NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. PEANO

Sur le théorème général relatif à l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 79-82

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__79_1>

SUR LE THÉORÈME GÉNÉRAL RELATIF A L'EXISTENCE DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES;

PAR M. G. PEANO,

Professeur à l'Université de Turin.

M. E. Picard, sous ce même titre (*Nouvelles Annales*, t. X, p. 197), prouve que, si l'on envisage le système des n équations du premier ordre,

$$\frac{du}{dx}=f_1(x, u, v, \ldots, w), \quad \ldots, \quad \frac{dw}{dx}=f_n(x, u, v, \ldots, w),$$

où les f sont des fonctions continues réelles de x, u, ..., w, dans le voisinage de x_0, u_0, ..., w, et si de plus on suppose que l'on puisse déterminer n quantités positives A, B, ..., L, telles que

$$(\alpha) \quad \left\{ \begin{aligned} |f(x, u', v', \ldots, w')-f(x, u, v, \ldots, w)| &< A|u'-u| \\ &+B|v'-v|+\ldots+L|w-w'|, \end{aligned} \right.$$

alors il existe des fonctions $u, v, \ldots, w$ de x, continues dans le voisinage de x_0, satisfaisant aux équations différentielles, et se réduisant respectivement, pour $x=x_0$, à $u_0, v_0, \ldots, w_0$.

Or, pour démontrer l'existence des intégrales, l'hypothèse (α) n'est pas nécessaire. En la faisant, on peut déduire non seulement l'existence des intégrales dont il s'agit, mais aussi qu'elles sont uniques. J'ai prouvé cela dans ma Note *Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires* (*Mathematische Annalen*, t. XXXVII, p. 182). La démonstration de la première partie de ce que j'affirme est un peu longue; la deuxième partie (la plus intéressante dans l'enseignement élémentaire) se prouve aisément.

En effet, soient $u, v, \ldots$ et $u', v', \ldots$ deux systèmes de fonctions de x, définies aux environs de $x=x_0$, satisfaisant aux équations différentielles, et se réduisant tous les deux à $u_0, v_0, \ldots$ pour $x=x_0$. On aura

$$\frac{du}{dx}=f_1(x, u, v, \ldots, w), \quad \ldots,$$

$$\frac{du'}{dx}=f_1(x, u', v', \ldots, w'), \quad \ldots,$$

d'où l'on déduit

$$(\beta) \quad \frac{d(u'-u)}{dx} = f_1(x, u', v', \ldots) - f_1(x, u, v, \ldots). \qquad \ldots\ldots$$

Or, quelle que soit la fonction u de x, on a

$$\frac{d|u|}{dx} \leqq \left|\frac{du}{dx}\right|.$$

En posant $u'-u$, $v'-v$, ... au lieu de u dans cette inégalité, en vertu de (α) et de (β) on a

$$(\gamma) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d|u'-u|}{dx} \leqq A|u'-u| + B|v'-v| + \ldots + L|w'-w|, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Soit $\frac{M}{n}$ la plus grande des quantités A, B, ..., L; posons $X = |u'-u| + |v'-v| + \ldots + |w'-w|$. Sommons les inégalités (γ); on a

$$(\delta) \qquad \frac{dX}{dx} \leqq MX.$$

Pour tirer X de cette inégalité, multiplions par $e^{-M(x-x_0)}$ (le facteur intégrant)

$$e^{-M(x-x_0)}\left(\frac{dX}{dx} - MX\right) \leqq 0,$$

d'où

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-M(x-x_0)}X\right) \leqq 0.$$

Donc $e^{-M(x-x_0)}X$, qui s'annule pour $x \equiv 0$, et dont la dérivée est $\leqq 0$, sera, pour toute valeur de $x > x_0$, négative ou nulle

$$e^{-M(x-x_0)}X \leqq 0.$$

Mais $e^{-M(x-x_0)}$ est positif, X est positif ou nul; donc $X = 0$, et chacune de ses parties $|u'-u|$, $|v'-v|$, ... est aussi nulle, d'où

$$u' = u, \qquad v' = v, \qquad \ldots\ldots$$

Cela prouve qu'il y a un seul système de fonctions qui satisfait aux équations données, et qui prend des valeurs données pour la valeur fixée de la variable.