Nouvelles annales de mathématiques

E. Carvallo

La méthode de Grassmann

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 8-37

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__8_0>

LA MÉTHODE DE GRASSMANN (¹);

Par M. E. CARVALLO,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

J'ai montré dans deux Notes (²) le parti qu'on peut tirer de cette méthode pour la théorie des déterminants. On verra ici comment cette théorie, telle que je l'ai exposée, découle naturellement de la Géométrie. Mais le présent travail a une portée plus haute. En effet, l'œuvre de Grassmann est aussi peu connue que qualifiée de magistrale. Magistrale, elle l'est par la profondeur de la pensée, par la correction et la rigueur du style, par la puissance de la méthode créée. Elle synthétise les théories connues de Mécanique et de Géométrie et sa place, je veux le montrer, est à la base de l'enseignement élémentaire. Cependant elle est peu connue. C'est que, à côté de mon admiration sans réserve pour le savant, j'adresserai au professeur une critique fondamentale. M. Hermite, dans son enseignement profond, se plaît à montrer que les Mathématiques sont du domaine des Sciences naturelles. C'est un grand attrait pour ses auditeurs de savoir qu'il va leur montrer des faits mathématiques découverts par l'Analyse et non pas créés par l'imagination du savant. Tout au contraire, Grassmann, comme s'il prenait à tâche de vous décourager, procède de l'abstrait au concret, de la convention au fait naturel. Il déploie un volume de puissants efforts pour établir un calcul en apparence

(¹) *Die Ausdehnungslehre*. Berlin, 1862.
(²) *Nouvelles Annales*, 3ᵉ série, t. X; mai et août 1891.

arbitraire sur des symboles dénués de signification, et cela avec quel luxe de mots nouveaux! Par miracle, ce calcul s'applique à la Géométrie. Mais il faut encore autant d'efforts pour le voir avec Grassmann qu'il en faudra au lecteur pour fonder avec nous la méthode sur des considérations de Géométrie élémentaire. De lui-même, il fera abstraction de la signification géométrique des symboles et possédera les règles abstraites de Grassmann, pour les appliquer à l'Analyse. Je rends hommage aux importants travaux de MM. Caspary (1) et Péano (2) qui m'ont suggéré ce travail. M. Péano, s'inspirant du calcul barycentrique de Möbius a eu l'heureuse idée de baser son exposition sur le volume du tétraèdre. Je me suis empressé d'adopter ce principe. Mais mon exposition diffère pour le reste de celle de M. Péano. Je ne saurais trop conseiller au lecteur de lire son livre. Ma Note lui servira d'introduction. Il trouvera dans le livre des développements et des applications qui n'ont pas leur place dans un simple Article. Il reconnaîtra avec satisfaction que je me suis formellement imposé de justifier les définitions, d'en préciser dès l'abord la signification intime, puis d'exclure les mots et les symboles nouveaux. Le langage ordinaire suffit.

I. — Formes géométriques. Définitions et règles de calcul.

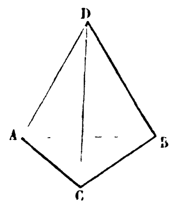
1. Sens et signe d'un tétraèdre. — Pour définir le sens d'un tétraèdre ABCD, j'imagine un mobile parcourant dans le sens ABC le contour formé par ces trois premiers points, puis un observateur placé debout sur

---

(1) *Journal de Kronecker*, t. C.— *Bulletin des Sc. math.*, 2e série, t. XI, 1887, et t. XIII, 1889.

(2) *Calcolo geometrico*. Turin, 1888.

le plan de ce triangle, à l'intérieur et la tête du côté du point D. Suivant que cet observateur voit le mobile tourner de droite à gauche ou en sens contraire, le tétraèdre a le sens *direct* ou *rétrograde*. Par ABCD, je



désigne le volume du tétraèdre précédé du signe + ou — suivant qu'il a le sens direct ou rétrograde. Dans le cas de la figure, on a

$$\mathrm{ABCD} = + \text{vol. ABCD},$$
$$\mathrm{BACD} = - \text{vol. ABCD}.$$

On constate que l'expression ABCD change de signe quand on échange deux lettres consécutives, A avec B, B avec C, ou C avec D. On peut donc ranger les lettres dans tel ordre que l'on veut par une suite d'échanges entre deux lettres consécutives, chaque échange étant accompagné d'un changement de signe. Je vais maintenant définir trois entités qui permettent de représenter des points, des droites et des plans. Je les appelle respectivement *formes du premier, deuxième et troisième ordre*.

2. Formes du premier ordre. — Pour définir une forme du premier ordre, je considère des points A, A', ... et des nombres correspondants m, m', ..., positifs ou négatifs, appelés *masses*. Enfin je prends un triangle arbitraire et variable PQR et je considère le

volume

$$(\mathrm{I}) \qquad m\,\mathrm{APQR} + m'\,\mathrm{A'PQR} + \ldots.$$

C'est une propriété de l'ensemble des points A, A', ... de masses m, m', ... de donner au volume (I) une valeur déterminée pour chaque triangle PQR. Si, quel que soit ce triangle, un deuxième ensemble $m_1\,\mathrm{A}_1$, $m_2\,\mathrm{A}_2$, ... donne pour la somme $m_1\,\mathrm{A}_1\,\mathrm{PQR} + m_2\,\mathrm{A}_2\,\mathrm{PQR} + \ldots$ le même volume que le premier ensemble, les deux ensembles sont équivalents à l'égard de cette propriété. L'entité géométrique abstraite de l'ensemble $m\mathrm{A}$, $m'\mathrm{A}'$, ..., et commune à tous les ensembles ainsi équivalents, sera bien représentée par le symbole

$$(1) \qquad m\mathrm{A} + m'\mathrm{A}' + \ldots,$$

qui résulte de (I) en supprimant l'écriture du triangle arbitraire PQR. Je l'appelle forme du *premier ordre*. La condition pour que la forme (1) soit équivalente à la forme $m_1\,\mathrm{A}_1 + m_2\,\mathrm{A}_2 + \ldots$ est que l'égalité

$$(\mathrm{I})' \quad m\,\mathrm{APQR} + m'\,\mathrm{A'PQR} + \ldots = m_1\,\mathrm{A}_1\,\mathrm{PQR} + m_2\,\mathrm{A}_2\,\mathrm{PQR} + \ldots$$

soit satisfaite pour tout triangle PQR. Cette condition sera bien exprimée par la formule

$$(1)' \qquad m\mathrm{A} + m'\mathrm{A}' + \ldots = m_1\,\mathrm{A}_1 + m_2\,\mathrm{A}_2 + \ldots.$$

Je dirai que les deux formes sont *égales*.

3. Règles de calcul. — La première égalité (I)' est algébrique; la deuxième (1)', symbolique, n'en diffère que par l'écriture du triangle arbitraire PQR. Il en résulte que toutes les règles de l'Algèbre relatives au calcul des polynômes s'appliquent à la forme (1) et à l'égalité (1)', en regardant les petites lettres m comme des nombres et les grandes lettres comme des facteurs littéraux. Par exemple, dans l'expression (1), on peut ré-

duire deux termes semblables, c'est-à-dire, remplacer $mA + nA$ par $(m+n)A$. Cela revient en effet à remplacer $m\text{APQR} + n\text{APQR}$ par $(m+n)\text{APQR}$ dans l'expression *numérique* (1). J'emploierai aussi les mêmes dénominations qui sont employées pour les polynômes algébriques.

4. Exemple. — Considérons deux points A et A' et le milieu C de la droite qui les joint, je dis que l'on a

$$A + A' = 2C.$$

Il suffit de vérifier que, pour tout triangle PQR, on a l'égalité

$$\text{APQR} + \text{A}'\text{PQR} = 2\,\text{CPQR}.$$

Or les trois tétraèdres de cette formule ont même base PQR. La hauteur du troisième est moyenne arithmétique entre les deux autres [1]. Le troisième tétraèdre est donc bien égal à la moyenne arithmétique entre les deux autres, comme l'exprime la dernière égalité.

Cet exemple suffit à faire comprendre qu'une forme du premier ordre représente généralement un point muni d'une masse. En Mécanique, elle représente la gravité d'un ensemble de points pesants, en particulier le centre de gravité muni d'une masse égale à la somme des masses des points composants.

L'égalité (1)' signifie que les deux systèmes considérés ont même centre de gravité et même masse totale. Ces considérations justifient le nom de *masse* donné à m, m', ...

5. Formes du deuxième ordre. — J'appelle *forme du deuxième ordre* et je représente par le symbole

$$mAB + m'A'B' + \dots \tag{2}$$

---

[1] Ces hauteurs, bien entendu, sont susceptibles d'un signe.

l'entité abstraite de l'ensemble formé par des segments AB, A'B', ... munis de masses m, m', ..., et qui est commune à tout ensemble $m_1 A_1 B_1$, $m_2 A_2 B_2$, ... pour lequel l'égalité

$$(\mathrm{II})' \quad m\,\mathrm{ABPQ} + m'\,\mathrm{A'B'PQ} + \ldots = m_1\,\mathrm{A_1B_1PQ} + m_2\,\mathrm{A_2B_2PQ} + \ldots$$

est satisfaite quel que soit PQ. La condition numérique (II)' s'écrit symboliquement, en supprimant l'écriture du segment arbitraire PQ,

$$(2') \quad m\,\mathrm{AB} + m'\,\mathrm{A'B'} + \ldots = m_1\,\mathrm{A_1B_1} + m_2\,\mathrm{A_2B_2} + \ldots.$$

En Mécanique, l'égalité (II)' représente le théorème des moments des forces $m\,\mathrm{AB}$, $m'\,\mathrm{A'B'}$, ... pris par rapport à l'axe arbitraire PQ. Ainsi la formule symbolique (2)' représente la condition d'équivalence de deux systèmes de forces et la forme (2) l'effet mécanique d'un système de forces appliquées à un corps solide.

6. Formes du troisième ordre. — J'appelle *forme du troisième ordre* et je représente par

$$(3) \qquad m\,\mathrm{ABC} + m'\,\mathrm{A'B'C'} + \ldots$$

l'entité qui est commune à l'ensemble des triangles ABC, A'B'C', ... munis de masses m, m', ... et à tout ensemble $m_1 A_1 B_1 C_1$, $m_2 A_2 B_2 C_2$, ..., pour lequel l'égalité

$$(\mathrm{III})' \quad m\,\mathrm{ABCP} + m'\,\mathrm{A'B'C'P} + \ldots = m_1\,\mathrm{A_1B_1C_1P} + m_2\,\mathrm{A_2B_2C_2P} + \ldots$$

est satisfaite quel que soit P. Cette condition s'écrit symboliquement

$$(3)' \quad m\,\mathrm{ABC} + m'\,\mathrm{A'B'C'} + \ldots = m_1\,\mathrm{A_1B_1C_1} + m_2\,\mathrm{A_2B_2C_2} + \ldots.$$

On verra qu'une forme du troisième ordre représente, en général, un plan muni d'un sens et d'une masse.

7. Règles pour le calcul d'une forme. — Les règles

pour le calcul des polynômes algébriques s'appliquent aux formes (2) et (3) comme aux formes (1). La démonstration est la même (n° 3). Nous emploierons aussi les mêmes dénominations. On peut écrire *les termes* d'une forme dans un ordre arbitraire, ajouter et retrancher un même terme, réduire les termes semblables, etc.

Il y a cependant cette différence qu'ici l'ordre des points dans chaque monôme influe sur son signe. Ainsi l'on a

$$m\,\mathrm{AB} + n\,\mathrm{BA} = m\,\mathrm{AB} - n\,\mathrm{AB} = (m - n)\,\mathrm{AB}.$$

C'est une conséquence de la définition du signe d'un tétraèdre. En effet, cette définition entraîne l'égalité numérique

$$\mathrm{ABPQ} = -\,\mathrm{BAPQ};$$

par suite, d'après la définition d'une forme du second ordre (n° 5),

$$\mathrm{AB} = -\,\mathrm{BA}.$$

Il en résulte aussi les formules

$$\mathrm{AA} = 0, \qquad \mathrm{AB} = \mathrm{A}(\mathrm{B} - \lambda\mathrm{A}),$$

dont nous ferons un fréquent usage.

8. Multiples et sous-multiples. Addition et soustraction. — Multiplier une forme par un nombre quelconque, positif ou négatif, c'est multiplier par ce nombre chaque terme de la forme. Ajouter plusieurs formes, c'est réunir dans une seule forme tous les termes qui figurent dans les formes proposées, en conservant leurs signes. De ces notions résultent celles de la division par un nombre et de la soustraction des formes. A l'aide de ces opérations, on pourra former une fonction linéaire homogène de plusieurs formes de même ordre. Toutes les règles du calcul des polynômes

algébriques s'appliquent à ces opérations, pourvu qu'on tienne compte de l'ordre des facteurs littéraux (n° 7). La démonstration est celle du n° 3.

9. Multiplication des formes dont la somme des ordres ne surpasse pas 4. — Je considère, par exemple, les deux formes

$$(1)\qquad mA + m'A' + m''A'',$$

$$(2)\qquad pBC + p'B'C'.$$

J'imagine que les symboles (1) et (2) représentent des polynômes algébriques et j'effectue la multiplication du premier par le second d'après les règles de l'Algèbre, *en respectant toutefois l'ordre des facteurs littéraux*. J'obtiens

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} mp\,ABC + m'p\,A'BC + m''p\,A''BC \\ + mp'AB'C' + m'p'A'B'C' + m''p'A''B'C'. \end{array}\right.$$

Ce symbole peut représenter une forme du troisième ordre. Cette forme, à cause de son origine, je l'appelle le *produit des formes* (1) *et* (2).

10. Règles de calcul. — 1° Pour s'assurer de l'intérêt de cette notion, on doit constater que le produit ne change pas quand on remplace les formes (1) et (2) par des formes égales. Cela est facile.

Remplaçons en effet la forme (1) par la forme supposée égale

$$(1)'\qquad m_1A_1 + m_2A_2.$$

Le produit de (1)′ par (2) sera

$$(3)'\qquad \left\{\begin{array}{l} m_1p\,A_1BC + m_2p\,A_2BC \\ + m_1p'A_1B'C' + m_2p'A_2B'C'. \end{array}\right.$$

Or la forme (1) étant égale à (1)′, on a d'après la définition de cette égalité (n° 2) les deux égalités numériques

$$m\,\mathrm{ABCR} - m'\,\mathrm{A'BCR} + m\;\mathrm{A''BCR}$$
$$- m_1\,\mathrm{A_1BCR} + m_2\,\mathrm{A_2BCR},$$
$$m\,\mathrm{AB'C'R} + m'\,\mathrm{A'B'C'R} - m''\,\mathrm{A''B'C'R}$$
$$- m_1\,\mathrm{A_1B'C'R} + m_2\,\mathrm{A_2B'C'R},$$

où R est un point arbitraire. J'ajoute membre a membre ces deux égalités après les avoir multipliées respectivement par p et p'. J'obtiens une égalité numérique qui a lieu quel que soit R. Celle-ci exprime que la forme (3) égale la forme (3'), (n° 6). De même on peut remplacer la forme (2) par une forme égale; on peut multiplier l'une d'elles par un nombre, pourvu qu'on divise l'autre par le même nombre.

2° On pourra aussi considérer des produits de plus de deux formes, pourvu que la somme des ordres ne surpasse pas 4. Si cette somme égale 4, le produit représente un volume qu'on peut regarder comme une forme du quatrième ordre.

3° Une forme monome peut être regardée comme le produit de son coefficient et des points qui y figurent et cela de bien des manières differentes. Ainsi l'on a, en marquant par un point le signe de la multiplication,

$$m\,\mathrm{ABC} - m\;\mathrm{A.B\;C} - m\,\mathrm{A.BC}$$
$$- \frac{m}{p}\,\mathrm{AB}.p\mathrm{C} - -\mathrm{BA}.m\mathrm{C} \quad .$$

4° Si, dans un produit de formes, on echange deux facteurs consécutifs d'ordres p et q, le produit est multiplié par $(-1)^{pq}$. Il suffit, pour le démontrer, de constater le fait pour chacun des termes du produit développé, ce qui est facile.

5° En résumé, les règles du *calcul algébrique* s'appliquent à celui des *formes géométriques*, avec cette seule différence que, dans ce dernier, un monôme change de signe quand on échange deux facteurs du premier ordre. Cette règle entraîne plusieurs conséquences faciles que nous ne développerons pas. La précédente (4°) en est une. Nous utiliserons surtout celle du n° 7.

6° Nous serons conduits plus loin à considérer des produits pour lesquels la somme des ordres des facteurs est supérieure à 4. Mais nous verrons qu'un tel produit est égal à un produit de volumes par une forme du premier, du deuxième ou du troisième ordre. L'étude se réduit donc à celle des trois premières formes.

Nous verrons, comme il est facile de le prévoir, que :

Les formes d'ordre	1	représentent des	points,
»	2	»	droites,
»	3	»	plans,

ces éléments étant munis de masses qui sont respectivement des nombres abstraits, des longueurs et des aires.

Pour faciliter cette étude, il convient d'étudier d'abord le *vecteur,* forme égale à la différence de deux points et les formes qui résultent de la multiplication de deux ou trois vecteurs.

II. — Vecteurs.

11. Théorème. — *Pour que les deux formes* $A' - A$ *et* $B' - B$ *soient égales, il faut et il suffit que les segments* AA' *et* BB' *soient égaux, parallèles et de même sens* [1].

1° *La condition est suffisante.* — Si l'on considère le triangle arbitraire PQR, on a

$$A'PQR - APQR = B'PQR - BPQR. \tag{1}$$

[1] Le lecteur est prié de faire les figures. Elles sont toujours très simples.

Car ces quatre pyramides, ayant même base PQR, sont mesurées par leurs hauteurs (positives ou négatives). De plus, à cause de l'hypothèse sur les segments AA' et BB', la différence des deux premières hauteurs égale la différence des deux autres.

L'égalité (I) étant vérifiée pour tout triangle PQR, on a par définition (n° 2)

$$A' - A = B' - B. \tag{1}$$

2° *Réciproquement,* je suppose la relation (1) satisfaite. Je peux transporter le segment AA' parallèlement à lui-même (1°) de façon à placer le point A en B; A' viendra quelque part en A'' et l'on aura

$$A' - A = A'' - B = B' - B,$$

d'où

$$A'' = B'.$$

On conclut de là que A'' coïncide avec B' et, par suite, que le segment BB' n'est autre qu'une des positions de AA' transporté parallelement à lui-même.

12. Définitions. — Ce théorème justifie le nom de *vecteur* que je donnerai à la forme $A' - A$. Elle comporte, en effet, l'idée d'une direction et d'une longueur, celles de AA'. Un vecteur dont la longueur est l'unité sera appelé *vecteur unité* ou *direction*. En se reportant à la démonstration précédente, on voit qu'un vecteur est égal au produit de sa direction par sa longueur, coefficient numérique que j'appelle *masse*. On peut aussi changer le signe de la masse en même temps que le sens de la direction. Pour la commodité, je dirai que A est l'origine et A' l'extrémité du vecteur $-A + A'$, quoique l'un de ces points soit arbitraire, comme on vient de le voir (n° **11**).

13. Somme de vecteurs. — D'abord l'ordre des termes est indifférent (n° 3). Je peux aussi mettre l'origine de chaque vecteur à l'extrémité du précédent (n° 11). Alors, dans la somme

$$S = (-A + A') + (-B + B') + (-C + C') \ldots + (-H + H'),$$

les termes intermédiaires se détruisent, A' avec B, B' avec C, ...

Donc

$$S = -A + H'.$$

La somme de plusieurs vecteurs égale le vecteur qui a pour origine celle du premier et pour extrémité celle du dernier vecteur, après qu'on a mis tous les vecteurs bout à bout dans un ordre quelconque.

14. Théorème. — *Pour que deux produits de deux vecteurs soient égaux, il faut et il suffit que, après qu'on a donné la même origine aux deux couples de vecteurs, les deux triangles obtenus soient dans un même plan, égaux et de même sens.*

Soit P l'origine arbitraire que je donne aux quatre vecteurs, l'égalité des deux produits s'écrira

$$(1) \qquad (-P + A)(-P + B) = (-P + A')(-P + B').$$

Or cette égalité équivaut par définition (n° 5) à la condition

$$(\mathrm{I}) \quad QP(-P + A)(-P + B) = QP(-P + A')(-P + B'),$$

qui contient deux points arbitraires P et Q, ou (n° 7)

$$(\mathrm{I})' \qquad QPAB = QPA'B'.$$

L'égalité de ces deux tétraèdres doit avoir lieu quel que soit Q; en particulier, pour $Q = A'$, elle donne

$$A'PAB = A'PA'B' = 0.$$

Donc A′ est dans le plan PAB; de même B′ est dans le plan PAB. Les bases PAB, PA′B′ étant alors dans le même plan, la condition (I)′ exige que ces triangles soient égaux et orientés dans le même sens de rotation. Ces conditions sont évidemment suffisantes pour que la condition (I) soit toujours satisfaite. Comme elle contient deux points arbitraires P et Q, elle est équivalente à l'égalité (1). La condition de l'énoncé est donc bien nécessaire et suffisante.

15. Définition. — Un pareil produit de deux vecteurs, je l'appelle *couple*, parce que cette forme représente le couple de forces qu'on rencontre en Mécanique. C'est ce qui résulte du n° 14. Elle comporte une direction de plan, un sens et une aire, ceux du triangle PAB. Elle peut être regardée comme le produit de cette aire par un *couple unité* ou direction de plan. A chaque direction de plan munie d'un sens, on peut faire correspondre la direction de la droite perpendiculaire dans un sens convenu. On peut donc représenter un couple par un vecteur unité multiplié par une masse égale, non plus à une longueur comme au n° 12, mais à une surface. J'appelle ce produit l'*axe du couple*. Cette correspondance entre les couples et les vecteurs rentre dans le principe de dualité que nous rencontrerons plus loin.

16. Addition des couples. — Je considère deux couples; je peux toujours (n° 14) faire en sorte que ces couples aient un vecteur commun. Je peux alors écrire leur somme

$$IJ + IJ' = I(J + J').$$

Il suffit donc d'ajouter les vecteurs non communs J *et* J′. De plus, on peut toujours faire en sorte que I soit un vecteur unité et que J et J′ soient perpendiculaires à I (nº 14). Les axes des couples s'obtiennent alors en faisant tourner J et J′ d'un angle droit autour de I. On voit ainsi que la somme des couples a pour axe la somme des axes des couples proposés. Ainsi :

Pour ajouter deux couples, il suffit d'ajouter leurs axes.

Cette règle fait rentrer l'addition des couples dans celle des vecteurs. Elle rentre dans le principe général de dualité appliqué aux vecteurs.

17. Théorème. — *Pour que deux produits de trois vecteurs soient égaux, il faut et il suffit que, si l'on donne une même origine à ces vecteurs, les deux tétraèdres qu'ils forment soient égaux et de même signe.*

En effet, soit P l'origine *arbitraire* commune. L'égalité des deux produits s'écrit

$$(1) \quad (P-A)(P-B)(P-C)=(P-A')(P-B')(P-C').$$

Elle équivaut à

$$(I) \quad P(P-A)(P-B)(P-C)=P(P-A')(P-B')(P-C'),$$

égalité entre deux volumes qui contient le point arbitraire P. Or (I) s'écrit

$$(I)' \qquad PABC=PA'B'C'.$$

Cette égalité, équivalente à l'égalité (1), signifie que les deux tétraèdres formés par les trois vecteurs de chaque produit sont égaux et de même signe. La notion du produit des trois vecteurs équivaut donc à celle d'un volume.

18. Corollaires. — 1° Dans un produit de trois vecteurs, on peut choisir arbitrairement deux quelconques d'entre eux. Leur produit forme un couple arbitraire. La composante normale du troisième vecteur devra seulement être égale au quotient du volume donné par l'aire du couple arbitraire.

2° Une somme de produits de trois vecteurs égale un produit de trois vecteurs dont le volume égale la somme des volumes représentés par les produits ajoutés.

3° *Le produit de quatre vecteurs est nul;* car il s'écrit, en désignant par A et A′ des points, par I, I′, I″ des vecteurs,

$$(A - A')II'I'' = AII'I'' - A'II'I''.$$

Or, les deux volumes du second membre étant égaux, leur différence est nulle.

4° *Les égalités* $AI = 0$, $AII' = 0$, $AII'I'' = 0$ *équivalent respectivement à* $I = 0$, $II' = 0$, $II'I'' = 0$.

En effet, $AI = 0$, par exemple, peut être remplacé (5) par

$$0 = PQAI = A(P - A)(Q - A)I.$$

Or, le dernier membre est égal au tétraèdre déterminé par les trois vecteurs $P - A$, $Q - A$ et I, dont les deux premiers sont arbitraires comme P et Q. Cette égalité équivaut donc à $I = 0$.

III. — Discussion des trois formes.

19. Forme du premier ordre. — I. *Réduction.* — Soit la forme

$$F = m_1 A_1 + m_2 A_2 + \ldots \tag{1}$$

Je prends un point O arbitraire. Il vient

$$\left\{\begin{aligned} F = (m_1 + m_2 + \ldots)O + m_1(-O + A_1) \\ - m_2(-O + A_2) + \ldots = mO + I. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

en appelant m la somme des masses $m_1, m_2, \ldots$, et I la somme des vecteurs $m_1(-O+A_1)$, $m_2(-O+A_2)$, ... obtenue comme on sait.

Deux cas se présentent :

Premier cas : $m = 0$. — F égale alors le vecteur I.

Second cas : $m \gtrless 0$. — Je pose

$$I = -O + A = m(-O + G).$$

Le point A s'obtiendra par la règle d'addition des vecteurs. Le point G sera l'extrémité du segment $OG = \frac{OA}{m}$ porté sur OA à partir du point O. Il vient

$$(3) \qquad F = mO + m(-O + G) = mG.$$

G est le centre de gravité du système. Pour l'obtenir, il suffit d'exécuter les constructions indiquées par les formules ci-dessus.

II. *Conséquences.* — 1° L'égalité (3) s'écrit, en mettant à la place de F sa valeur (1),

$$m_1(A_1 - G) + m_2(A_2 - G) + \ldots = 0.$$

Appliquée à deux points, elle montre que le point G est sur A_1A_2 et partage ce segment dans le rapport (positif ou négatif)

$$\frac{GA_1}{GA_2} = -\frac{m_2}{m_1}.$$

Cette remarque donne une seconde manière de trouver le centre de gravité en procédant de proche en proche.

2° Si m_2 est variable et tend vers $-m_1$, le point G s'éloigne indéfiniment sur A_1A_2. D'autre part, pour $m_2 = -m_1$, $m_1A_1 + m_2A_2$ représente un vecteur. On peut donc dire que le vecteur représente un point à l'infini dans la direction de ce vecteur. Mais il le représente avec un coefficient numérique qui est la longueur de ce vecteur. En résumé :

Une forme du premier ordre représente un point muni d'une masse ou un vecteur, c'est-à-dire un point muni d'une masse à distance finie ou infinie.

20. Forme du second ordre. — I. *Réduction.* — Soit

$$F = m_1 A_1 B_1 + m_2 A_2 B_2 + \ldots.$$

Je transforme un terme quelconque comme il suit

$$mAB = mA(B - A) = A\,m(B - A).$$

Soit O un point arbitraire et I le vecteur $m(B - A)$, j'aurai

$$mAB = AI = (A + O - O)I = OI + (A - O)I = OI + K,$$

en désignant par K le couple $(A - O)I$. En faisant la même transformation sur chaque terme de F, il vient

$$\begin{aligned} F &= OI_1 + K_1 + OI_2 + K_2 + \ldots \\ &= O(I_1 + I_2 + \ldots) + (K_1 + K_2 + \ldots). \end{aligned}$$

Les sommes entre parenthèses peuvent être remplacées respectivement par un vecteur I et un couple K (13 et 16). On a donc

$$F = OI + K.$$

En Statique, OI est la résultante de translation, K le couple résultant.

II. *Conséquences.* — 1° *Pour que la forme* $F = OI + K$ *soit nulle, il faut que* K *et* I *soient nuls.*

En effet, en multipliant par O les deux membres de l'égalité

$$(1) \qquad OI + K = 0,$$

il vient $OK = 0$, d'où $K = 0$. L'égalité (1) donne alors

$$I = 0.$$

La condition d'égalité de deux formes réduites s'écrira

$$OI + K = O'I' + K' = (O + O' - O)I' + K'$$

ou

$$O(I - I') + [K - (O' - O)I' - K'] = 0.$$

Cette égalité équivaut, d'après ce qui précède, à

$$I' = I, \qquad K' = K + (O - O')I.$$

Ces formules renferment les conséquences qu'on développe en Mécanique. Pour en énoncer quelques-unes, je suppose que la forme $OI + K$ est donnée et que O' est variable.

2° *Pour qu'une forme* $OI + K$ *puisse être réduite à un couple* K', *il faut et il suffit que l'on ait* $I = 0$.

3° *Pour qu'une forme* $OI + K$ *puisse être réduite à un monôme* $O'I'$, *il faut et il suffit que l'on puisse choisir le point* O' *de façon que l'on ait* $K = (O' - O)I$. Pour cela, il faut que le vecteur I soit parallèle au plan du couple K. Le lieu du point O' est alors une parallèle menée à I, dans le plan du couple K. C'est le cas d'une forme $mAB + m'A'B', \ldots$, lorsque tous les points $A, B, A', B', \ldots$ sont dans un même plan; il suffit, pour s'en assurer, de prendre le point O dans ce plan.

4° *Pour que deux formes monômes* mOA, $m'O'A'$ *soient égales, il faut et il suffit que les segments* OA, $O'A'$ *soient comptés sur la même droite et liés par la relation algébrique* $mOA = m'O'A'$.

Ainsi, le monôme mOA représente la droite indéfinie *OA munie d'un sens et d'une masse égale à* m fois la longueur OA.

III. *Remarques.* — 1° La méthode de réduction se simplifie dans le cas de droites concourantes ou parallèles, comme le montrent les égalités

$$(1)\quad m_1 \text{A}\,\text{I}_1 + m_2 \text{A}\,\text{I}_2 + \ldots = \text{A}(m_1 \text{I}_1 + m_2 \text{I}_2 + \ldots) = \text{AI},$$
$$(2)\quad m_1 \text{A}_1 \text{I} + m_2 \text{A}_2 \text{I} + \ldots = (m_1 \text{A}_1 + m_2 \text{A}_2 + \ldots)\text{I} = m\text{GI}.$$

2° Cette dernière formule, appliquée au cas où les deux formes $m_1 \text{A}_1 \text{I}$, $m_2 \text{A}_2 \text{I}$ représentent deux segments qui tendent à devenir égaux, parallèles et de sens contraire, permet d'envisager le couple comme la droite de l'infini d'un plan parallèle au plan du couple.

3° Ce numéro constitue une théorie de la Statique des corps solides, pourvu qu'on parte du théorème des vitesses virtuelles. Si, en effet, AB est une force appliquée au point A du corps et PQ une vitesse de rotation, PQAB dt est le travail de AB pour cette rotation et dans le temps dt. Le théorème des vitesses virtuelles donne pour la condition d'équilibre, en supprimant le facteur dt commun à tous les termes,

$$\text{PQAB} + \text{PQA'B'} + \ldots = 0.$$

Cette égalité fait rentrer la théorie des forces dans celle des formes du deuxième ordre.

21. Formes du troisième ordre. — I. *Réduction.* — La forme du troisième ordre s'écrit

$$\text{F} = m_1 \text{A}_1 \text{B}_1 \text{C}_1 + m_2 \text{A}_2 \text{B}_2 \text{C}_2 + \ldots.$$

Je transforme chaque monôme ainsi :

$$m\text{ABC} = m\text{A}(\text{B}-\text{A})(\text{C}-\text{A}) = m(\text{A}-\text{O}+\text{O})(\text{B}-\text{A})(\text{C}-\text{A}),$$

O étant un point arbitrairement choisi. Je désigne le couple $m(\text{B}-\text{A})(\text{C}-\text{A})$ par K et le produit $(\text{A}-\text{O})\text{K}$ par V. Il vient

$$m\text{ABC} = \text{OK} + \text{V}.$$

La forme F s'écrira donc

$$\begin{aligned} F &= OK_1 + V_1 + OK_2 + V_2 + \ldots \\ &= O(K_1 + K_2 + \ldots) + (V_1 + V_2 + \ldots). \end{aligned}$$

Les sommes entre parenthèses sont égales respectivement à un couple K et à un produit de trois vecteurs V. Dès lors, on a

$$F = OK + V.$$

Deux cas se présentent :

Premier cas : $K = 0$. — La forme est égale à un produit de trois vecteurs V.

Deuxième cas : $K \gtrless 0$. — Je peux poser $V = IK$, I étant un vecteur. Alors

$$F = (O + I)K = ABC.$$

A étant le point $O + I$; B et C, tels que

$$(B - A)(C - A) = K.$$

Ainsi la forme F se réduit au triangle ABC. Celui-ci est dans le plan mené par le point $O + I$, parallèle à celui du couple K, de même sens et de même aire que ce couple.

II. *Conséquences.* — 1° *Pour que deux formes monômes* ABC, A′B′C′ *soient égales, il faut et il suffit que les triangles* ABC, A′B′C′ *soient dans le même plan, de même sens et de même aire.*

Ainsi la forme du troisième ordre réductible au monôme ABC représente un plan muni d'un sens et d'une aire, ceux du triangle ABC.

2° La somme de deux monômes $ABC + A'B'C'$, dont les plans sont parallèles, peut s'écrire

$$mOK + m'O'K = (mO + m'O')K,$$

en désignant par K le couple unité parallèle à la direction commune des deux plans. La dernière forme représente un plan de masse $m + m'$ et qui partage la distance des deux plans ABC, A′B′C′ dans le rapport $-\frac{m'}{m}$. Si l'aire m' du triangle A′B′C′ tend vers $-m$, ce plan est rejeté à l'infini. D'autre part, la somme est, dans ce cas, égale à $m(\mathrm{O}-\mathrm{O}')\mathrm{K}=\mathrm{V}$, produit de trois vecteurs. On peut donc dire que le produit de trois vecteurs représente un plan à l'infini. Mais il le représente avec un coefficient égal au volume du tétraèdre V. Comme toute trace de la direction des plans donnés a disparu, on peut regarder tous les produits de trois vecteurs comme représentant un plan unique à l'infini. C'est ce qu'on appelle le *plan de l'infini*.

3° On pourra faire abstraction de la forme triangulaire qu'on a jusqu'ici supposée à l'aire dont est affecté chaque plan : la seule chose qui importe, c'est son étendue et son sens, c'est-à-dire le sens dans lequel un mobile parcourt le contour de cette surface.

22. La forme du quatrième ordre, représentant une somme de volumes, pourra être remplacée par un monôme; ce sera un volume égal à cette somme. On pourra, d'ailleurs, faire abstraction de la forme tétraédrique de ces volumes.

IV. — Coordonnées. Déterminants. Homographie. Dualité. Produits d'ordre quelconque.

23. Coordonnées. Déterminants. — 1° Soit un point O appelé origine, puis trois vecteurs I_1, I_2, I_3 non parallèles à un même plan et appelés *vecteurs coordonnés*. Tout point X pourra s'écrire

$$\mathrm{X}=\mathrm{O}+x_1\mathrm{I}_1+x_2\mathrm{I}_2+x_3\mathrm{I}_3, \tag{1}$$

x_1, x_2, x_3 étant les valeurs algébriques des composantes du vecteur $-\mathrm{O}+\mathrm{X}$, suivant les vecteurs I_1, I_2, I_3 dont les longueurs servent d'unité de mesure pour chacune de ces composantes. A chaque point X répond un système déterminé de nombres x_1, x_2, x_3, et réciproquement. Quand les trois vecteurs I_1, I_2, I_3 ont pour longueur l'unité, ces nombres sont les *coordonnées cartésiennes* du point X.

2° Dans la formule (1), je pose

$$I_1 = A_1 - O, \qquad I_2 = A_2 - O, \qquad I_3 = A_3 - O.$$

De plus, pour la symétrie des notations, je remplace O par A_4 et je désigne par x_4 le coefficient

$$1 - x_1 - x_2 - x_3$$

de ce point. La formule (1) devient

$$X = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4. \tag{2}$$

Le tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$ est le *tétraèdre coordonné*. Il est arbitraire comme le système $OI_1 I_2 I_3$; x_1, x_2, x_3, x_4 sont les *coordonnées* tétraédriques du point X. Leur somme est égale à 1. Si elle était m, X représenterait un point de masse m. Les lettres A de la formule (2), au lieu de représenter des points simples, pourraient aussi représenter des points affectés de masses.

3° Dans le système des coordonnées tétraédriques, le plan se présente sous la forme

$$\begin{aligned}\xi &= PQR \\ &= (p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_3 A_3 + p_4 A_4)(q_1 A_1 + \ldots)(r_1 A_1 + \ldots).\end{aligned}$$

Ce produit développé sera une somme de quatre termes, tels que

$$x_1 A_2 A_3 A_4 = x_1 \alpha_1.$$

x_1 étant un nombre et α_1 un plan muni d'une aire qui peut n'être pas égale à l'unité. Le nombre x_1 est le coefficient de $A_2 A_3 A_4$ dans le produit

$$(p_2 A_2 + p_3 A_3 + p_4 A_4)(q_2 A_2 + q_3 A_3 + q_4 A_4)(r_2 A_2 + r_3 A_3 + r_4 A_4).$$

C'est la *valeur du déterminant*

$$\begin{vmatrix} p_2 & p_3 & p_4 \\ q_2 & q_3 & q_4 \\ r_2 & r_3 & r_4 \end{vmatrix}.$$

On voit s'imposer ici la méthode d'exposition des déterminants telle que je l'ai donnée antérieurement. Le plan ξ sera représenté par la somme de quatre termes

$$\xi = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 + x_4 \alpha_4.$$

x_1, x_2, x_3, x_4 sont les *coordonnées tangentielles* du plan ξ.

24. Homographie et dualité. — 1° A quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 pris dans une première figure, faisons correspondre quatre points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 d'une autre figure; ces symboles pouvant, d'ailleurs, représenter des points avec des masses. A tout point de la première figure

$$X = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4 \tag{1}$$

répond un point de la deuxième figure

$$X' = x_1 A'_1 + x_2 A'_2 + x_3 A'_3 + x_4 A'_4, \tag{2}$$

et réciproquement. Les deux figures sont dites *homographiques*.

2° Aux quatre points faisons correspondre, non plus quatre points, mais quatre plans α_1, α_2, α_3, α_4. A chaque point X de la première figure répond un plan

$$\xi = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 + x_4 \alpha_4, \tag{3}$$

et réciproquement. Les plans de la deuxième figure sont *homographiques* des points de la première. A toute propriété des points de la première figure répondra, comme nous allons voir, une propriété des plans de la deuxième. C'est le *principe de dualité*.

25. Extension du calcul des formes. Produits de plans. — Par la méthode du n° 24, je fais correspondre un plan α à chaque point A. A toute forme de points, par exemple $m\mathrm{AB} + m'\mathrm{A}'\mathrm{B}'$, ..., répond une forme de plans $m\alpha\beta + m'\alpha'\beta'$, ... Je dois regarder deux formes de plans comme *égales* si les deux formes de points correspondantes sont égales. La forme de plans représente l'entité commune à tous les ensembles de plans ainsi obtenus. D'après cette définition, toutes les règles pour le calcul des formes de points s'appliquent aux formes de plans. Donc à toute propriété d'une figure représentée par une égalité entre des formes de points répond une propriété représentée par la même égalité entre les formes correspondantes de plans. C'est le principe de dualité. Il nous permet d'étendre aux formes de plans les résultats du n° 3. D'un autre côté, l'homographie n° 24 permet de remplacer un vecteur par un point à distance finie et un couple par un plan à distance finie. Comme l'homographie est intimement liée à la dualité, il n'y a pas lieu de distinguer, dans des énoncés généraux, ces éléments qui peuvent être substitués l'un a l'autre. On arrive ainsi aux énoncés suivants :

1° *Une forme de plans du premier ordre*

$$m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \ldots$$

est réductible à un monôme (19).

Ce résultat est, d'ailleurs, connu directement (21).

2° *Une forme de plans du deuxième ordre*

$$m_1\alpha_1\beta_1 + m_2\alpha_2\beta_2 + \ldots$$

est réductible à un binôme (20).

3° *Une forme de plans du troisième ordre*

$$m_1 \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 + m_2 \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 + \ldots$$

est réductible à un monôme (**21**).

4° *Une forme de plans du quatrième ordre est réductible à un monôme* (**22**).

On sait que la première de ces formes représente un plan muni d'un sens et d'une aire. Je vais maintenant rechercher ce que représentent les trois autres formes réduites chacune à un monôme. Je m'appuierai sur le théorème suivant :

26. Théorème fondamental. — *Pour que deux formes monômes de même espèce et qui ne sont pas nulles ne diffèrent que par leurs masses, il faut et il suffit que les facteurs de l'une soient des fonctions linéaires des facteurs de l'autre. Le rapport des masses est égal au déterminant des coefficients.*

1° La condition est nécessaire. Soit, par exemple,

$$AA' = m A_1 A_2.$$

En multipliant par A les deux membres, j'ai

$$0 = m A A_1 A_2.$$

Comme, par hypothèse, m n'est pas nul, cette condition exige que le point A soit sur $A_1 A_2$. On en conclut facilement que A est fonction linéaire de A_1 et A_2. De même A' est une fonction linéaire de A_1 et A_2.

2° Soit

$$A = m_1 A_1 + m_2 A_2,$$
$$A' = m'_1 A_1 + m'_2 A_2.$$

Je multiplie ces deux égalités membre à membre. Il vient

$$AA' = m A_1 A_2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

m est la *valeur du déterminant*

$$\begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ m'_1 & m'_2 \end{vmatrix}.$$

C'est ici que la notion de déterminant, telle que je l'ai donnée (¹), s'impose vraiment. Elle se présente comme le rapport de deux volumes, de deux aires situées dans le même plan, de deux segments comptés sur la même droite.

27. Formes monomes de plans. — Considérons, par exemple, le produit de deux plans qui se coupent $\alpha_1\alpha_2$. Pour qu'un autre produit $\alpha\alpha'$ soit égal au premier, il faut et il suffit que l'on ait (25 et 26)

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha = m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2, \\ \alpha' = m'_1\alpha_1 + m'_2\alpha_2, \end{cases} \qquad m_1 m'_2 - m'_1 m_2 = 1.$$

Les plans α et α' sont donc deux plans pivotant d'une façon arbitraire autour de l'intersection des plans α_1 et α_2. Voilà pour les positions. Pour les masses, soit O un point commun aux quatre plans. Le plan α, par exemple, est égal au produit OK du point O par un couple déterminé K que j'appelle le *couple du plan* α. Les égalités (1), écrites avec cette notation, contiennent le point O en facteur. En supprimant ce facteur, on obtient les égalités équivalentes (18, 4°)

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathrm{K} = m_1\mathrm{K}_1 + m_2\mathrm{K}_2, \\ \mathrm{K}' = m'_1\mathrm{K}_1 + m'_2\mathrm{K}_2. \end{cases}$$

Ces égalités subsistent si l'on imagine que les lettres K représentent, non plus les couples eux-mêmes, mais

(¹) *Nouvelles Annales*, 3ᵉ série, t. X; mai 1891.

leurs axes (16). Dès lors, on a (26)

$$KK' = K_1 K_2$$

ou bien (18, 4°)

$$OKK' = OK_1 K_2.$$

Cette condition est suffisante, car la démonstration peut être remontée, toutes les propositions invoquées admettant la réciproque. On arrive ainsi aux conclusions suivantes :

1° *Le produit de deux plans* $\alpha\alpha'$ *représente leur droite d'intersection. Le sens et la masse de cette droite sont ceux de l'axe du couple* KK′ *formé par les axes des couples des plans donnés.*

2° *Le produit de trois plans* $\alpha\alpha'\alpha''$ *représente leur point commun avec une masse égale au volume du tétraèdre* OKK′K″ *déterminé par les axes de leurs couples.*

D'après cela, la droite d'intersection de deux plans a pour masse un volume multiplié par une longueur. Le point d'intersection de trois plans a pour masse le carré d'un volume. Ils pourront donc se mettre respectivement sous les formes

$$ABCD.AB, \quad (ABCD)^2 A.$$

Le produit d'un plan par une droite pourra se mettre, à un facteur volume près, sous la forme $\alpha.\alpha'\alpha''$. Il représente leur intersection avec la masse qu'on sait calculer. Le produit de quatre plans pourra être regardé comme le produit de deux droites $\alpha\alpha'.\alpha''\alpha'''$. C'est le cube d'un volume.

28. Groupement des facteurs d'un produit. — Dans un produit de points qui ne dépasse pas le quatrième

ordre, on peut grouper à volonté les facteurs et les échanger en se conformant à la règle des signes. Il n'en est pas de même dans les produits d'ordre supérieur à quatre. Les expressions ABCD.E, A.BCDE, ABC.DE représentent des résultats très différents. Cette remarque s'applique, d'après le principe de dualité, à des produits où n'entrent que des plans. Avec cette remarque, un peu de réflexion permettra d'effectuer les transformations légitimes et d'éviter les fautes de calcul. On sera, d'ailleurs, toujours guidé par la Géométrie.

29. Méthode de réduction pour le calcul des formes. — Soit à réduire la forme $f(A, B, \ldots)$, où A, B, ... représentent des points. A chaque point A, je fais correspondre un plan α (24). A $f(A, B, \ldots)$ répond la forme $f(\alpha, \beta, \ldots)$. Je transforme celle-ci en $f_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots)$. A cette dernière forme correspond, dans la première figure, la forme $f_1(A_1, B_1, \ldots)$. Celle-ci est égale à $f(A, B, \ldots)$ (25).

Le choix de la correspondance rend le calcul plus ou moins facile. Voici le système le plus avantageux [1] ;

Soit un tétraèdre ABCD. A chaque sommet je fais correspondre la face opposée, mais avec une masse telle que le produit de ce sommet par cette face soit égal à $+1$. Ainsi :

à A correspond	$\alpha = (ABCD)^{-1}BCD$,	tel que	$A\alpha = 1$,
à B correspond	$\beta = (BACD)^{-1}ACD$,	tel que	$B\beta = 1$,
....		....	....

Par l'application du n° 27, on constate que cette propriété s'étend à tous les éléments du tétraèdre : à chaque élément du tétraèdre pris dans la première fi-

---

[1] Il joue un rôle fondamental dans l'exposition de Grassmann.

gure répond, dans la deuxième, l'élément opposé du tétraèdre et avec une masse telle que le produit du premier élément par le second égale $+1$. Ainsi :

$$\begin{array}{llll} \text{à AB correspond} & \alpha\beta = (\mathrm{ABCD})^{-1}\mathrm{CD}, & \text{tel que} & \mathrm{AB}\alpha\beta = 1, \\ \text{à ABC correspond} & \alpha\beta\gamma = (\mathrm{ABCD})^{-1}\mathrm{D}, & \text{tel que} & \mathrm{ABC}\alpha\beta\gamma = 1, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

La forme correspondante d'une forme quelconque de l'une ou l'autre figure se calcule aisément par cette règle.

Exemple. — Soit la forme ABC.AD. La forme correspondante de la deuxième figure est

$$(\mathrm{ABCD})^{-1}\mathrm{D}(\mathrm{ADBC})^{-1}\mathrm{BC} = (\mathrm{ABCD})^{-2}\mathrm{BCD}.$$

En remontant à la première figure, on a (ABCD) A.

Par ce procédé, on peut obtenir un grand nombre de formules qu'on trouvera dans Grassmann avec des démonstrations plus pénibles. Il ne me paraît pas utile de s'en charger la mémoire. Le procédé s'applique aussi à l'étude des figures planes en remplaçant le tétraèdre par un triangle. Plus généralement, il s'applique, comme tout ce Mémoire, à un espace à n dimensions.

30. Mon exposition a dû être limitée aux fondements de la théorie. Elle suffit cependant pour faire voir, dans l'œuvre de Grassmann, une méthode de Géométrie à la fois synthétique et analytique. Je l'ai montré, elle embrasse les déterminants, la Mécanique, les coordonnées cartésiennes et tétraédriques, le principe de dualité, l'homographie et, par suite, les propriétés projectives des figures ; mais elle n'est tributaire d'aucune de ces théories. Dans ce riche domaine, les applications sont en nombre infini. On en trouve un grand nombre dans

l'œuvre de Grassmann et dans les travaux de MM. Caspary et Peano. Je me réserve de revenir sur ce sujet.