NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. DE SAINT-GERMAIN

Mouvement d'un point pesant attiré par un point fixe suivant la loi de Newton

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 89-97

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__89_0>

MOUVEMENT D'UN POINT PESANT ATTIRÉ PAR UN POINT FIXE SUIVANT LA LOI DE NEWTON;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Le *Bulletin des Sciences mathématiques* contient, dans son numéro de juin 1891, une étude posthume de Cellérier sur le mouvement d'un point pesant attiré vers un centre fixe O par une force réciproque au carré de la distance. L'analyse du savant génevois est très ingénieuse, mais difficile à retrouver et à imiter. Or, le problème est de ceux dont la solution s'obtient avec une facilité remarquable à l'aide des équations d'Hamilton et de Jacobi; je vais la développer à ce point de vue, en complétant quelques résultats de Cellérier, sauf à laisser de côté une discussion difficile qu'il entame et dont l'intérêt est surtout analytique.

Prenons trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, dont le dernier est dirigé dans le sens de la pesanteur; soient x, y, z les coordonnées du point mobile M, r et ρ ses distances à l'origine et à l'axe OZ. En M passent deux paraboloïdes ayant OZ pour axe de révolution, O pour foyer et

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 + 2\lambda z, \qquad x^2 + y^2 = \mu^2 - 2\mu z$$

pour équations respectives : λ, μ sont positifs et l'on a

$$\rho^2 = \lambda\mu, \qquad r = \frac{\lambda + \mu}{2}, \qquad z = \frac{\mu - \lambda}{2}.$$

La position du point M peut être définie par les valeurs de λ, μ et de son azimut φ : faisant la masse égale à l'unité, j'ai pour la demi-force vive

$$T = \frac{1}{2}(\rho'^2 + z'^2 + \rho^2\varphi'^2) = \frac{\lambda+\mu}{8}\left(\frac{\lambda'^2}{\lambda} + \frac{\mu'^2}{\mu}\right) + \frac{\lambda\mu}{2}\varphi'^2.$$

Introduisons les variables d'Hamilton

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} p &= \frac{\partial T}{\partial \lambda'} = \frac{\lambda+\mu}{4\lambda}\lambda', \\ p_1 &= \frac{\partial T}{\partial \mu'} = \frac{\lambda+\mu}{4\mu}\mu', \\ p_2 &= \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \lambda\mu\varphi'. \end{aligned}\right.$$

Si, dans T, je remplace λ', μ', φ' par leurs valeurs tirées des équations (1), il vient

$$(2)\qquad T = \frac{2\lambda}{\lambda+\mu}p^2 + \frac{2\mu}{\lambda+\mu}p_1^2 + \frac{\lambda\mu}{2}p_2^2.$$

Il existe une fonction des forces

$$U = gz + \frac{k}{x} = g\,\frac{\mu-\lambda}{2} + \frac{2k}{\lambda+\mu}.$$

Cela posé, l'équation dont, suivant le théorème de Jacobi, il suffirait de connaître une intégrale complète pour en déduire, par de simples différentiations, toutes les intégrales du problème est de la forme $(T) - U + \frac{\partial V}{\partial t} = 0$, (T) désignant l'expression obtenue en remplaçant, dans la valeur (2) de T, p, p_1, p_2 par $\frac{\partial V}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial V}{\partial \mu}$, $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$: on trouve ainsi l'équation

$$\begin{aligned} \frac{2\lambda}{\lambda+\mu}\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)^2 + \frac{2\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{\partial V}{\partial \mu}\right)^2 + \frac{1}{2\lambda\mu}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 \\ + g\,\frac{\lambda-\mu}{2} - \frac{2k}{\lambda+\mu} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \end{aligned}$$

qui détermine V en fonction de λ, μ, φ, t ; mais, comme φ et t n'y figurent pas explicitement, on pourra trouver une intégrale en posant

$$V = S + a\varphi - ht, \tag{3}$$

S désignant une fonction inconnue de λ et μ seuls, a et h deux constantes dont la seconde est celle des forces vives. Dans l'équation de Jacobi, je remplace V et ses dérivées par leurs valeurs déduites de l'équation (3), puis je multiplie tous les termes par $\lambda + \mu$: j'obtiens l'équation à deux variables indépendantes

$$\begin{aligned} 2\lambda\left(\frac{\partial S}{\partial\lambda}\right)^2 + 2\mu\left(\frac{\partial S}{\partial\mu}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right)\frac{a^2}{2} \\ + g\,\frac{\lambda^2 - \mu}{2} - 2k - (\lambda + \mu)h = 0. \end{aligned}$$

Cette équation, de forme bien connue, peut être satisfaite en posant

$$S = \psi(\lambda) + \psi_1(\mu),$$

et, b désignant une troisième constante arbitraire,

$$2\lambda\psi'^2(\lambda) + \frac{a^2}{2\lambda} + g\,\frac{\lambda^2}{2} - k - \lambda h = b,$$

$$2\mu\psi_1'^2(\mu) + \frac{a^2}{2\mu} - g\,\frac{\mu^2}{2} - k - \mu h = -b;$$

ψ, ψ_1 se déterminent à l'aide de quadratures et on a l'intégrale

$$V_1 = a\varphi - ht + \frac{1}{2}\int\frac{d\lambda}{\lambda}\sqrt{F(\lambda)} + \frac{1}{2}\int\frac{d\mu}{\mu}\sqrt{F_1(\mu)},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\left\{\begin{aligned} F(\lambda) &= -g\lambda^3 + 2h\lambda^2 + 2(k+b)\lambda - a^2, \\ F_1(\mu) &= g\mu^3 + 2h\mu^2 + 2(k-b)\mu - a^2. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Il suffirait d'ajouter à V_1 une quatrième constante pour former une intégrale complète de l'équation de Jacobi, mais il est inutile de l'écrire. La trajectoire C est représentée par deux équations de la forme

$$\frac{\partial V_1}{\partial b} = b_1, \qquad \frac{\partial V_1}{\partial a} = a_1,$$

ou, en considérant les coordonnées initiales λ_0, μ_0, φ_0,

$$(5) \qquad \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} = \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{F_1(\mu)}},$$

$$(6) \qquad \varphi - \varphi_0 = \frac{a}{2} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{F(\lambda)}} + \frac{a}{2} \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\mu\sqrt{F_1(\mu)}}.$$

Le temps au bout duquel le mobile arrive en un point déterminé de C est donné, suivant une règle également connue, par la formule

$$(7) \qquad t = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\lambda\, d\lambda}{2\sqrt{F(\lambda)}} + \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\mu\, d\mu}{2\sqrt{F_1(\mu)}}.$$

Nous avons enfin trois intégrales premières

$$\frac{\partial V_1}{\partial \lambda} = p, \qquad \frac{\partial V_1}{\partial \mu} = p_1, \qquad \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} = p_2,$$

d'où l'on tire, après avoir remplacé p, p_1, p_2 par leurs valeurs (1),

$$(8) \qquad \lambda' = \frac{2}{\lambda + \mu} \sqrt{F(\lambda)},$$

$$(9) \qquad \mu' = \frac{2}{\lambda + \mu} \sqrt{F_1(\mu)},$$

$$(10) \qquad \varphi' = \frac{a}{\lambda\mu}.$$

L'équation (8) prouve que le radical $\sqrt{F(\lambda)}$ doit toujours être réel : il faudra, suivant l'époque à laquelle on se placera, le prendre avec sa valeur arithmétique ou avec cette valeur changée de signe ; mais on adoptera la même détermination dans toutes les formules. On en dira autant pour $\sqrt{F_1(\mu)}$.

Les équations (8), (9), (10), appliquées à l'instant initial, permettent de calculer les constantes a, b, h en fonction de λ_0, μ_0, λ'_0, μ'_0, φ'_0, qui sont données ou qui se déduisent de x_0, x'_0, ...; après avoir remplacé a, b, h par leurs valeurs dans les équations (4), on pourra écrire $F(\lambda)$ et $F_1(\mu)$ sous les formes suivantes

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}
F(\lambda) &= (\lambda-\lambda_0)\left[\frac{\lambda_0+\mu_0}{4}\left(\frac{\lambda_0'^2}{\lambda_0}+\frac{\mu_0'^2}{\mu_0}\right)\lambda-\frac{4k\lambda}{\lambda_0+\mu_0}\right.\\
&\qquad\left.+(\mu_0+\lambda)(\lambda_0\mu_0\varphi_0'^2-g\lambda)\right]\\
&\quad+\frac{(\lambda_0+\mu_0)^2}{4\lambda_0}\lambda_0'^2\lambda,\\
F_1(\mu) &= (\mu-\mu_0)\left[\frac{\lambda_0+\mu_0}{4}\left(\frac{\lambda_0'^2}{\lambda_0}+\frac{\mu_0'^2}{\mu_0}\right)\mu-\frac{4k\mu}{\lambda_0+\mu_0}\right.\\
&\qquad\left.+(\lambda_0+\mu)(\lambda_0\mu_0\varphi_0'^2+g\mu)\right]\\
&\quad+\frac{(\lambda_0+\mu_0)^2}{4\mu_0}\mu_0'^2\mu.
\end{aligned}\right.$$

L'équation (10) montre que φ varie toujours dans le même sens et que λ, μ ne s'annulent pas, sauf le cas où M resterait dans un plan fixe passant par OZ; nos résultats s'appliquent à ce cas, en y supposant seulement $\varphi = 0$.

Nous avons vu que $F(\lambda)$ ne doit jamais devenir négatif; ce polynôme, positif pour $\lambda = \lambda_0$, négatif pour $\lambda = 0$ et pour $\lambda = +\infty$, a toujours deux racines positives, α, α', entre lesquelles λ doit rester compris; C est située dans la région E, qui s'étend indéfiniment vers le bas et qui est comprise entre les paraboloïdes (α), (α') correspondant à $\lambda = \alpha$ et à $\lambda = \alpha'$. Si les racines α, α' sont égales, leur valeur sera celle de λ_0 et l'équation (11) montre qu'on aura les deux conditions

$$(12)\quad \lambda'_0 = 0, \qquad \mu_0'^2 + 4\mu_0^2\varphi_0'^2 - \frac{16k\mu_0}{(\lambda_0+\mu_0)^2} - 4g\mu_0 = 0;$$

λ restera égal à λ_0 et les intégrales en λ qui figurent dans les équations (5), (6), (7) n'auront plus de sens; mais, dans ce cas, les équations (9) et (10) permettront de calculer t et φ en fonction de μ à l'aide de deux quadratures.

Revenons au cas où les limites α, α' sont différentes : l'équation (8) montre que λ atteindra l'une d'elles, α par exemple, au bout d'un temps fini : on peut se demander s'il ne restera pas ensuite égal à α, ce qui, on le voit aisément, ne serait pas en contradiction avec nos formules; λ' et λ'' seraient nulles à partir de l'instant considéré. Or, des équations (8) et (9) on déduit

$$\begin{aligned}\lambda'' &= \frac{\lambda' F'(\lambda)}{(\lambda+\mu)\sqrt{F(\lambda)}} - \frac{2(\lambda'+\mu')\sqrt{F(\lambda)}}{(\lambda+\mu)^2}\\ &= \frac{2F'(\lambda)}{(\lambda+\mu)^2} - 4\,\frac{F(\lambda)+\sqrt{F(\lambda)F_1(\mu)}}{(\lambda+\mu)^3};\end{aligned}$$

si λ' et λ'' s'annulaient pour $\lambda = \alpha$, $F(\alpha)$, $F'(\alpha)$ seraient nuls et α serait racine double, contrairement à notre hypothèse : on en conclut que λ oscillera indéfiniment entre α et α', M entre les paraboloïdes (α), (α') qu'il touchera tour à tour.

Pas plus que $F(\lambda)$, $F_1(\mu)$ ne peut devenir négatif, mais il y aura deux cas à distinguer quand on considère les limites entre lesquelles μ peut varier, et à ces deux cas correspondent des mouvements très différents. $F_1(\mu)$, négatif pour $\mu = 0$, positif pour $\mu = \infty$, peut avoir trois racines, $\beta > \beta' > \beta'' > 0$; μ ne pourra prendre que des valeurs comprises entre β'' et β' ou entre β et ∞. Si μ_0 est compris entre β'' et β', μ restera entre les mêmes limites et, en raisonnant comme ci-dessus, on verra qu'il oscille de l'une à l'autre; M qui, dans tous les cas, doit rester dans la région E, ne sortira pas d'un espace annulaire fermé, compris entre les paraboloïdes (α), (α') et les paraboloïdes (β'), (β'') qui correspondent à $\mu = \beta'$, $\mu = \beta''$. Pour que C soit une courbe fermée, il faut et il suffit qu'il existe des entiers m, m', m'' tels que l'on ait

$$m \int_{\alpha'}^{\alpha} \frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} = m' \int_{\beta''}^{\beta'} \frac{d\mu}{\sqrt{F_2(\mu)}},$$

$$\left[m \int_{\alpha'}^{\alpha} \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{F(\lambda)}} + m' \int_{\beta''}^{\beta'} \frac{d\mu}{\mu\sqrt{F_1(\mu)}} \right] \frac{\lambda_0 \mu_0 \varphi'_0}{2} = 2m''\pi.$$

Lorsque μ_0 est $> \beta$, μ peut varier entre β et ∞, mais il ne peut devenir infini qu'au bout d'un temps infini; M, restant dans la région E et au-dessous du paraboloïde (β), s'éloignera indéfiniment du côté des z positifs. Si $F_1(\mu)$ avait une seule racine positive β, μ_0 serait nécessairement supérieur à β et tout ce qui vient d'être dit resterait applicable.

Considérons le cas où $F_1(\mu)$ aurait deux racines égales, et d'abord celui où β' serait égal à β'': si μ_0 est $> \beta$, le mouvement de M sera analogue à celui que j'ai esquissé en dernier lieu; mais si μ_0 doit être $< \beta$, la seule valeur qu'on pourra lui assigner sera β'' et μ restera constant: C serpentera sur le paraboloïde (β) entre les cercles d'intersection de cette surface avec les paraboloïdes (α) et (α'). On aura d'ailleurs deux équations de condition, analogues aux équations (12),

$$(12\ bis)\quad \mu'_0 = 0, \qquad \lambda_0'^2 + 4\lambda_0^2\varphi_0'^2 - \frac{16k\lambda_0}{(\lambda_0+\mu_0)^2} + 4g\lambda_0 = 0.$$

Supposons maintenant $\beta' = \beta$, mais $\mu_0 = \beta$; lorsque μ aura commencé à s'approcher de la valeur β, il continuera à s'en rapprocher de plus en plus, mais il ne l'atteindra que pour des valeurs infinies de t et de φ; le paraboloïde (β) est une surface asymptotique à C. Si au contraire μ avait d'abord la valeur $\beta = \beta'$, il la conserverait indéfiniment; mais la moindre action extérieure suffirait pour qu'il s'en écarte d'une quantité finie ou même infinie, tandis que dans le cas de $\beta' = \beta''$ une pareille action n'éloignerait que très peu μ de la valeur β''.

Il pourrait se faire que λ_0 fût racine double de $F(\lambda)$ en même temps que μ_0 le serait de $F_1(\mu)$; M décrirait un cercle horizontal; des équations (12) et (12 *bis*) on tirerait

$$\lambda'_0 = \mu'_0 = 0, \qquad \frac{\mu_0 z_0}{r_0^3} = g, \qquad \frac{\mu_0 \rho_0}{r_0^3} = \rho_0 \varphi_0'^2,$$

relations faciles à interpréter et à démontrer directement.

Je dis enfin que, lorsque C a une branche infinie, cette branche est asymptote à une parabole. Quand μ devient infini, les intégrales relatives à cette variable, qui figurent dans les équations (5) et (6), restent finies, en sorte que λ et φ tendent vers des limites λ_1, φ_1. Les points de l'espace pour lesquels λ est égal à λ_1 et à φ à φ_1 sont sur une parabole P qui a pour axe OZ. Comparons les positions des points M, M_1 où les branches de C et de P qui sont dans la même région coupent le paraboloïde correspondant à une valeur très grande, m, de μ. Sur C, pour $\mu = m$, on a $\lambda = \lambda_1 - \varepsilon$ et je supposerai, pour fixer les idées, ε positif. L'équation (5) est applicable en prenant $\lambda_1 - \varepsilon$ et λ_1, μ et ∞ pour limites respectives de λ et de μ; entre ces limites on peut, à $F(\lambda)$ et à $F_1(\mu)$, substituer les quantités $F(\lambda_1)$ et $g\mu^3$ dont les rapports avec les premières sont très voisins de l'unité; l'intégration devient facile et donne, sans erreur appréciable, $\varepsilon = \frac{2\sqrt{F(\lambda_1)}}{\sqrt{mg}}$. Les z des points M_1, M peuvent être considérés comme égaux; la différence de leurs distances ρ_1, ρ à OZ est, en ne retenant désormais de chaque expression que sa partie principale

$$\sqrt{m\lambda_1} - \sqrt{m(\lambda_1 - \varepsilon)} = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{m}{\lambda_1}} = \frac{\sqrt{F(\lambda_1)}}{\sqrt{g\lambda_1}}.$$

L'équation (6), avec des simplifications analogues aux précédentes, donne la différence des azimuts

$$\varphi_1 - \varphi = \frac{a}{2}\left[\frac{\varepsilon}{\lambda_1\sqrt{F(\lambda_1)}} = \frac{2}{3\sqrt{gm^3}}\right] = \frac{a}{\lambda_1\sqrt{mg}}.$$

La distance du point M au plan de P est sensiblement égale à $(\varphi_1 - \varphi)\rho$ ou à $\frac{a}{\sqrt{g\lambda_1}}$; cette quantité, comme $\rho_1 - \rho$, est indépendante de M. De ce qui précède il résulte qu'à l'infini C se confond avec la parabole P à laquelle on aurait fait subir deux translations, l'une égale à $\sqrt{\frac{F(\lambda_1)}{g\lambda_1}}$ dirigée vers OZ, l'autre égale à $\frac{a}{\sqrt{g\lambda_1}}$ normale au plan de P elle-même.