Exercices. Questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. S1-S48 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__S1_0>

EXERCICES.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1621. La somme des carrés des axes d'une ellipse E, doublement tangente à une ellipse donnée et qui passe par les foyers de cette courbe, est constante quelle que soit cette ellipse E. (MANNHEIM.)

1622. On considère une des coniques du faisceau déterminé par quatre points donnés A, B, C, D, et deux autres points fixes P et Q situés dans le plan de la conique. La droite PC rencontre la conique en C′, la droite QD rencontre la même conique en D′. Montrer que la droite C′D′ passe par un point fixe, quelle que soit la conique du faisceau. (BARISIEN.)

1623. Les milieux des six cordes d'intersection de deux coniques et le centre des deux coniques sont une même conique. (BARISIEN.)

QUESTIONS RÉSOLUES.

Question 1574.

On considère tous les points du plan d'une ellipse d'où l'on peut mener à cette courbe deux normales simples et une normale double; on demande le lieu du pôle de la corde qui joint le pied de la normale double au pied d'une normale simple. (CHAMBON.)

SOLUTION

Par M. A. RENON.

Soient α, β, α', β' les coordonnées des pôles des droites qui joignent le pied M de la normale double aux pieds des deux normales simples, l'ellipse étant rapportée à ses axes.

Soient $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$ les coordonnées de M. La tangente en M à l'ellipse a pour équation

$$x\frac{\cos\varphi}{a} + y\frac{\sin\varphi}{b} - 1 = 0.$$

Les deux points, dont les coordonnées sont α, β, α', β', devant se trouver sur cette tangente, on a

$$(1) \qquad \alpha\frac{\cos\varphi}{a} + \beta\frac{\sin\varphi}{b} - 1 = 0,$$

$$(2) \qquad \alpha'\frac{\cos\varphi}{a} + \beta'\frac{\sin\varphi}{b} - 1 = 0.$$

Mais, la normale en M étant double, les points (α, β), (α', β') sont deux sommets opposés d'un quadrilatère normal circonscrit et l'on a

$$(3) \qquad \alpha\alpha' = -a^2, \qquad \beta\beta' = -b^2,$$

On obtiendra donc l'équation du lieu en éliminant α', β' et φ entre (1), (2) et (3). Cette élimination donne

$$(b^2x^2 - a^2y^2)^2 = b^2y^2(a^2 + x^2)^2 + a^2x^2(b^2 + y^2)^2 = 0.$$

Ce lieu est donc une courbe du quatrième degré. Elle est tangente à l'ellipse en ses quatre sommets; elle admet pour asymptotes les côtés du rectangle construit sur les axes.

Question 1604.

Démontrer que, si une parabole P *touche les diamètres conjugués égaux d'une ellipse* E, *les cordes communes à l'ellipse et aux cercles osculateurs à cette courbe aux points de contact des tangentes communes à* P *et à* E *passent par un même point; la polaire de ce point par rapport à l'ellipse est tangente à la parabole.* (LEMAIRE.)

SOLUTION

Par M. BARISIEN.

Prenons pour axes de coordonnées les axes de l'ellipse. L'équation des diamètres conjugués égaux de l'ellipse est

$b^2x^2 - a^2y^2 = 0$; celle d'une conique qui leur est tangente peut s'écrire

$$\lambda(b^2x^2 - a^2y^2) + (ux + vy - 1)^2 = 0,$$

$ux + vy - 1 = 0$ représentant la droite qui joint les points de contact.

Pour que cette conique soit une parabole, on doit avoir

$$\lambda = \frac{b^2v^2 - a^2u^2}{a^2b^2},$$

ce qui donne, pour l'équation de la parabole,

$$(1) \qquad (b^2vx + a^2uy)^2 - 2a^2b^2(ux + vy) + a^2b^2 = 0.$$

L'équation d'une tangente à l'ellipse de coefficient angulaire m est

$$(2) \qquad y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

En portant cette valeur de y dans (1), on aura une équation du second degré en x. En exprimant que les racines sont égales, on trouve la condition de tangence de la droite (2) avec la parabole : on a ainsi, après avoir supprimé le facteur étranger $(a^2u^2 - b^2v^2)$,

$$(3) \qquad 4(a^2m^2 + b^2)(a^2mu + b^2v)^2 = (a^2m^2 - b^2)^2.$$

Telle est l'équation donnant les quatre valeurs de m correspondant aux quatre tangentes communes.

Le cercle osculateur, au point de contact de la tangente (2), coupe l'ellipse suivant une droite passant par le point de contact et ayant pour coefficient angulaire m, en vertu de cette propriété qu'une ellipse et un cercle se coupent suivant des droites également inclinées sur les axes de l'ellipse. On trouve ainsi, pour l'équation de la corde commune à l'ellipse et au cercle osculateur,

$$(4) \qquad y + mx = \frac{b^2 - a^2m^2}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}},$$

ou, en tenant compte de la relation (3).

$$y + mx = 2(a^2mu + b^2v).$$

Sous cette forme, cette équation montre que, quelle que soit l'une des quatre valeurs de m données par (3), la droite (4) passe par le point $x = 2a^2u$, $y = 2b^2v$.

La polaire de ce point, par rapport à l'ellipse, a pour équation

$$ux + vy = \frac{1}{2}.$$

En cherchant l'intersection de cette droite avec la parabole (1), on voit qu'elle est tangente au point dont les coordonnées sont

$$x = \frac{a^2u}{2(a^2u^2 - b^2v^2)}, \qquad y = \frac{-b^2v}{2(a^2u^2 - b^2v^2)}.$$

Question 1545.

Si l'on considère les trois normales menées d'un point à une parabole et le triangle formé en menant les tangentes à leurs pieds; si l'on suppose ensuite que le point, d'où l'on mène les normales à la parabole, se déplace sur un diamètre de la courbe :

1° *Tous les triangles des tangentes ont leurs sommets sur une hyperbole équilatère;*

2° *Tous ces triangles ont même point de rencontre des trois hauteurs;*

3° *Les cercles des neuf points de ces triangles passent par le sommet de la parabole;*

4° *Les centres des cercles des neuf points sont sur un même diamètre.*

5° *Si l'on considère trois normales quelconques à une parabole (ne se coupant pas au même point), le point de rencontre des hauteurs du triangle des normales et le point de rencontre du triangle des tangentes sont sur un même diamètre.* (Chambenac.)

SOLUTION

Par M. Brocard.

Soient

A, B, C les pieds des normales issues d'un point P à la parabole ayant S pour sommet et F pour foyer;

A′, B′, C′ les intersections des tangentes à la parabole aux points A, B, C;
H, H′ les orthocentres des triangles ABC, A′B′C′.

L'équation de la parabole étant

$$y^2 = 2px,$$

les points B, C ont pour coordonnées

$$(\mathrm{B}) \qquad y = -b, \qquad x = \frac{b^2}{2p},$$

$$(\mathrm{C}) \qquad y = -c, \qquad x = \frac{c^2}{2p},$$

les normales en ces points ont pour équations

$$(\mathrm{BP}) \qquad y + b = \frac{b}{p}\left(x - \frac{b^2}{2p}\right),$$

$$(\mathrm{CP}) \qquad y + c = \frac{c}{p}\left(x - \frac{c^2}{2p}\right),$$

et les coordonnées de leur point d'intersection P sont

$$(\mathrm{P}) \qquad x = p + \frac{b^2 + bc + c^2}{2p}, \qquad y = \frac{bc(b+c)}{2p^2}.$$

On sait que le centre de gravité du triangle ABC doit se trouver sur SF; on a donc pour coordonnées du point A

$$(\mathrm{A}) \qquad x = \frac{(b+c)^2}{2p}, \qquad y = b + c.$$

Cela posé, les tangentes AB′C′, BA′C′, CA′B′ ont pour équations

$$(\mathrm{AB'C'}) \qquad y - \frac{p}{b+c}\,x = \frac{b+c}{2},$$

$$(\mathrm{BA'C'}) \qquad y + \frac{p}{b}\,x = -\frac{b}{2},$$

$$(\mathrm{CA'B'}) \qquad y + \frac{p}{c}\,x = -\frac{c}{2}.$$

Les points A', B', C' ont donc pour coordonnées

$$(\mathrm{A}') \qquad x = \frac{bc}{2p}, \qquad y = -\frac{b+c}{2},$$

$$(\mathrm{B}') \qquad x = -\frac{c(b+c)}{2p}, \qquad y = \frac{b}{2},$$

$$(\mathrm{C}') \qquad x = -\frac{b(b+c)}{2p}, \qquad y = \frac{c}{2}.$$

L'orthocentre H' est déterminé par les deux équations

$$(\mathrm{B'H'}) \qquad y - \frac{b}{2} = \frac{b}{p}\left[x + \frac{c(b+c)}{2p}\right],$$

$$(\mathrm{C'H'}) \qquad y - \frac{c}{2} = \frac{c}{p}\left[x + \frac{b(b+c)}{2p}\right],$$

d'où

$$(\mathrm{H}') \qquad x = -\frac{p}{2}, \qquad y = \frac{bc(b+c)}{2p^2}.$$

Ainsi l'orthocentre H' des triangles A'B'C' des tangentes est sur la directrice de la parabole.

Ce résultat pouvait être prévu. En effet, la circonférence circonscrite au triangle A'B'C' passe par le foyer F. Par conséquent, les projections du point F sur les trois côtés du triangle A'B'C' doivent se trouver en ligne droite. Cette *ligne pedale* (droite de Simpson) n'est autre que la tangente Sy au sommet S de la parabole; et, par une propriété connue, on sait que le milieu V de la distance de l'orthocentre H' au point F considéré sur la circonférence est sur le cercle E des neuf points, puisque ce cercle peut être défini comme figure semblable au cercle circonscrit, le centre de similitude étant l'orthocentre et le rapport de similitude, $\frac{1}{2}$ (*voir Nouvelles Annales*, questions 21, 708, 710, résolues 2e série, t. XVI et IV).

On remarque immédiatement que les points A', B', C' se trouvent sur une même hyperbole équilatère; car, pour chacun d'eux, on a

$$xy = -\frac{bc(b+c)}{4p},$$

et, par une propriété connue, l'hyperbole équilatère circonscrite à un triangle A'B'C' passe par l'orthocentre H'.

Le centre de gravité G′ du triangle A′B′C′ a pour coordonnées

$$(\mathrm{G}') \qquad x = -\frac{b^2 + bc + c^2}{6p}, \qquad y = 0.$$

Il se trouve donc sur l'axe SF de la parabole, comme celui du triangle ABC des pieds des normales issues d'un même point P.

Ces remarques vont nous faciliter la détermination des coordonnées du centre O′ du cercle A′B′C′. Il suffit d'exprimer que les points O′, G′, H′ sont en ligne droite et que les différences de leurs coordonnées respectives sont dans le rapport des segments O′G′, G′H′, c'est-à-dire 2. On trouve ainsi

$$(\mathrm{O}') \quad x = -\frac{b^2 + bc + c^2 - p^2}{4p}, \qquad y = -\frac{bc(b+c)}{4p^2}.$$

Sachant que le cercle ABC passe par le sommet S de la parabole et que son équation doit être de la forme

$$x^2 + y^2 - 2\mathrm{M}x - 2\mathrm{N}y = 0,$$

il suffit d'exprimer que ce cercle passe aux points B et C pour avoir l'équation

$$x^2 + y^2 - \frac{b^2 + bc + c^2 + 4p^2}{2p}\,x - \frac{bc(b+c)}{4p^2}\,y = 0,$$

et l'on vérifie aisément que ce cercle passe au point A.

Le centre O a donc pour coordonnées

$$(\mathrm{O}) \qquad x = \frac{b^2 + bc + c^2 + 4p^2}{4p}, \qquad y = \frac{bc(b+c)}{8p^2}.$$

Ainsi il est a une distance de l'axe de la parabole égale au quart de celle du point P à cet axe.

On en déduit que la distance de l'orthocentre H est égale à la moitié de celle-ci et, par suite, que O′H est un diamètre de la parabole.

Même conclusion pour la ligne H′P.

Les points A, B, C, H sont également sur une hyperbole équilatère qui a pour équation

$$\left(x - \frac{b^2 + bc + c^2}{2p}\right) y = \frac{bc(b+c)}{2p},$$

et, puisque l'orthocentre H a pour ordonnée

$$(\mathrm{H}) \qquad y = -\frac{bc(b+c)}{4p^2},$$

on voit que son abscisse doit avoir pour expression

$$(\mathrm{H}) \qquad x = \frac{b^2 + bc + c^2 - 4p^2}{2p}.$$

On reconnaît, en outre, que le point P est sur la même hyperbole équilatère.

Le centre de cette conique est à une distance de la tangente Sy triple de celle du centre de gravité G′ du triangle A′B′C′.

Pour établir que le cercle E des neuf points du triangle A′B′C′ passe par le point S, il suffit de montrer que la droite H′S rencontre le cercle A′B′C′ sur l'ordonnée du point F, ou, plus simplement, de remarquer que le point V, milieu de H′F, a pour ordonnée la moitié de celles des points H′, P.

Les deux hyperboles équilatères ABCHP, A′B′C′H′ se rencontrent en un point L dont l'abscisse est égale et de signe contraire à celle du centre de gravité G′ du triangle A′B′C′.

Il ne reste plus qu'à démontrer la propriété générale énoncée au n° 5.

Le triangle des trois normales aux points A, B, C supposés quelconques est défini par les équations

$$y - a = -\frac{a}{p}\left(x - \frac{a^2}{2p}\right), \qquad \ldots,$$

ou, en posant

$$a = 2mp, \qquad b = 2np, \qquad c = 2qp,$$

$$y - 2mp = -2m(x - 2m^2p),$$

$$y - 2np = -2n(x - 2n^2p),$$

$$y - 2qp = -2q(x - 2q^2p).$$

Les sommets A″, B″, C″ du triangle formé par ces trois droites ont pour coordonnées

$$(\mathrm{C}'') \qquad \begin{cases} x = p + 2p(m^2 + mn + n^2), \\ y = -4pmn(m+n), \end{cases}$$

. . . .

L'orthocentre H″ est défini par les équations

$$y + \frac{ac(a+c)}{2p^2} = \frac{p}{b}\left(x - p - \frac{a^2 + ac + c^2}{2p}\right),$$

ou bien

$$y - 4pnm(m+n) = -\frac{1}{2q}[x - p - 2p(m^2 + mn + n^2)],$$

$$y - 4pqm(m+q) = -\frac{1}{2n}[x - p - 2p(m^2 + mq + q^2)],$$

d'où

$$y = -p[m + n + q + 2mnq].$$

D'autre part, le triangle des trois tangentes aux points A, B, C est défini par les équations

$$y - \frac{p}{a}x = -\frac{a}{2},$$

$$y - \frac{p}{b}x = -\frac{b}{2},$$

$$y - \frac{p}{c}x = -\frac{c}{2},$$

et il a pour sommets α, β, γ dont les coordonnées sont

$$(\alpha) \qquad x = -\frac{bc}{2p}, \qquad y = -\frac{b+c}{2},$$

$$(\beta) \qquad x = -\frac{ac}{2p}, \qquad y = -\frac{a+c}{2},$$

$$(\gamma) \qquad x = -\frac{ab}{2p}, \qquad y = -\frac{a+b}{2}.$$

Par conséquent, l'orthocentre H′ est déterminé par les droites

$$y + \frac{a+b}{2} = -\frac{c}{p}\left(x + \frac{ab}{2p}\right),$$

$$y + \frac{a+c}{2} = -\frac{b}{p}\left(x + \frac{ac}{2p}\right),$$

d'où

$$y = -p\frac{1}{2p^2}[abc + p^2(a + b + c)],$$

ou bien

$$y = -p(m + n + q + 2mnq),$$

c'est-à-dire la même ordonnée que pour l'orthocentre H″.

Comme vérification, il suffit de faire $a = -(b + c)$ pour retrouver l'expression de l'ordonnée des points H′ et P.

Les deux hyperboles dont il a été question se rencontrent en un point L dont l'abscisse est égale et de signe contraire à celle du centre de gravité G′ du triangle A′B′C′.

Question 1622.

On considère une des coniques du faisceau déterminé par quatre points donnés A, B, C, D, *et deux autres points fixes* P *et* Q *situés dans le plan de la conique. La droite* PC *rencontre la conique en* C′, *la droite* QD *rencontre la même conique en* D′. *Montrer que la droite* C′D′ *passe par un point fixe, quelle que soit la conique du faisceau.*

(BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. AUDIBERT.

Soit ABCD un quadrilatère dont les côtés opposés AB et CD prolongés se coupent en O.

Prenons OB pour axe des ordonnées et OD pour ligne des abscisses. Posons en outre

$$OA = a, \qquad OB = b, \qquad OC = c, \qquad OD = d.$$

Une des coniques circonscrites au quadrilatère sera représentée par la relation

$$(1) \qquad \lambda xy + \left(\frac{y}{a} + \frac{x}{c} - 1\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{x}{d} - 1\right) = 0.$$

Les quatre points C, D, C′, D′ déterminent un autre quadrilatère dont les côtés auront respectivement pour équation

CD.	$y = 0,$
CC′.	$y - \alpha(x - c) = 0,$
DD′.	$y - \sigma(x - d) = 0,$
C′D′.	$\frac{y}{m} + \frac{x}{n} - 1 = 0,$

les paramètres m et n étant seuls à déterminer. Si nous écrivons qu'une conique circonscrite à ce quadrilatère

$$\lambda_1 y\left(\frac{y}{m} + \frac{x}{n} - 1\right) + [y - \alpha(x - c)][y - \sigma(x - d)] = 0$$

est identique à la conique (1), nous trouvons la condition

$$\frac{a-m}{b-m} = \frac{b(a+\alpha c)(a+\sigma d)}{a(b-\alpha c)(b-\sigma d)},$$

d'où l'on déduira pour m une valeur indépendante de λ. La ligne C′D′ coupe donc l'axe OB en un point fixe.

Question 1623.

Les milieux des six cordes d'intersection de deux coniques et le centre des deux coniques sont une même conique. (Barisien.)

SOLUTION

Par M. Audibert.

Une conique passant par les milieux des quatre côtés du quadrilatère ABCD,

$$\left(y+\frac{b}{c}x-\frac{a+b}{2}\right)\left(y-\frac{b}{c}x-\frac{b(c-d)}{2c}\right)$$
$$+\lambda\left(y-\frac{a}{d}x-\frac{a+b}{2}\right)\left[y-\frac{a}{d}x-\frac{a(c-d)}{2d}\right]=0,$$

passera par le milieu des diagonales AD et BC, si l'on fait

$$\lambda=-\frac{bd}{ac}.$$

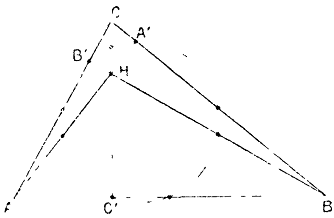
Alors son équation devient

$$\frac{2y^2}{a}-\frac{2bx^2}{cd}-\frac{a+b}{2}y+\frac{b(c-d)}{cd}x=0,$$

et représente le lieu des centres des coniques (1).

Remarques de M. Barisien sur la question 1623.

On sait que le lieu des centres des coniques circonscrites à un quadrilatère est une conique dite *conique des neuf points* qui passe par les quatre milieux des côtés, les deux milieux des diagonales, le point de rencontre des diagonales et les deux points de rencontre des côtés opposés. Cette conique est une hyperbole si le quadrilatère est convexe : la conique est une ellipse si le quadrilatère est concave. Or, si l'on suppose le quadrilatère concave formé par les trois sommets A, B, C d'un triangle et par le point de rencontre H des hauteurs de



ce triangle : la *conique des neuf points* devient alors le *cercle des neuf points*.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Le lieu des centres des coniques circonscrites à un triangle et passant par son point de rencontre des hauteurs est le cercle des neuf points relatifs à ce triangle.

La question proposée sous le n° 1623 peut aussi s'énoncer de la façon suivante, plus complète, qui résulte des considérations précédentes.

La conique des neuf points relative au quadrilatère formé par les points d'intersection de deux coniques passe en outre par les centres de ces coniques.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1624. On considère, sur une surface, les courbes enveloppes par des plans normaux parallèles à une direction donnée. Si ces courbes forment un réseau orthogonal avec celles le long desquelles la normale fait un angle constant avec la direction donnée, la surface a une série de lignes de courbure situées dans des plans perpendiculaires à la susdite direction. (LUCIEN LÉVY.)

1625. On donne une conique, deux de ses tangentes P, Q qui se coupent sur l'axe focal, et la droite X qui passe par les pieds des perpendiculaires abaissées de l'un des foyers sur P et Q.

Une tangente T à la conique coupe ces droites en p, q, n; on prend le point m conjugué harmonique de n par rapport à pq : démontrer que lorsqu'on fait varier T, le lieu des points tels que m est une circonférence de cercle. (MANNHEIM.)

1626. Soit une série

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

dans laquelle les coefficients a sont positifs. On suppose qu'on ait

$$\lim_{n=\infty} a_n n^p = K,$$

K étant une constante différente de zéro et p un nombre positif moindre que l'unité. Démontrer que, lorsque x tend vers 1, le produit

$$(1-x)^{1-p} f(x)$$

a pour limite

$$K\Gamma(1-p). \qquad \text{(APPELL.)}$$

1627. Soit une équation algébrique de degré m ayant pour racines des quantités réelles ou imaginaires représentées par des points $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Pour qu'un point P soit racine de l'équation dérivée, il faut et il suffit que les points $A'_1, A'_2, \ldots A'_m$ inverses des points racines par rapport au point P admettent ce dernier comme centre des moyennes distances.

(On sait que l'inverse A'_1 d'un point A_1 par rapport à P est un point situé sur la droite PA_1 à une distance PA'_1 inverse de PA_1.)

N. B.— Le théorème peut être déduit d'une remarque généralement attribuée à Chasles sur les positions d'équilibre d'un point attiré par des centres fixes en raison inverse de la distance, question qui a été étudiée en détail par M. Félix Lucas (*Comptes rendus*, 2e semestre 1868). On en conclut l'importante conséquence suivante due également à M. Félix Lucas (*Comptes rendus*, 1er semestre 1888):

Les racines de la dérivée sont situées à l'intérieur de tout polygone convexe entourant les racines de la proposée.

(APPELL.)

1628. Le lieu des points d'où l'on peut mener à la développée d'une parabole quatre normales formant un faisceau harmonique est une parabole. (E.-N. BARISIEN.)

1629. Soit B le centre de la sphère osculatrice, en A, à la ligne (A). Soit C le centre de la sphère osculatrice, en B, à la ligne (B). Démontrer que AC engendre une surface développable, et chercher les lignes, pour lesquelles AC pivote autour d'un point fixe. (E. CESARO.)

1630. Dans tout triangle, dont les côtés sont en progression géométrique, il y a égalité entre le cercle circonscrit et le cercle osculant la potentielle au centre de gravité,

(E. CESARO.)

1631. Chercher les courbes telles que les plans polaires de leurs points, par rapport à une sphère donnée, passent par les centres des sphères osculatrices correspondantes.

(E. CESARO.)

1632. Démontrer qu'il n'est pas possible de trouver une ligne plane dont les cercles osculateurs soient vus sous un angle constant d'un point du plan. (E. CESARO.)

QUESTIONS RÉSOLUES.

Question 1621.

La somme des carrés des axes d'une ellipse E, *doublement tangente à une ellipse donnée et qui passe par les foyers de cette courbe, est constante, quelle que soit cette ellipse* E. (MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. BARISIEN.

Soient $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ l'équation de l'ellipse donnée; $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ celle de la corde de contact de cette ellipse avec une ellipse E.

L'équation générale des ellipses E sera donc de la forme

$$(1)\qquad \lambda(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)+(x\cos\alpha+y\sin\alpha-p)^2=0.$$

Faisons $y=0$ dans cette équation, nous obtenons

$$x^2(\lambda b^2-\cos^2\alpha)-2px\cos\alpha+p^2-\lambda a^2b^2=0.$$

Pour que cette équation admette les deux racines $+c$ et $-c$, il faut les deux conditions

$$(2)\qquad p\cos\alpha=0,$$

$$(3)\qquad c^2(\lambda b^2+\cos^2\alpha)+p^2-\lambda a^2b^2=0.$$

La condition (2) montre que les ellipses E ont la corde de contact avec l'ellipse donnée, ou bien passant par le centre de l'ellipse donnée, ou parallèle au grand axe de cette ellipse.

1° Examinons d'abord le cas où

$$p=0.$$

On tire alors de (3)

$$\lambda=\frac{c^2\cos^2\alpha}{b^4},$$

et, par suite, l'équation (1) devient

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &a^2b^2x^2\cos^2\alpha-(a^2c^2\cos^2\alpha+b^4\sin^2\alpha)y^2\\ &\qquad+2b^4xy\sin\alpha\cos\alpha-a^2b^2c^2\cos^2\alpha=0.\end{aligned}\right.$$

Or, on sait que pour une conique dont l'équation est de la forme

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+F=0.$$

Si $2\mathcal{A}$ et $2\mathcal{B}$ désignent les axes de cette conique, on a

$$\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2=\frac{(A+C)F}{B^2-AC}.$$

Mais ici

$$A=a^2b^2\cos^2\alpha,$$

$$B=b^4\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$C=a^2c^2\cos^2\alpha+b^4\sin^2\alpha,$$

$$F=-a^2b^2c^2\cos^2\alpha.$$

Il en résulte que

$$(5)\qquad \mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2=a^2.$$

Comme conséquence, on voit que, dans l'ellipse E, le diamètre conjugué à la direction FF′ (F et F′ étant les foyers de l'ellipse donnée) est constant et égal à $2b$, en vertu du théorème d'Apollonius sur la constance de la somme des carrés des diamètres conjugués d'une même ellipse.

2° Voyons maintenant ce qui se passe lorsque la relation (2) s'annule pour

$$\cos\alpha = 0 \qquad \text{ou} \qquad \alpha = 90°.$$

(3) donne alors

$$\lambda = \frac{p^2}{b^4},$$

et l'équation (1) devient

$$(6) \qquad p^2b^2x^2 + (a^2p^2 + b^4)y^2 - 2pb^4y - p^2b^2c^2 = 0.$$

Or, le centre de cette ellipse est sur l'axe des y à la distance de l'origine égale à $\frac{pb^4}{a^2p^2+b^4}$. En transportant les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes au centre de cette ellipse, il suffit de changer dans (6) y en $\left(y + \frac{pb^4}{a^2p^2+c^4}\right)$ pour avoir la nouvelle équation de l'ellipse. On obtient ainsi

$$p^2b^2x^2 + (a^2p^2 + b^4)y^2 = \frac{a^2b^2p^2(p^2c^2+b^4)}{a^2p^2+b^4}.$$

Par conséquent les carrés des demi-axes de cette ellipse ont pour expression

$$\mathcal{A}^2 = \frac{a^2(p^2c^2+b^4)}{a^2p^2+b^4}, \qquad \mathcal{B}^2 = \frac{a^2b^2p^2(p^2c^2+b^4)}{(a^2p^2+b^4)^2}.$$

On voit que, dans ce second cas, la somme $\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2$ n'est pas constante.

Pour avoir la relation qui lie $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ à a et b, il faut éliminer p^2 entre les deux valeurs de $\mathcal{A}^2$ et $\mathcal{B}^2$

$$(7) \qquad \mathcal{A}^4 = a^2(\mathcal{A}^2 - \mathcal{B}^2).$$

N. B. — MM. E. Valdès, Scaon et Varon nous ont envoyé des solutions analogues.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA MÊME QUESTION

Par M. Louis Loucheur.

Démontrons d'abord le lemme suivant :

Lemme. — *Considérons une conique, un diamètre* FF' *de cette conique, et les tangentes aux extrémités de ce diamètre. Marquons un point* Q *sur cette conique, tel que la tangente en* Q *fasse des angles égaux avec les cordes* QF, QF'. *Je dis que cette tangente est perpendiculaire aux tangentes en* F *et* F'.

En effet, joignons le centre O de la conique aux points de rencontre I, I' des tangentes en F et F' avec la tangente en Q. Ces droites OI, OI' coupent QF et QF' aux points C et D.

Le quadrilatère OCQD étant un parallélogramme, on en déduit que le triangle CIQ est isoscèle, et comme CI est médiane du triangle IFQ, ce triangle est rectangle en I.

On voit même que

$$\mathrm{OI} + \mathrm{OI'} = \mathrm{FQ} + \mathrm{F'Q}.$$

Donc la somme FQ + F'Q est égale à deux fois le rayon du cercle, lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique.

La réciproque est vraie.

Appliquons ce lemme dans le cas actuel, F et F' étant les foyers de l'ellipse fixe, PQ la corde de contact (qui passe d'ailleurs par le centre O) de l'ellipse E avec l'ellipse fixe.

Les tangentes en F et F' à l'ellipse E sont les perpendiculaires FI, F'I' à la tangente en R.

Soient x, y les longueurs des demi-axes de l'ellipse E. On a, puisque les tangentes à l'ellipse E passant par I sont rectangulaires

$$\overline{\mathrm{OI}}^2 = x^2 + y^2.$$

Mais, le point I étant la projection du foyer F sur la tangente en Q à l'ellipse fixe, on a, en appelant a le demi-grand axe de cette ellipse,

$$\overline{\mathrm{OI}}^2 = a^2.$$

Donc, finalement,

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

C. Q. F. D.

Corollaire. — Le lieu des points de contact des tangentes aux ellipses E parallèles au grand axe de l'ellipse fixe est le cercle décrit sur le petit axe comme diamètre.

Extrait d'une lettre de M. Mannheim. — La bonne solution que M. Barisien a donnée de la question 1621 montre qu'il ne faut pas oublier dans l'énoncé le mot *concentrique* et qu'on doit dire :

La somme des carrés des axes d'une ellipse E, *concentrique à une ellipse donnée, doublement tangente à cette courbe et qui passe par les foyers de cette ellipse, est constante quelle que soit* E.

Les élèves aiment à savoir et, en cela, ils ont parfaitement raison, l'origine des questions qu'on leur propose.

S'agit-il d'une propriété soupçonnée et vérifiée, ou d'un résultat de calculs, etc.? Les auteurs des questions peuvent toujours le dire en un mot et *devraient le dire* ([1]).

La question 1621 résulte de l'étude de la perspective cavalière d'une sphère. Comme, dans le cas actuel, cela n'apprend rien aux élèves de Mathématiques spéciales, je vais ajouter une solution géométrique de la question 1621.

Appelons f et f' les foyers de l'ellipse donnée, m un des points où cette courbe est touchée par une ellipse E. Abaissons de f la perpendiculaire fp sur la tangente en m à E.

On sait que la distance du centre o de l'ellipse donnée au point p est égale au demi grand axe de cette courbe. Mais op, qui est parallèle à $f'm$, passe par le milieu de fm, donc fp est tangente en f à E. Le point p est, par suite, le sommet d'un angle droit circonscrit à E; sa distance au point o est alors égale à la racine carrée de la somme des carrés des demi-axes de E et comme cette distance est égale au demi-grand axe de l'ellipse donnée, la propriété est démontrée. J'ajoute cette remarque : *la circonférence décrite sur le petit axe de l'el-*

([1]) Il serait, en effet, très désirable que les personnes qui nous proposent des énoncés voulussent bien y joindre quelques indications sommaires sur l'origine de la question et sur sa solution. E. R.

lipse donnée est le lieu des extrémités des diamètres des ellipses E, *qui sont conjugués du diamètre ff' de ces courbes.*

N. B. — M. Raffaelli nous a envoyé une solution géométrique de la question 1621.

MM. Lemaire, Droz-Farny et Varon nous ont adressé des solutions géométriques de la question 1623 (p. 11*).

Dans la solution analytique publiée page 11*, il faut écrire pour l'équation finale

$$\frac{y^2}{ab} - \frac{x^2}{cd} - \frac{a+b}{2ab}y + \frac{c+d}{2cd}x = 0.$$

Question 1622 [1].

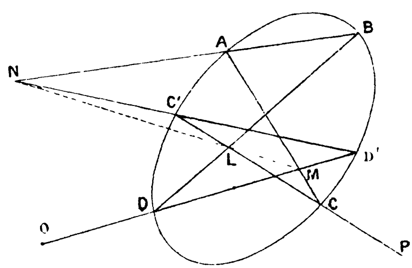
SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Par M. E. Valdès.

BD et PC se coupent au point fixe L.

AC et QD se coupent au point fixe M.

Ainsi la droite LM est fixe; soit N le point fixe où elle rencontre AB, je dis que C'D' passe par N.



Considérons l'hexagone BDD'C'CA inscrit dans la conique du faisceau. Les côtés opposés BD, CC' et AC, DD' se coupent aux points L et M; les côtés opposés AB, C'D' se coupent en un point qui appartient à la droite LM, or ce point n'est autre que N.

N. B. — MM. Lemaire et Droz-Farny nous ont envoyé des solutions analogues.

---

[1] *Voir* l'énoncé, p. 1*.

Question 1618.

On donne trois points dans un plan divisant respectivement les trois côtés d'un triangle dans des rapports donnés $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, *construire le triangle.* (F. FARJON.)

SOLUTION

Par M. W.-J. GREENSTREET M. A.

Désignons $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$ par α, β, γ, en sorte qu'on a, en désignant le triangle par ABC,

$$AN : AC = \alpha, \qquad BP : BC = \beta, \qquad BM : BA = \gamma.$$

Supposons le problème résolu

Menez ND parallèle à BC. Prolongez NP jusqu'à ce qu'elle rencontre AB prolongée en M'.

On a

$$\frac{M'P}{M'N} = \frac{BP}{DN} = \frac{BC.\beta}{DN} = \frac{AC.\beta}{AN} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Donc on connaît le point M' et en le joignant à M on aura la direction du côté AB.

On aura de même la direction des autres côtés.

Question 1620.

En un point quelconque M *d'une ellipse, on mène les rayons vecteurs focaux* MF *et* MF' *qui ont leurs seconds points de rencontre avec l'ellipse en* P *et* P'. *Montrer que :*

1° *Les cercles ayant pour diamètre* FM, F'M, FP, F'P' *sont tangents au cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre.*

2° *Le lieu du point de rencontre des tangentes communes extérieures aux cercles de diamètre* FM *et* FP *est une ligne droite.*

3° *Le lieu du point de rencontre des tangentes communes exterieures aux cercles de diamètre* FM *et* F'M *est une quartique. Montrer que la portion d'aire comprise* *entre la courbe et ses asymptotes est égale aux trois quarts de l'aire de l'ellipse.* (BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. W.-J. GREENSTREET M. A.

1° L'équation du cercle de diamètre FM (M, $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$) est

$$(x - a\cos\varphi)(x - ae) + y(y - b\sin\varphi) = 0;$$

celui-ci sera tangent au cercle $x^2 + y^2 = a^2$, si l'on a

$$4\left(a^2\,\overline{\cos\varphi + e}^2 + b^2\sin^2\varphi\right)\left(a^4\,\overline{1 + e\cos\varphi}^2 - a^2b^2\sin^2\varphi\right)$$
$$= 4a^6(\cos\varphi + e)^2(1 + e\cos\varphi)^2,$$

ce qui est une identité facile à vérifier.

2° Les cercles de diamètre FM, FP sont respectivement (P étant $a\cos\varphi'$, $b\sin\varphi'$),

$$\left(x - \frac{a}{2}\,\overline{\cos\varphi + e}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\sin\varphi\right)^2 = \frac{a^2}{4}(1 - e\cos\varphi)^2,$$
$$\left(x - \frac{a}{2}\,\overline{\cos\varphi' + e}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\sin\varphi'\right)^2 = \frac{a^2}{4}(1 - e\cos\varphi')^2,$$

et pour le centre de similitude externe nous avons

$$x = a(e^2 + 1)|2e,$$

ce qui donne le lieu demandé.

3° Les cercles de diamètre FM, F'M sont respectivement

$$\left(x - \frac{a}{2}\,\overline{\cos\varphi + e}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\sin\varphi\right)^2 = \frac{a^2}{4}(1 - e\cos\varphi)^2.$$
$$\left(x - \frac{a}{2}\,\overline{\cos\varphi - e}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\sin\varphi\right)^2 = \frac{a^2}{4}(1 + e\cos\varphi)^2;$$

le centre de similitude externe est

$$x = \frac{a}{2}(1 + \cos^2\varphi)|\cos\varphi, \qquad y = \frac{b}{2}\sin\varphi,$$

et la quartique cherchée est

$$4a^2y^4 + 4b^2y^2(x^2 - a^2) + b^4(a^2 - x^2) = 0.$$

L'aire comprise entre les asymptotes et la courbe est

$$\int_{\frac{b}{2}}^{-b} \frac{2a\,y^2 - ab^2}{b\sqrt{b^2 - 4y^2}}\,dy = \frac{3\pi ab}{4}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

N. B. — M. Audibert a également résolu la question.

Question 1624.

On considère sur une surface les courbes (a) *enveloppées par des plans normaux parallèles à une direction donnée. Si ces courbes forment un réseau orthogonal avec celles le long desquelles la normale fait un angle constant avec la direction donnée, la surface a une série de lignes de courbure situées dans des plans perpendiculaires à la susdite direction.* (LÉVY.)

SOLUTION

Par M. GENTY.

Prenons pour courbes coordonnées les courbes (a) et leurs trajectoires orthogonales (b).

Soient

ρ le vecteur d'un point de la surface;
ν l'orienteur de la normale en ce point;
α et β les orienteurs des tangentes aux courbes coordonnées qui s'y croisent.

On aura

$$d\rho = l\alpha\,da + m\beta\,db.$$

Si l'on pose

$$S\alpha\frac{\partial\nu}{\partial a} = p; \qquad S\alpha\frac{\partial\nu}{\partial b} = p_1; \qquad S\beta\frac{\partial\nu}{\partial a} = q; \qquad S\beta\frac{\partial\nu}{\partial b} = q_1,$$

on aura donc

$$\frac{\partial\nu}{\partial b} = p_1\alpha + q_1\beta,$$

et l'équation des lignes de courbure sera

$$(1) \qquad lq\,da^2 + (lq_1 - mp)\,da\,db - mp_1\,db^2 = 0.$$

Or les conditions du problème donnent

$$(2) \qquad S\beta\lambda = 0,$$

$$(3) \qquad S\nu\lambda = A,$$

λ étant l'orienteur de la direction donnée et A une fonction de a.

Si l'on différentie l'équation (3) par rapport à b, il vient

$$S\frac{\partial\nu}{\partial b}\lambda = 0,$$

ou, en remplaçant $\frac{\partial\nu}{\partial b}$ par sa valeur et tenant compte de l'équation (2),

$$p_1 = 0.$$

Donc l'équation (1) est satisfaite pour $da = 0$, ce qui démontre le théorème. Les courbes (a) et (b) sont les lignes de courbure et les courbes (b) sont évidemment situées dans des plans perpendiculaires à λ.

Question 1625.

SOLUTION

Par M. Barisien.

Soit F le foyer d'où l'on abaisse les perpendiculaires FI et FI' sur P et Q. On sait que le rapport I est situé sur le cercle principal de l'ellipse (ou de l'hyperbole), cercle décrit sur l'axe focal comme diamètre. Si la conique donnée était une parabole, le cercle principal deviendrait la tangente au sommet. Nous allons d'abord traiter le cas de la conique à centre.

1° *Cas de la conique à centre.* — Prenons des axes rectangulaires, l'origine étant au foyer F et l'axe des x étant l'axe focal. L'équation du cercle principal est

$$(1) \qquad (x-c)^2 + y^2 = a^2.$$

Désignons par d et h les coordonnées du point I : elles satisfont à l'équation (1) et donnent par conséquent la relation

$$(2) \qquad d^2 + h^2 = b^2 + 2cd.$$

En exprimant que les droites (P) et (Q) sont perpendiculaires en I et I′ à FI et FI′, on a, pour les équations de ces droites et pour celle de (N),

$$(\mathrm{P}) \qquad hy + dx = h^2 + d^2,$$

$$(\mathrm{Q}) \qquad -hy + dx = h^2 + d^2,$$

$$(\mathrm{N}) \qquad x = d.$$

Nous allons définir la tangente (T) de la même façon que nous avons défini les tangentes (P) et (Q). Soient donc (α, β) les coordonnées d'un point K du cercle (1).

La perpendiculaire en K à la droite FK sera une tangente à la conique.

L'équation de la tangente (T) est par suite

$$(\mathrm{T}) \qquad \beta y + \alpha x = \alpha^2 + \beta^2,$$

avec la relation

$$(3) \qquad \alpha^2 + \beta^2 = b^2 + 2c\alpha.$$

Si nous désignons par x, y les coordonnées de p, par x_2, y_2 les coordonnées de q, par x_3, y_3 celles de n et par X, Y celles de m, la condition pour que ces quatre points forment une proportion harmonique est

$$(4) \qquad (x_1 + x_2)(x_3 + \mathrm{X}) = 2x_1x_2 + 2x_3\mathrm{X}.$$

L'abscisse x_1 s'obtient en éliminant y entre (Q) et (T): de même x_3 s'obtient en éliminant x entre (Q) et (T).

Quant à x_3, elle est égale à d, de sorte que

$$x_1 = \frac{\beta(h^2 + d^2) - h(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta d + \alpha h},$$

$$x_2 = \frac{\beta(h^2 + d^2) + h(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta d + \alpha h},$$

$$x_3 = d.$$

En portant ces valeurs dans la relation (4), on trouve, toutes réductions faites,

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{X}(\alpha^2 + \beta^2)(d - \alpha) \\ &\quad = \beta^2(h^2 + d^2 - \alpha^2 - \beta^2) + \alpha(d - \alpha)(\alpha^2 + \beta^2). \end{aligned} \right.$$

Or en retranchant (2) et (3), on a

$$h^2 + d^2 - \alpha^2 - \beta^2 = 2c(d - \alpha).$$

De sorte que, dans l'équation (5), apparaît le facteur étranger $(d - \alpha)$, et il reste

$$X(\alpha^2 + \beta^2) = 2c\beta^2 + \alpha(\alpha^2 + \beta^2). \tag{6}$$

Pour avoir le lieu des points (X, Y), il faut éliminer α et β entre les équations (3) et (6) et la suivante

$$\beta Y + \alpha X = \alpha^2 + \beta^2. \tag{7}$$

De (6) et (7), on déduit

$$X = \alpha + \frac{2c\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \tag{6$'$}$$

$$Y = \beta + \frac{2c\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}; \tag{7$'$}$$

(6)' devient, en tenant compte de (3),

$$\alpha = \frac{b^2(X - 2c)}{b^2 - 2c(X - 2c)}. \tag{8}$$

On trouve de même par (7)'

$$\beta = \frac{b^2 Y}{b^2 - 2c(X - 2c)}. \tag{9}$$

En substituant ces valeurs (8) et (9) dans la relation (3), on obtient pour l'équation du lieu

$$(X - c)^2 + Y^2 = a^2, \tag{10}$$

c'est le cercle principal de la conique.

On peut donc énoncer, comme conséquence, la propriété remarquable suivante :

Si l'on considère dans le plan d'un cercle un point F *et une corde* II' *perpendiculaire au diamètre passant par* F, *ainsi que les droites* IH *et* I'H *perpendiculaires à* FI *et* FI', *et si d'un point quelconque* K *situé sur le cercle on mène une droite perpendiculaire à* FK, *cette droite rencontre* IH *en p*, I'H *en q*, II' *en n et le cercle en un second point m qui est le conjugué harmonique de n par rapport à p et q.*

2° *Cas de la parabole.* — Dans ce cas, le cercle principal devient la tangente au sommet de la parabole, le point K est sur la tangente au sommet, tandis que le point m est rejeté à l'infini : il en résulte donc que le point n qui coïncide avec K est le milieu de pq.

Il en résulte encore la propriété suivante :

Si l'on considère une parabole et un angle circonscrit à la parabole tel que le sommet de l'angle soit situé sur l'axe de la parabole, toute tangente à la parabole intercepte entre les côtés de l'angle un segment qui est divisé en deux parties égales par la tangente au sommet.

Question 1627.

Soit une équation algébrique de degré m ayant pour racines des quantités réelles ou imaginaires représentées par des points $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Pour qu'un point P soit racine de l'équation dérivée, il faut et il suffit que les points $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ inverses des points racines par rapport au point P admettent ce dernier comme centre des moyennes distances.

On en conclura ce théorème de M. Félix Lucas :

« *Les racines de la dérivée sont situées à l'intérieur de tout polygone convexe entourant les racines de la proposée.* » (APPELL.)

SOLUTION

Par M. AUDIBERT.

La distance de P à A_1 s'exprime algébriquement par $P - A_1$ et son inverse par $\frac{1}{P - A_1}$.

On aura d'après l'énoncé

$$\sum \frac{1}{P - A_1} = \frac{f'(P)}{f(P)} = 0;$$

$f(P)$ n'est pas nul puisque les points racines sont distincts, il n'est pas non plus infini, donc

$$f'(P) = 0.$$

Réciproquement, si $f'(P) = 0$, on a

$$\sum \frac{1}{P - A_1} = \frac{f'(P)}{f(P)} = 0.$$

Posons

$$A_1 = x_1 + y_1\sqrt{-1}, \qquad P = x + y\sqrt{-1},$$

il en résulte

$$\frac{1}{P - A_1} = \frac{x - x_1 - (y - y_1)\sqrt{-1}}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$
$$= \frac{x - x_1}{l^2} - \frac{y - y_1}{l^2}\sqrt{-1}.$$

et l'on aura

$$(1) \qquad \sum \frac{x - x_1}{l^2} = 0, \qquad \sum \frac{y - y_1}{l^2} = 0;$$

d'où l'on conclut que les coordonnées x et y de P sont comprises entre la plus grande et la plus petite des coordonnées correspondantes des points racines de $f(z)$.

Faisons tourner l'axe des Y d'un angle α. Les points A_1, $A_2, \ldots$, P ne se déplacent pas. Les formules de transformation

$$x = x' - y' \sin\alpha,$$
$$y = y' \cos\alpha,$$

introduites dans (1), donnent

$$\sum \frac{x' - x'_1 - (y' - y'_1)\sin\alpha}{l^2} = 0, \qquad \sum \frac{y - y'}{l^2}\cos\alpha = 0,$$

ou simplement

$$\sum \frac{x' - x'_1}{l^2} = 0, \qquad \sum \frac{y' - y'_1}{l^2} = 0.$$

Les formules (1) et leurs conséquences subsistent donc quel que soit α.

On en conclut le théorème de M. Félix Lucas.

Question 1619.

Si deux surfaces (S) *et* (S') *se correspondent point par point suivant une loi déterminée et si* O, P, Q, R *sont quatre points infiniment voisins de la première surface et* O', P', Q', R', *les quatre points correspondants de la seconde, on a les analogies*

$$\frac{\overline{OP}}{\sin\widehat{QOR}} : \frac{\overline{O'P'}}{\sin\widehat{Q'O'R'}} = \frac{\overline{OQ}}{\sin\widehat{ROP}} : \frac{\overline{O'Q'}}{\sin\widehat{R'O'P'}} = \frac{\overline{OR}}{\sin\widehat{POQ}} : \frac{\overline{O'R'}}{\sin\widehat{P'O'Q'}}.$$

(E. ROUCHÉ.)

SOLUTION

Par M. GENTY.

Soient ρ et ρ' les vecteurs des points O et O', a et b les paramètres des courbes correspondantes sur les deux surfaces, on aura

$$d\rho = l\alpha\, da + m\beta\, db,$$
$$d\rho' = l'\alpha'\, da + m'\beta'\, db,$$

α et β, α' et β' étant les orienteurs des tangentes aux courbes coordonnées sur les surfaces (S) et (S') respectivement.

Si maintenant nous désignons par les indices 1, 2 et 3 les accroissements des paramètres qui correspondent aux points P et P', Q et Q', R et R' respectivement, on aura

$$\overline{OP} = \mathrm{T}\, d_1\rho,$$

$$\sin\widehat{QOR} = \frac{\mathrm{TV}\, d_2\rho\, d_3\rho}{\mathrm{T}\, d_2\rho\, \mathrm{T}\, d_3\rho}.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \mathrm{V}\, d_2\rho\, d_3\rho &= \mathrm{V}(l\alpha\, d_2a + m\beta\, d_2b)(l\alpha\, d_3a + m\beta\, d_3b) \\ &= lm(d_2a\, d_3b - d_2b\, d_3a)\mathrm{V}\alpha\beta. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\overline{OP}}{\sin\widehat{QOR}} = \frac{\mathrm{T}\, d_1\rho\, \mathrm{T}\, d_2\rho\, \mathrm{T}\, d_3\rho}{lm(d_2a\, d_3b - d_2b\, d_3a)\mathrm{TV}\alpha\beta},$$

On trouvera de même

$$\frac{\overline{O'P'}}{\sin\widehat{Q'O'R'}} = \frac{\mathrm{T}\, d_1\rho'\, \mathrm{T}\, d_2\rho'\, \mathrm{T}\, d_3\rho'}{l'm'(d_2a\, d_3b - d_2b\, d_3a)\mathrm{TV}\alpha'\beta'},$$

Donc

$$\frac{\overline{OP}}{\sin\widehat{QOR}} : \frac{\overline{O'P'}}{\sin\widehat{Q'O'R'}} = \frac{\mathrm{T}\, d_1\rho\, \mathrm{T}\, d_2\rho\, \mathrm{T}\, d_3\rho}{\mathrm{T}\, d_1\rho'\, \mathrm{T}\, d_2\rho'\, \mathrm{T}\, d_3\rho'}\, \frac{l'm'\mathrm{TV}\alpha'\beta'}{lm\, \mathrm{TV}\alpha\beta},$$

et la proposition de M. Rouché est démontrée.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1633. On considère la quartique, podaire du centre O d'une conique. Si d'un point quelconque P du plan on mène les tangentes à cette quartique dont les points de contact sont T_1, T_2, T_3, ... et si l'on abaisse sur cette même quartique les normales dont les pieds sont N_1, N_2, N_3, ..., on a, quel que soit le point M,

$$\overline{ON_1}^2 + \overline{ON_2}^2 + \ldots + \overline{ON_3}^2 = \text{const}.$$

Si la conique est une hyperbole équilatère, la quartique devient la lemniscate de Bernoulli, et l'on a, en plus, la relation

$$ON_1 \times ON_2 \times ON_3 \ldots = OT_1 \times OT_2 \times OT_3 \ldots$$

(E.-N. Barisien.)

1634. On considère l'hyperbole équilatère (H) et le folium (F) dont les équations sont

$$\text{(H)} \qquad x^2 - y^2 = a^2,$$
$$\text{(F)} \qquad (x^2 + y^2)^3 = a^2(x^2 - y^2)^2.$$

1° Si d'un point quelconque de (H) on mène les tangentes à la courbe (F), le produit et la somme des rayons vecteurs unissant le centre de (H) aux divers points de contact des tangentes sont des quantités constantes.

Si du même point on abaisse les normales sur la courbe (F), le produit et la somme des rayons vecteurs unissant le centre de (H) aux pieds des normales sont aussi des quantités constantes.

2° Si d'un point quelconque du plan, on mène les tangentes et les normales à la courbe (F), le produit des rayons vecteurs des tangentes est égal à 16 fois le produit des rayons vecteurs des normales, et la somme des rayons vecteurs des tangentes est égale à 4 fois la somme des rayons vecteurs des normales.

(Ces divers rayons vecteurs sont déterminés comme dans le § 1°).

(E.-N. Barisien.)

1635. D'un point quelconque M du plan d'une lemniscate de Bernoulli, de centre O, on mène les tangentes MT_1, MT_2, MT_3, ... à la courbe et l'on abaisse les normales MN_1, MN_2, MN_3, ... Montrer que l'on a la relation

$$OT_1 . OT_2 . OT_3 \ldots = ON_1 . ON_2 . ON_3 \ldots .$$

(E.-N. Barisien.)

1636. Étant données deux cubiques C et C′ dont les équations en coordonnées polaires sont

$$(C) \qquad r = \frac{a \cos^2\theta + b \sin^2\theta}{\cos\theta}$$

$$(C') \qquad r = \frac{a' \cos^2\theta + b' \sin^2\theta}{\cos\theta},$$

et dont le pôle est en O :

Montrer que si une droite quelconque rencontre la cubique (C) en ABC, et la cubique (C′) en A′B′C′, on a la relation

$$\frac{OA . OB . OC}{OA' . OB' . OC'} = \frac{a - b}{a' - b'}.$$

(E.-N. Barisien.)

1637. Une droite quelconque rencontre un limaçon de Pascal, dont le point de rebroussement est O, en quatre points A, B, C, D.

1° Quelle que soit la droite, on a la relation

$$OA + OB + OC + OD = \text{const.}$$

2° Si cette droite est de plus tangente à un cercle fixe C ayant son centre en O, on a aussi

$$OA . OB . OC . OD = \text{const.}.$$

3° Cette tangente au cercle C rencontre le cercle base de la conchoïde-limaçon en deux points P et Q.

On a la relation

$$OA . OB . OC . OD = \overline{OP}^2 . \overline{OQ}^2 .$$

(E.-N. Barisien.)

1638. On considère un cercle fixe C et un faisceau de cardioïdes ayant toutes même axe de symétrie et même point de rebroussement O. La somme des inverses des rayons vecteurs joignant le point O au point d'intersection du cercle avec une des cardioïdes est constante.

1639. On considère une cardioïde et un point fixe P dans son plan. Un cercle quelconque ayant son centre en P rencontre la cardioïde en 8 points. La somme des longueurs des rayons vecteurs joignant ces 8 points au point de rebroussement de la cardioïde est constante. (E.-N. BARISIEN.)

1640. Lieu géométrique des foyers des coniques qui touchent deux droites fixes chacune en un point fixe.

Cas particuliers. — 1° Les deux points de contact sont à égale distance du point d'intersection des deux droites données.

2° Les deux droites données sont parallèles. (JAMET.)

1641. Si un cercle a pour centre un point d'une hyperbole équilatère et passe par le symétrique de ce point par rapport au centre de l'hyperbole, il coupe cette courbe en trois autres points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral.

(LEMAIRE.)

1642. Soit une conique inscrite à un triangle ABC en A', B', C'; a, b, c les milieux de BC, CA, AB; α, β, γ les polaires de a, b, c par rapport à la conique. Démontrer que les trois points (α, B'C'), (β, C'A'), (γ, A'B') sont en ligne droite. Généralisation. (LEMAIRE.)

1643. Démontrer que la droite qui contient les milieux des diagonales d'un quadrilatère normal circonscrit à une ellipse passe par le centre de cette courbe et est perpendiculaire à la droite qui joint ce centre au point de concours des normales à l'ellipse aux points de contact des côtés du quadrilatère.

(LEMAIRE.)

1644. Si α est l'angle sous lequel une normale à une parabole coupe l'axe de cette courbe, β l'angle sous lequel elle coupe la courbe en son second point de rencontre avec celle-ci, on a $\tang \alpha = 2 \tang \beta$. (On demande une solution géométrique.

(D'OCAGNE.)

1645. On considère une lemniscate de Bernoulli (L) dont le point double est en O et l'un des sommets en A.

On considère aussi l'hyperbole équilatère (H) ayant un de ses sommets au milieu de OA et pour asymptotes les tangentes au point double de la lemniscate.

Montrer que le cercle qui a son centre en un point quelconque C de (H) et qui passe par O est tangent à la lemniscate (L) en un point K tel que OA est bissectrice des droites OC et OK. (BARISIEN.)

1646. Étant donnés trois triangles ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, homologiques par rapport à un axe, si l'on joint chacun des points du tableau

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

à son associé mineur, on aura neuf droites concourantes [l'associé de A est le point (B_1C_2, B_2C_1)]. (P. SONDAT.)

1647. Une solution en nombres entiers de l'équation

$$x + y + z = n$$

est prise au hasard, aucune racine n'étant zéro; chercher la probabilité que le produit des valeurs de x, y, z soit multiple de $\frac{n}{k}$, k étant un diviseur de l'entier n.

1648. Les cercles de courbure d'un ellipse en P, Q rencontrent l'ellipse en M, N. Le cercle, qui touche l'ellipse en P et qui passe par Q, et le cercle qui touche l'ellipse en Q et qui passe par P, rencontrent respectivement l'ellipse en R et S.

Démontrer que RS est parallèle à MN.

(W.-J. GREENSTREET, M. A.)

QUESTIONS RÉSOLUES.

Question 1513.

On donne un triangle ABC, *une conique* K *et un point* O *sur cette conique. Les droites* OA, OB, OC *coupent la conique* K *respectivement aux points* A', B', C'. *De plus, le côté* BC *rencontre cette conique aux points* A'' *et* A''' ; *le côté* AC *aux points* B'', B''' : *le côté* AB *aux points* C'' *et* C'''. *Démontrer que les triangles* A'A''A''', B'B''B''' *et* C'C''C''' *sont circonscrits à une même conique.* (D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par M. A. DROZ FARNY

On connaît ce théorème (*Nouvelles Annales*, année 1864, p. 34) : L'enveloppe des cordes communes à une conique fixe K et à un faisceau C de coniques est une courbe de troisième classe. Si la conique K passe par l'un des sommets O du quadrilatère ABCO inscrit aux coniques C, la courbe enveloppe des cordes communes se décompose en deux parties, savoir : le point O lui-même et une conique. Il suffit, dans le cas particulier, d'appliquer le théorème général aux trois paires de droites OA et BC, OB et AC, OC et AB, coniques dégénérées du faisceau OABC, pour obtenir le théorème de M. d'Ocagne.

Question 1561.

(Voir 3e série, t. V, p. 304)

Dans une parabole, le foyer F, *le point* D *où la tangente en un point* M *de la courbe coupe la directrice, le milieu* B *du rayon de courbure* MC *issu du point* M *sont en ligne droite.* (J. MARCHAND.)

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Démonstration géométrique. — On sait que les projections A, A' du centre de courbure C sur le rayon vecteur MF

9*

et sur la parallèle MA′ à OX se trouvent sur une droite AA′ rencontrant OX au pied N de la normale.

Les triangles rectangles CAM, CA′M sont égaux si l'on a

$$AN = A'N:$$

donc FN parallèle à A′M rencontre AM en son milieu F.

La ligne FB est parallèle à AC et perpendiculaire à AM; mais, par une propriété connue, l'angle DFM est droit. Donc les points D, F, B se trouvent sur une même droite perpendiculaire à AM en son milieu F.

Question 1568.

Dans une cissoïde de Dioclès, l'aire comprise entre la courbe et son asymptote est égale à trois fois l'aire du cercle générateur.

SOLUTION

Par M. J. Lemaire.

R désignant le rayon du cercle générateur de la cissoïde C, si nous prenons pour origine le point de rebroussement de la courbe, et pour axe polaire la tangente en ce point, l'équation est

$$\rho = 2R\,\frac{\sin^2\omega}{\cos\omega}.$$

L'équation de l'asymptote est

$$\rho' = 2R\,\frac{1}{\cos\omega}.$$

S désignant l'aire comprise entre la courbe et l'asymptote, nous avons

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\rho'^2 - \rho^2)\,d\omega,$$

ou

$$S = R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{2 - 2\sin^4\omega}{\cos^2\omega}\,d\omega = R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} 2(1 - \sin^2\omega)\,d\omega,$$

ou

$$S = R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (3 - \cos 2\omega)\, d\omega = R^2 \left[3\omega - \frac{\sin 2\omega}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = 3\pi R^2.$$

C. Q. F. D.

Question 1583.

On calcule une suite de fonctions d'après la loi

$$u_{n+1} = \log \frac{e^{u_n} - 1}{u_n},$$

en supposant $u_1 = x$.

Démontrer la formule

$$e^x - 1 = u_1 - u_1 u_2 + u_1 u_2 u_3 + \ldots.$$

SOLUTION

Par M. AUDIBERT.

Écrivons la loi de formation comme suit

$$e^{u_n} - 1 = u_n e^{u_{n+1}},$$

on en tire successivement

$$e^{u_{n-1}} - 1 = u_{n-1} + u_{n-1} u_n e^{u_{n+1}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$e^x - 1 = u_1 + u_1 u_2 + u_1 u_2 u_3 + \ldots + u_1 u_2 \ldots u_n e^{u_{n+1}}.$$

Le dernier terme de ce développement

$$u_1 u_2 \ldots u_n e^{u_{n+1}}$$

est le reste de la série de M. Cesaro arrêtée au $n^{\text{ième}}$ terme. Nous allons démontrer que ce reste est nul pour n infini ou plus simplement que

$$\lim \text{ de } u_n = 0.$$

I. Supposons d'abord x positif. Toutes les fonctions u sont positives, car si l'on a

$$u_n > 0,$$

l'on aura

$$\frac{e^{u_n}-1}{u_n} > 1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} > 0.$$

En développant la relation

$$e^{u_{n+1}} = \frac{e^{u_n}-1}{u_n},$$

on peut écrire

$$\frac{u_n}{1.2} + \frac{u_n^2}{1.2.3} + \frac{u_n^3}{1.2.3.4}$$
$$= 2\left(\frac{u_{n+1}}{1.2} + \frac{u_{n+1}^2}{1.2.2} + \frac{u_{n+1}^3}{1.2.3.2} + \dots\right).$$

On en conclut

$$\frac{u_n}{1.2} + \frac{u_n^2}{1.2.3} + \frac{u_n^3}{1.2.3.4}$$
$$> 2\left[\frac{u_{n+1}}{1.2} + \frac{(u_{n+1})^2}{1.2.3} + \frac{(u_{n+1})^3}{1.2.3.4} + \dots\right].$$

Soit

$$\frac{e^{u_n}-1}{u_n} - 1 > 2\left(\frac{e^{u_{n+1}}-1}{u_{n+1}} - 1\right).$$

Considérons les inégalités

$$\frac{e^{x}-1}{x} - 1 > 2\left(\frac{e^{u_2}-1}{u_2} - 1\right),$$

$$2\left(\frac{e^{u_2}-1}{u_2} - 1\right) > 2^2\left(\frac{e^{u_3}-1}{u_3} - 1\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$2^{n-1}\left(\frac{e^{u_n}-1}{u_n} - 1\right) > 2^n\left(\frac{e^{u_{n+1}}-1}{u_{n+1}} - 1\right).$$

En les ajoutant nous en déduirons

$$\frac{\dfrac{e^{x}-1}{x} - 1}{2^n} > \frac{e^{u_{n+1}}-1}{u_{n+1}} - 1.$$

Le premier membre de cette dernière inégalité étant nul pour n infini,

$$\lim \text{ de } u_{n+1} = 0$$

II. Dans le cas de $x < 0$, remplaçons dans la loi de formation u_n par $-u'_n$ et x par $-x$, elle devient

$$e^{u'_{n+1}} = \frac{u'_n\, e^{u'_n}}{e^{u'_n} - 1}.$$

Dans cette hypothèse, toutes les fonctions u' sont positives et, par suite, toutes les fonctions u négatives.

On avait dans le premier cas

$$(1) \qquad e^{u_1} = \frac{e^x - 1}{x};$$

on a dans le second

$$(2) \qquad e^{u'_2} = \frac{x\, e^x}{e^x - 1}.$$

En multipliant ces deux relations dans lesquelles x a même valeur, il vient

$$(3) \qquad e^{u'_2 + u_1} = e^x \qquad \text{ou} \qquad u'_2 + u_2 = x.$$

Mais de (1) on conclut

$$u_2 < \frac{x}{2};$$

donc, en vertu de (3), u'_2 est inférieur à $\frac{x}{2}$ et à u_2. Les fonctions positives u' décroissent plus rapidement que les fonctions u, et la limite de u'_n est zéro comme celle de u_n.

La formule de Cesaro est vraie pour toutes les valeurs réelles de x.

Question 1589.

Si p, q, s désignent respectivement les droites qui joignent les milieux des côtés opposés et des diagonales d'un quadrilatère, α l'angle de q avec s, β l'angle de s avec p, γ l'angle de p avec q; pour que le quadrilatère soit inscriptible, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\sin 2\alpha}{p^2} + \frac{\sin 2\beta}{q^2} + \frac{\sin 2\gamma}{s^2} = 0.$$

Quelle est la signification de cette formule?

(F. Farjon.)

SOLUTION

Par M. G. Leinekugel.

Les six points milieux des côtés et des diagonales sont, comme on le sait, les six sommets d'un hexagone inscrit dans la conique Σ lieu des centres des coniques circonscrites au quadrilatère.

Le centre de Σ est au point de rencontre des droites joignant les milieux des côtés et diagonales. Cette conique admet évidemment comme directions asymptotiques les directions des diamètres des deux paraboles circonscrites au quadrilatère donné. Si le quadrilatère est inscriptible, Σ est une hyperbole équilatère; inversement, si Σ est une hyperbole équilatère, le quadrilatère est inscriptible.

Cela posé, considérons trois demi-droites *op*, *oq*, *os* faisant entre elles les angles $\gamma(op, oq)$, $\alpha(oq, os)$, $\beta(op, os)$, leurs longueurs étant p, q, s; nous allons exprimer qu'il existe une hyperbole équilatère circonscrite au triangle *pqs* et de centre o; nous obtiendrons de la sorte la relation à démontrer.

L'équation d'une hyperbole équilatère de centre o et passant par q est

$$\frac{x^2-y^2}{q^2}+2\lambda xy-1=0;$$

en exprimant qu'elle passe par p et s qui ont pour coordonnées

$$\begin{cases} p\cos\gamma, \\ -p\sin\gamma, \end{cases} \qquad \begin{cases} s\cos\alpha, \\ s\sin\alpha, \end{cases}$$

on en déduit

$$\frac{\cos 2\gamma}{q^2}-\lambda\sin 2\gamma-\frac{1}{p^2}=0,$$

$$\frac{\cos 2\alpha}{q^2}+\lambda\sin 2\alpha-\frac{1}{\beta^2}=0;$$

l'élimination de λ donne finalement

$$\frac{\sin 2\alpha}{p^2}+\frac{\sin 2\beta}{q^2}+\frac{\sin 2\gamma}{s^2}=0.$$

L'interprétation géométrique de cette relation consiste en ce que la conique Σ lieu du centre des coniques circonscrites au quadrilatère est ici une hyperbole équilatère.

De plus, comme le centre d'une hyperbole équilatère est sur le cercle des neuf points du triangle auquel elle est circonscrite, on voit que cette relation exprime aussi que le point de rencontre des droites p, q, s est l'un des points d'intersection des cercles des neuf points des deux triangles obtenus en joignant les milieux des deux systèmes de trois droites qui sont concourantes dans le quadrilatère.

Question 1644.

Si α est l'angle sous lequel une normale à une parabole coupe l'axe de cette courbe, β l'angle sous lequel elle coupe la courbe en son second point de rencontre avec celle-ci, on a

$$\tan\alpha = 2\tan\beta.$$

(On demande une solution géométrique.) (D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par M. LÉVY.

Le diamètre TX′ passe par le milieu de MM′.

L'angle M étant droit, on a

$$\mathrm{TM} = \mathrm{RM}\tan\alpha = 2\,\mathrm{RM}\tan\beta;$$

d'où

$$\tan\alpha = 2\tan\beta.$$

Question 1645.

On considère une lemniscate de Bernoulli (L) *dont le point double est en* O *et l'un des sommets en* A.

On considère aussi l'hyperbole équilatère (H) *ayant un de ses sommets au milieu de* OA *et pour asymptotes les tangentes au point de la lemniscate.*

Montrer que le cercle qui a son centre en un point quelconque C *de* (H) *et qui passe par* O *est tangent à la lemniscate* (L) *en un point* K *tel que* OA *est bissectrice de l'angle des droites* OC *et* OK. (BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. H. Brocard.

L'équation polaire de la lemniscate étant

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\omega,$$

on sait, d'après une propriété des spirales sinusoïdes, que l'angle de la tangente avec le rayon vecteur est double de celui de ce dernier avec la tangente au pôle

$$\mathrm{TKO} = 2(45 - \omega) = 90 - 2\omega;$$

donc l'angle de la normale avec le rayon vecteur est égal à

$$90 - \mathrm{TKO} = 2\omega.$$

Le triangle OCK est donc isoscèle. Par conséquent, C est le centre de la circonférence tangente en K à la lemniscate et passant par le pôle O.

On a immédiatement l'équation polaire du lieu des points $C(r, \theta)$.

En effet, on a

$$\omega = -\theta \qquad \text{et} \qquad \rho = 2r\cos 2\theta;$$

par suite

$$r^2 = \frac{a^2}{4\cos 2\theta}$$

ou

$$x^2 - y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Question 1648.

Les cercles de courbure d'une ellipse en P *et* Q *rencontrent l'ellipse en* M, N. *Le cercle, qui touche l'ellipse en* P *et qui passe par* Q, *et le cercle qui touche l'ellipse en* Q *et qui passe par* P *rencontrent respectivement l'ellipse en* R *et* S.

Démontrer que RS *est parallèle à* MN.

SOLUTION

Par M. Noel Dewulf, élève au lycée de Marseille.

On sait que tous les cercles tangents à une conique en un même point la coupent en deux autres points tels que la droite qui les joint est parallèle à une direction fixe. Donc QR est parallèle à PM et PS à QN. Appliquant le théorème de Pascal à l'hexagone inscrit MPSRQN, on voit que MN est parallèle à RS. Ce qu'il fallait démontrer.

N. B. — M. Barisien nous a adressé la solution analytique suivante de la même question.

En rappelant cette propriété connue que les droites d'intersection d'un cercle et d'une conique sont également inclinées sur les axes de la conique, il en résulte que les droites PM et QN sont respectivement également inclinées sur les tangentes en P et Q à l'ellipse. D'autre part, QR et la tangente en P doivent aussi être également inclinées sur les axes : par suite, QR est parallèle à PM, de même QN est parallèle à PS

Cette propriété va nous permettre de calculer facilement les coordonnées des points $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$, $S(x_4 y_4)$.

Si nous désignons par φ et φ' les angles d'anomalie excentrique en P et Q, on trouve pour l'équation de la corde PM

$$bx\cos\varphi - ay\sin\varphi = ab\cos 2\varphi.$$

En résolvant cette équation et celle de l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

on trouve pour les coordonnées de M,

$$M \begin{cases} x_1 = 2a\cos\varphi\cos 2\varphi - a\cos\varphi, \\ y_1 = -2b\sin\varphi\cos 2\varphi - b\sin\varphi. \end{cases}$$

On a de même, pour celles de N,

$$N \begin{cases} x_2 = 2a\cos\varphi'\cos 2\varphi' - a\cos\varphi', \\ y_2 = -2b\sin\varphi'\cos 2\varphi' - b\sin\varphi'. \end{cases}$$

L'équation de QR est

$$bx\cos\varphi - ay\sin\varphi = ab\cos(\varphi + \varphi').$$

Par conséquent, les coordonnées de R et S sont

$$\text{R}\left\{\begin{array}{l} x_3 = 2a\cos\varphi\cos(\varphi+\varphi') - a\cos\varphi', \\ y_3 = -2b\sin\varphi\cos(\varphi+\varphi') - b\sin\varphi', \end{array}\right.$$

$$\text{S}\left\{\begin{array}{l} x_4 = 2a\cos\varphi'\cos(\varphi+\varphi') - a\cos\varphi, \\ y_4 = -2b\sin\varphi'\cos(\varphi+\varphi') - b\sin\varphi. \end{array}\right.$$

Pour démontrer la proposition énoncée, il faut vérifier que

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4}.$$

En remplaçant les coordonnées par leurs valeurs en fonction de φ et φ', on trouve que cette relation est satisfaite et que la valeur commune du coefficient angulaire des droites MN et RS est

$$\frac{b}{a}\left(\frac{\sin 3\varphi' - \sin 3\varphi}{\cos 3\varphi - \cos 3\varphi'}\right).$$

Question 1559.

Étant données l'arête $2a$ et la hauteur h d'une pyramide régulière, trouver l'angle compris entre deux faces latérales en supposant que la base soit un polygone régulier de n côtés. (A. Geneix Martin.)

SOLUTION

Par M. de Crès.

Soient : O le centre et AB un côté de la base; S le sommet de la pyramide. Le trièdre (AS, AO, AB) étant rectangle suivant AO et ayant pour dièdre suivant SA la moitié de l'angle cherché $2x$, on a (par une formule relative aux triangles sphériques rectangles)

$$\tan x = \frac{\tan \text{OAB}}{\sin \text{OAS}};$$

mais

$$\sin \text{OAS} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \overline{\text{AO}}^2}} \qquad \text{et} \qquad \text{AO}\cos \text{OAB} = a,$$

Donc

$$\operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{tang} \mathrm{OAB} \sqrt{a^2 + h^2 \cos^2 \mathrm{OAB}}}{h \cos \mathrm{OAB}}.$$

Cette formule résout la question; il suffit d'y remplacer le demi-angle à la base OAB par sa valeur évidente $\frac{n-2}{n}\frac{\pi}{2}$.

N. B. — MM. Lez, Barisien, Pisani ont résolu la même question.

Question 1569.

(*Voir* 3e série, t. VI, p. 504.)

Étant données une conique et une tangente à cette courbe, aux points A *et* B *où cette tangente rencontre les axes de cette conique, on élève des perpendiculaires à ces axes; puis du point de rencontre* M *de ces perpendiculaires on mène les tangentes* MC *et* MD *à la conique. Trouver, lorsque la tangente* AB *varie, l'enveloppe de la corde* CD *et le lieu du point de rencontre* P *des normales aux extrémités* C *et* D *de cette corde.* (CHAMBON.)

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

La conique donnée, supposée une ellipse rapportée à ses axes, a pour équation

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

L'équation générale des tangentes AB étant

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2},$$

le sommet M du rectangle OABM a pour coordonnées

$$\alpha = \frac{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}{m},$$

$$\beta = \sqrt{a^2 m^2 + b^2},$$

et l'on en déduit

$$(1) \qquad a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2 = \alpha^2 \beta^2,$$

équation de la courbe (M), composée de quatre branches hyperboliques asymptotes aux côtés du rectangle circonscrit à l'ellipse parallèlement à ses axes.

Les coordonnées (x, y) du point P de rencontre des normales aux extrémités de la corde CD de contact des tangentes issues d'un point $M(\alpha, \beta)$ ont pour expressions

$$x = \frac{c^2 \alpha (b^2 - \beta^2)}{a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2},$$

$$y = \frac{c^2 \beta (\alpha^2 - a^2)}{a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2}.$$

Tenant compte de l'équation (1), elles deviennent

$$x^2 = \frac{c^4 a^4}{\alpha^6},$$

$$y^2 = \frac{c^4 (\alpha^2 - a^2)^3}{b^2 \alpha^6},$$

et l'élimination de α donne

$$a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

La courbe (P) lieu des points P est donc la développée de l'ellipse.

La corde CD, polaire du point $M(\alpha, \beta)$, a pour équation

$$a^2 \beta y + b^2 \alpha x = a^2 b^2,$$

ou, d'après l'équation (1),

$$a^4 \alpha^2 y^2 = b^2 (a^2 - \alpha x)^2 (\alpha^2 - a^2). \tag{2}$$

Il resterait donc à éliminer α entre l'équation (2) et sa dérivée, c'est-à-dire entre deux équations, dont une du quatrième degré en α, et l'autre du troisième.

Le résultat, vraisemblablement fort compliqué, paraît pouvoir être avantageusement remplacé, ici comme dans la plupart des études de courbes enveloppes, par la notion de la podaire relative à l'origine.

La perpendiculaire à CD menée par l'origine a pour équation

$$y = \frac{a^2 \beta}{b^2 \alpha} x$$

ou

$$(3) \qquad y^2 = \frac{a^4 x^2}{b^2(\alpha^2 - a^2)}.$$

L'élimination de α entre les équations (2) et (3) donne

$$(4) \qquad y^4(a^2x^2 + b^2y^2) = x^2\left(aby - x\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}\right)^2,$$

équation qui se prête à l'emploi des coordonnées polaires.

L'enveloppe cherchée est donc la podaire inverse de la courbe (4).

Question 1643.

La droite qui joint les milieux des diagonales d'un quadrilatère normal circonscrit à une ellipse passe par le centre de cette courbe et est perpendiculaire à la droite qui joint ce centre au point de concours des normales à l'ellipse aux points de contact des côtés du quadrilatère.

(LEMAIRE.)

SOLUTION

Par M. BARISIEN.

Rappelons les formules suivantes dues à M. Desboves.

Si (α, β) et (α', β') sont les coordonnées des sommets opposés d'un quadrilatère normal circonscrit à une ellipse, et si (ξ, η) sont celles du point de concours des normales aux points de contact du quadrilatère, on a les relations

$$\alpha\alpha' = -a^2, \qquad \beta\beta' = -b^2,$$

$$\xi = \frac{-c^2\alpha(\beta^2 - b^2)}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}, \qquad \eta = \frac{c^2\beta(\alpha^2 - a^2)}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}.$$

Par suite

$$(1) \qquad \frac{\eta}{\xi} = -\frac{\beta(\alpha^2 - a^2)}{\alpha(\beta^2 - b^2)}.$$

D'autre part, d'après un théorème dû à Newton, le lieu des centres des coniques inscrites dans un quadrilatère est la droite qui joint les milieux des diagonales.

Il résulte de là que, la droite qui joint $(\alpha\beta)$ et $(\alpha'\beta')$ et dont le milieu a pour coordonnées

$$x = \frac{\alpha + \alpha'}{2}, \qquad y = \frac{\beta + \beta'}{2}$$

étant une des diagonales, la droite qui réunit son milieu au centre de l'ellipse a pour coefficient angulaire

$$\frac{y}{x} = \frac{\beta + \beta'}{\alpha + \alpha'}$$

ou, en tenant compte des premières relations de M. Desboves,

$$(2) \qquad \frac{y}{x} = \frac{\alpha(\beta^2 - b^2)}{\beta(\alpha^2 - a^2)}.$$

Par suite

$$\left(\frac{y}{x}\right) \times \left(\frac{\eta}{\xi}\right) = -1,$$

ce qui démontre la proposition.

Question 1641.

Si un cercle a pour centre un point d'une hyperbole équilatère et passe par le symétrique de ce point par rapport au centre de l'hyperbole, il coupe cette courbe en trois autres points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral. (LEMAIRE.)

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Par M. BROCARD.

Observons d'abord que si une hyperbole équilatère et une circonférence données se rencontrent en quatre points A, B, C, D, les points A', B', C', D', diamétralement opposés sur l'hyperbole, sont les orthocentres des triangles BCD, ACD, ABD, ABC.

L'orthocentre D' du triangle ABC se trouve sur l'hyperbole. Soit P l'extrémité du diamètre POD'. Je dis que ce point P se trouve sur la circonférence ABC.

En effet, d'après les propriétés de l'hyperbole équilatère, l'arc AC est vu des points P, D', sous le même angle (ou sous des angles supplémentaires).

Dans le triangle ABC, dont l'orthocentre est D', les angles CD'A, CBA sont supplémentaires; donc les angles CPA, CBA sont égaux, ce qui montre que les points A, B, C, P sont concycliques.

Mais les points A, B, C, D sont à la fois sur les deux courbes données; donc les points P, D coïncident.

Dans le cas où la circonférence a D′ pour centre et DOD′ pour rayon, le point D′ doit être l'orthocentre du triangle inscrit ABC; par suite, ce triangle doit être équilatéral.

N. B. M. Brocard nous fait observer qu'il a fait connaître, dès 1874 (*Mémoires d'Alger*), ce théorème, qui s'est présenté depuis à plusieurs géomètres et qui ne diffère pas de la question 1507, résolue analytiquement à la page 382 du quatrième Volume de la 3e série des *Nouvelles Annales*. M. Barisien, qui a également traité la question par l'Analyse, ajoute que les normales à l'hyperbole en A, B, C sont concourantes.

Question 1601

Inscrire dans une sphère donnée un polygone dont chaque côté passe par un point donné. (TARRY.)

Cette question doit être considérée comme résolue; car M. Tarry a indiqué d'une part (t. X, 3e série, p. 5*), la construction à faire et, d'autre part (t. XI, p. 257), les considérations sur lesquelles la démonstration est fondée.

ERRATA.

Page 39*, ligne 16, *au lieu de* M. LEVY, *lisez* M. LERY.

TABLE DES MATIÈRES DES EXERCICES.

Questions proposées.

Questions résolues.

18023 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.