, la polaire de O par rapport à V, les tangentes à la conique V menées par les pieds de ses normales issues de O (1) et les axes de V. On a ainsi ce théorème :

La parabole qui touche les tangentes à une conique V, menées par les pieds des normales à cette conique issues d'un point O, est également tangente à la polaire du point O, aux axes de la conique et aux parallèles menées par le point O aux axes de la conique polaire réciproque de V par rapport à ce point.

Cette parabole est celle dont il est question dans ce théorème de Chasles :

Si, autour d'un point pris dans le plan d'une section conique, on fait tourner une transversale, et que par son pôle on mène une perpendiculaire à cette droite, ces perpendiculaires successives enveloppent une parabole qui est tangente à la polaire du point fixe et aux tangentes à la conique menées par les pieds de ses nor-

(1) D'après cette remarque : « Une conique et sa polaire réciproque par rapport à une circonférence de centre O ont les mêmes normales partant de O. » (MANNHEIM, *Messenger of Mathematics*, new series, n° 229 ; 1890.)

males abaissées de ce point (*Traité des sections coniques*, p. 145).

Et dans une Note de M. Mannheim : *Sur une parabole liée à une conique par certaines propriétés remarquables* (*Messenger of Mathematics*, new series, n° 231, 1890), dans laquelle sont citées, outre les axes de V et la polaire de O, cinq autres tangentes remarquables de la parabole.

Il est intéressant d'arriver par le procédé exposé ci-dessus à une partie des résultats connus, et de montrer en outre que les tangentes issues de O sont parallèles aux axes de la polaire réciproque, ce qui permet d'ajouter :

La directrice de la parabole considérée est la droite qui joint le point fixe au centre de la conique.

On pourrait, pour établir les différents résultats du commencement de cette Note, prendre comme point de départ la démonstration de M. Mannheim et opérer en sens inverse la transformation précédente.

II. Supposons maintenant que le centre O du cercle auxiliaire se trouve sur la conique V. La transformée V′ est une parabole dont l'axe est parallèle à la normale en O à V et qui est tangente aux perpendiculaires menées de O aux asymptotes de V.

Cherchons à quels éléments du système de V correspondent le foyer et la directrice de V′.

A un système de deux tangentes rectangulaires a', b' de V′ correspond un système de deux points A, B de V tels que l'angle AOB est droit. A la directrice de V′ correspond donc le point fixe par où passe la droite AB, c'est-à-dire le point de Frégier relatif au point O de V.

Au foyer de V', correspond la polaire du point de Frégier.

Cette transformation démontre le théorème de Frégier et indique en même temps que les propriétés de la parabole relatives au foyer et à la directrice se traduiront dans les théorèmes transformés par des propriétés des coniques quelconques relatives à un point de Frégier et à sa polaire, que nous appellerons *droite de Frégier,* pour abréger le langage.

Ajoutons que la droite à l'infini, la tangente au sommet et l'axe de V' correspondent respectivement, dans le système de la conique V, au point O, au deuxième point d'intersection de la normale en O avec V et au pôle de cette normale.

Nous obtiendrons un élégant théorème sur la droite de Frégier, en transformant cette propriété de la parabole.

Par deux points A', B' *d'une parabole* H', *on mène les rayons focaux et les parallèles à l'axe. Ces quatre droites sont tangentes à un cercle ayant pour centre le pôle* O *de* $A'B'$.

Prenons comme cercle auxiliaire le cercle de l'énoncé. A la parabole H' correspond une hyperbole H passant par le point O. Aux points $A'B'$ correspondent les asymptotes de la courbe, aux vecteurs focaux de A', B' et aux parallèles à l'axe menées de ces points, correspondent respectivement les points où les asymptotes rencontrent la droite de Frégier relative au point O et la tangente à l'hyperbole en ce point. Quant au cercle, il se transforme en lui-même. Il est donc démontré que la circonférence ayant pour diamètre le segment d'une tangente à l'hyperbole compris entre les asymptotes admet comme deuxième corde d'intersection avec le système des asymptotes la droite de Frégier relative à son point de contact, ce qui peut s'énoncer :

La droite de Frégier, relative à un point d'une hyperbole, passe par les projections sur les asymptotes des points où ces droites rencontrent la tangente au point considéré.

Pour une hyperbole équilatère de centre I, la droite de Frégier d'un point O de la courbe est la perpendiculaire en I à OI. Le point de Frégier est alors à l'infini sur la normale en O.

Voici une démonstration analytique fort simple du théorème énoncé ci-dessus, sous une forme un peu plus générale.

Prenons, comme axes de coordonnées, la tangente et la normale à l'hyperbole en O.

L'équation de l'hyperbole est

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ey = 0.$$

celle d'une hyperbole homothétique sera

$$(1) \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ey + \lambda = 0.$$

Le point de Frégier ayant pour coordonnées

$$x = 0, \qquad y = -\frac{2e}{a+c},$$

la droite de Frégier a pour équation

$$(2) \qquad (a-c)y - 2bx - 2e = 0.$$

Quant à la tangente, son équation est

$$(3) \qquad y = 0.$$

Par l'intersection de la conique (1) et des droites (2) et (3) passe la courbe

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2cy + \lambda + (a-c)y^2 - 2bxy - 2ey = 0.$$

qui n'est autre que le cercle

$$a(x^2+y^2)+\lambda=0.$$

Donc :

La tangente en un point d'une hyperbole coupe une hyperbole homothétique en deux points. La deuxième corde d'intersection de cette courbe avec le cercle ayant pour diamètre le segment compris entre ces deux points est la droite de Frégier relative au point de contact de la tangente.

On peut tirer de là une conséquence intéressante.

Une corde quelconque AB d'une hyperbole équilatère H est tangente à une hyperbole équilatère homothétique H'. Considérons le cercle décrit sur cette corde comme diamètre. Il coupe l'hyperbole H en deux nouveaux points C et D. La corde CD est la droite de Frégier relative au point de contact de AB et de H'. Cette droite passe donc au centre commun des deux courbes; par suite :

Si l'une des cordes communes à un cercle et à une hyperbole équilatère est un diamètre du cercle, sa conjuguée est un diamètre de l'hyperbole.

Proposition bien connue ([1]).

([1]) Voici encore à ce sujet une remarque curieuse :

Une élimination très simple conduit au théorème suivant:

Le centre des moyennes distances des points d'intersection d'une hyperbole équilatère et d'un cercle est le milieu de la droite des centres.

On en déduit :

Les droites qui joignent les milieux de deux cordes d'intersection conjuguées au centre de l'une des courbes sont égales et parallèles aux droites joignant les mêmes points au centre de l'autre courbe.

En particulier,

Si l'une des cordes communes est un diamètre de l'une des courbes, sa conjuguée est un diamètre de l'autre.

Prenons ce théorème sur la parabole :

Le cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes passe par le foyer.

Il donne par transformation :

Un triangle étant inscrit à une conique, pour tout point de la courbe il existe une conique ayant un foyer en ce point et touchant la droite de Frégier du point et les trois côtés du triangle.

Il suffit de remarquer que les projections d'un foyer d'une conique sur ses tangentes appartiennent à un cercle, pour déduire de l'énoncé précédent ce théorème :

Les projections d'un point quelconque d'une conique, sur les trois côtés d'un triangle inscrit à la courbe et sur la droite de Frégier du point, appartiennent au même cercle.

Cinq points quelconques étant sur une conique, on aura le théorème suivant :

Quatre points pris trois à trois forment quatre triangles : les quatre cercles passant respectivement par les projections d'un point quelconque sur les côtés de ces triangles se coupent en un même point.

Lequel s'obtient, du reste, par transformation directe du théorème bien connu concernant les cercles circonscrits aux triangles formés par les côtés d'un quadrilatère pris trois à trois.

Nous pourrions donner ici différents théorèmes sur le point et la droite de Frégier, transformés de théorèmes concernant le foyer et la directrice de la parabole, mais, ceci ne présentant aucune difficulté, il paraît inutile d'insister outre mesure sur ce sujet. Nous nous bornerons, pour terminer, à considérer le cas particulier de l'hyperbole équilatère.

Voici les propriétés spéciales à cette transformation supposée toujours faite dans les mêmes conditions. Les perpendiculaires issues de O aux asymptotes de l'hyperbole équilatère H sont rectangulaires; le point O appartient à la directrice de la parabole H'; l'axe de cette courbe étant parallèle à la normale en O à H, la tangente de H en O est la directrice de la parabole. Le centre de l'hyperbole équilatère correspond à la corde de contact des deux tangentes rectangulaires de la parabole; la perpendiculaire menée du centre I de l'hyperbole équilatère au rayon OI correspond au foyer de la parabole.

C'est cette dernière propriété que nous allons immédiatement utiliser.

On transforme, en effet, la propriété bien connue, déjà rappelée ci-dessus, du cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes de la parabole, en celle-ci :

Un triangle étant inscrit à une hyperbole équilatère de centre I, *tout point* O *de la courbe est le foyer d'une conique touchant les trois côtés du triangle et la perpendiculaire en* I *à* OI.

Les projections de O sur ces tangentes appartiennent à un même cercle, mais l'une d'elles est le centre de la courbe : par conséquent,

Le cercle passant par les projections d'un point quelconque de l'hyperbole équilatère sur les côtés d'un triangle inscrit passe aussi par le centre de la courbe.

Théorème qui n'est qu'un cas particulier d'un théorème sur l'hyperbole énoncé ci-dessus. On aurait pu l'en déduire immédiatement, en remarquant qu'ici la droite de Frégier du point O n'est autre que la perpendiculaire en I à OI.

Le point de concours des hauteurs de tout triangle, inscrit à une hyperbole équilatère, étant un point de la courbe, on peut énoncer la proposition suivante :

Le cercle des neuf points d'un triangle inscrit à une hyperbole équilatère passe par le centre de la courbe.

Ce cas particulier n'est pas nouveau.

On aura aussi le théorème suivant :

Les quatre cercles passant respectivement par les projections de chacun des sommets d'un quadrilatère quelconque sur les côtés du triangle formé par les trois autres concourent en un même point, centre de l'hyperbole équilatère circonscrite au quadrilatère.

En particulier :

Quatre points étant pris sur un cercle, les droites de Simpson de chacun de ces points relativement au triangle formé par les trois autres se coupent au même point.